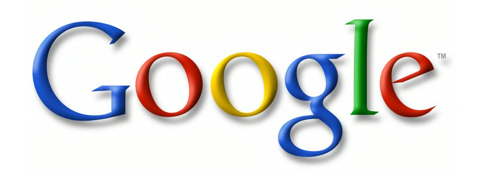
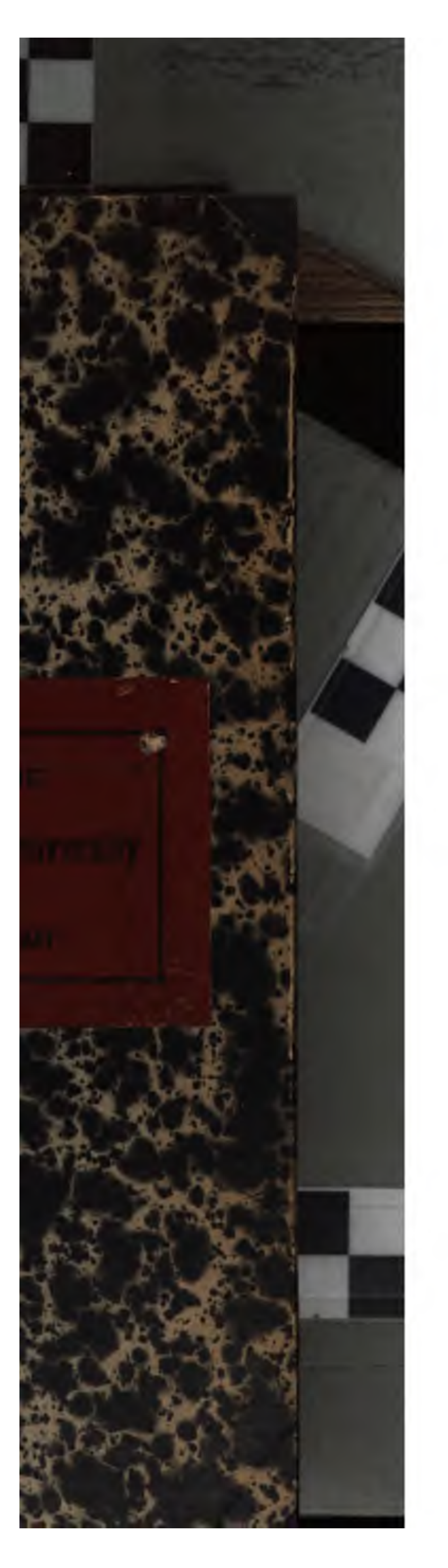








ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XX.





ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XX.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT SECHS UND FÜNFZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST ACHT FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1883.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.


LIBRARY
UNIVERSITY

Inhalt.

Neue Folge. Band XX.

Neuntes Heft.

Seite

I. L. Lorenz. Theorie der Dispersion 1

II. A. C. van Ryn van Alkemade. Ueber die elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Körpern . 22

III. W. Johst. Die Brechungscoëfficienten einiger Gemische von Anilin und Alkohol 47

IV. K. Exner. Bemerkungen zu Hrn. E. Lommel's Abhandlung „Ueber die Newton'schen Staubringe 63

V. F. Kohlrausch. Ueber ein Verfahren, electrische Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen 76

VI. — Ueber einige Bestimmungsweisen des absoluten Widerstandes einer Kette, welche einen Erdinductor und ein Galvanometer enthält 87

VII. A. Winkelmann. Ueber die durch die Polarisation bewirkte Phasenänderung von Wechselströmen 91

VIII. A. Miller. Quantitative Bestimmung des Einflusses der durch Dehnung erzeugten Temperaturveränderung auf die Messung der ersteren 94

IX. W. Siemens. Ueber die Zulässigkeit der Annahme eines electrischen Sonnenpotentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene 108

X. A. Ritter. Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper 137

XI. E. Budde. Die Reduction der mechanischen Grundeinheiten auf eine einzige Dimension 161

XII. — Notiz über eine unter Wasserstoff arbeitende Wippe . 167

XIII. C. Rohrbach. Ueber eine neue Flüssigkeit von hohem specifischen Gewicht, hohem Brechungsexponenten und grosser Dispersion 169

XIV. K. Zöppritz. Ueber die Rechtschreibung einiger aus dem Arabischen stammenden Ausdrücke der Vermessungskunde 175

Geschlossen am 15. Juli 1883.

Zehntes Heft.

Seite

I. L. Sohncke u. A. Wangerin. Ueber Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen . 177
II. E. Wiedemann. Ueber die Volumenänderungen von Metallen und Legirungen beim Schmelzen 228
III. S. v. Wroblewski u. K. Olszewski. Ueber die Verflüssigung des Sauerstoffs, Stickstoffs und Kohlenoxyds . . 243
IV. K. F. Slotte. Ueber die innere Reibung einiger Lösungen und die Reibungsconstante des Wassers bei verschiedenen Temperaturen 257
V. W. C. Röntgen. Ueber einen Vorlesungsapparat zur Demonstration des Poiseuille'schen Gesetzes 268
VI. H. Aron. Ueber die Herleitung der Krystallsysteme aus der Theorie der Elasticität 272
VII. H. Hertz. Ueber das Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner 279
VIII. K. Waitz. Ueber den Einfluss der galvanischen Polarisation auf die Reibung 285
IX. F. Stenger. Ueber das Verhalten des Kalkspathes im homogenen magnetischen Felde 304
X. L. Weber. Mittheilung über einen photometrischen Apparat 326
XI. E. Wiedemann. Ueber „Die Darlegung der Abhandlung über das Licht" von Ibn al Haiṭam 337
XII. G. Berthold. „Die Kölner Luftpumpe v. J. 1641", eine historische Notiz 345
XIII. A. Winkelmann. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Christiansen: „Einige Versuche über die Wärmeleitung" 350

Geschlossen am 1. September 1883.

Elftes Heft.

I. R. Clausius. Zur Theorie der dynamoelectrischen Maschinen 353
II. L. Sohncke u. A. Wangerin. Ueber Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen . 391
III. B. Hecht. Ueber die Bestimmung des Axenverhältnisses der bei der elliptischen Polarisation im Quarz auftretenden Bahnellipsen 426
IV. W. Voigt. Zur Theorie des Lichtes 444
V. H. Wild. Ueber die Umwandlung meines Photometers in ein Spectrophotometer 452

Seite

VI. A. Elsas. Untersuchungen über erzwungene Schwingungen von Platten 468
VII. E. Riecke. Zu Boltzmann's Theorie der elastischen Nachwirkung 484
VIII. J. A. Groshans. Ueber wässerige Lösungen 492
IX. E. Riecke. Messung der von einer Zamboni'schen Säule gelieferten Electricitätsmenge 512
X. V. Strouhal u. C. Barus. Ueber den galvanischen Temperaturcoëfficienten des Stahles, des Stab- und Gusseisens . 525
XI. E. Wiedemann. Ueber die Beziehung zwischen dem Reibungs- und Leitungswiderstand der Lösungen von Salzen in verschiedenen Lösungsmitteln 537
XII. — Arabische specifische Gewichtsbestimmungen 539
XIII. K. L. Bauer. Vereinfachungen beim Experimentiren mit der Luftpumpe 542

Geschlossen am 15. October 1883.

Zwölftes (a) Heft.

I. R. Bunsen. Ueber die Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen 545
II. C. Bender. Dichteregelmässigkeiten normaler Salzlösungen 560
III. E. Lommel. Das Gesetz der Rotationsdispersion 578
IV. A. Kundt. Ueber eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-, Actino- und Piëzoelectricität der Krystalle . 592
V. D. Kaempfer. Ueber die Messung electrischer Kräfte mittelst des electrischen Flugrades 601
VI. S. Kalischer. Ueber die Frage, ob bei der Condensation von Wasserdampf eine Electricitätserregung stattfindet . . 614
VII. V. Strouhal und C. Barus. Ueber den Einfluss der Härte des Stahles auf dessen Magnetisirbarkeit 621
VIII. V. Strouhal und C. Barus. Ueber den Einfluss des Anlassens auf die Haltbarkeit der Magnete 662
IX. A. Guébhard. Berichtigung 684
X. A. Kundt. Benutzung der Schlierenmethode zur Untersuchung von Verwachsungen im Quarz 688
XI. C. Bohn. Ueber absolute Maasse 690
XII. W. Holtz. Ein Vorlesungsversuch zum Beweise, dass Metalle besonders schlechte Absorbenten der Wärmestrahlen sind . 703

Geschlossen am 15. November 1883.

Zwölftes (b) Heft.

Seite

I. W. Hittorf. Ueber die Electricitätsleitung der Gase . . 705
II. E. Wiedemann. Ueber electrische Entladungen in Gasen 756
III. W. L. Robb. Ueber das galvanische Verhalten der Amalgame des Zinkes und des Cadmiums 798
IV. E. Warburg und L. Hönig. Ueber die Wärme, welche durch periodisch wechselnde magnetisirende Kräfte im Eisen erzeugt wird 814
V. A. v. Waltenhofen. Bemerkungen zu Hrn. Hugo Meyer's Abhandlungen über die Magnetisirungsfunction des Stahles 835
VI. A. Toepler. Ueber einige Eigenschaften kreuzweise verbundener Magnetstäbe 838
VII. E. Lommel. Spectroskop mit phosphorescirendem Ocular; Beobachtungen über Phosphorescenz 847
VIII. S. v. Wroblewski. Ueber das specifische Gewicht des flüssigen Sauerstoffs 860
IX. J. Drecker. Ueber die innere Ausdehnungsarbeit von Flüssigkeitsgemischen im Vergleich zu derjenigen ihrer Bestandtheile 870
X. u. XI. A. Ritter. Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper 897
XII. C. Rammelsberg. Beiträge zur Kenntniss der vanadinsauren und phosphorsauren Salze 928
Berichtigungen 952

Geschlossen am 15. December 1883.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. von Wroblewski, Fig. 1—2. — Slotte, Fig. 3. — Röntgen, Fig. 4. — Hertz, Fig. 5—6. — Waitz, Fig. 7—8. — Stenger, Fig. 9—12. — L. Weber, Fig. 13.
Taf. II. Elsas, Fig. 1—49. — Wild, Fig. 50—51.
Taf. III. Strouhal u. Barus, Fig. 1—8.
Taf. IV. Bunsen, Fig. 1—2.
Taf. V. Kundt, Fig. 1—14.
Taf. VI. Hittorf, Fig. 1—16.
Taf. VII. E. Wiedemann, Fig. 1—14. — Robb, Fig. 15—16. — Lommel, 17—19.
Taf. VIII. von Wroblewski, Fig. 1. — Drecker, Fig. 2—7. — Warburg u. Hönig, Fig. 8—11.

1883. ANNALEN № 9.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XX.

I. *Theorie der Dispersion; von L. Lorenz in Kopenhagen.*

Da sowohl die Gesetze der Lichtbewegung in einem vollkommen homogenen und durchsichtigen Mittel, als auch die Gesetze der Bewegungen beim Uebergang von einem solchen Mittel in ein anderes ähnliches bekannt sind, so wird es möglich sein, ohne irgend eine Hypothese die Lichtbewegungen im Inneren eines nicht homogenen, überall vollkommen durchsichtigen Mittels zu berechnen, wenn nur die Lichtgeschwindigkeit, die einzige Grösse, worauf es hier ankommt, in jedem Punkte des Mittels bekannt ist. Ich werde es hier versuchen, eine solche Berechnung auszuführen, um dadurch das Gesetz der gewöhnlichen Dispersion eines isotropen durchsichtigen Körpers, namentlich die Abhängigkeit derselben von der Wellenlänge und der Körperdichte abzuleiten.

Die allgemeinen, einer variablen Fortpflanzungsgeschwindigkeit entsprechenden Gesetze der Lichtbewegungen habe ich schon vor zwanzig Jahren in meiner Theorie des Lichtes entwickelt. Ich werde im Folgenden, ohne mich auf meine früheren Arbeiten zu beziehen, diese allgemeinen Gesetze aufs neue und in einfacherer Weise ableiten.

Da es sich ferner darum handelt, die Lichtbewegungen im Inneren eines Körpers zu berechnen, so muss eine bestimmte Constitution des Körpers vorausgesetzt werden. Es kann wohl keinem Zweifel mehr unterliegen, dass die Körper aus discreten Atomen oder Molecülen bestehen, und aus meiner Theorie der Refractionsconstante, die sich in schöner Uebereinstimmung mit der Erfahrung gezeigt hat, geht ferner hervor, dass ein Theil des Lichtmediums bei allen physischen

Zustandsänderungen des Körpers mit den Atomen unveränderlich verbunden ist, während in dem übrigen Zwischenraume das Licht mit derselben Geschwindigkeit wie im leeren Raume oder im Weltraume sich fortpflanzt. Im übrigen bleibt ein weites Feld für Hypothesen in Betreff der Gruppirung der Atome und der Abhängigkeit des Lichtmittels von dieser Gruppirung noch offen, allein für den Anfang muss die Berechnung sich auf die möglichst einfachen Voraussetzungen beschränken. Ich nehme demnach an, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in der Nähe der Atome, die ich als mathematische Punkte auffasse, eine Function der Entfernung vom Atome ist, welche Function für alle Atome des Körpers die nämliche bleibt, dass ferner in grösseren Entfernungen die Geschwindigkeit derjenigen im leeren Raume gleich ist, und endlich, dass die Atome beliebig, jedoch den Bedingungen der Isotropie Genüge leistend, gelagert sind.

Man wird hier den Einwand machen können, dass die inneren Bewegungen der Atome eine festgestellte Thatsache sind, welche in Betracht genommen werden muss. Nach den für jetzt gangbaren Vorstellungen sind diese Bewegungen doppelter Art, theils solche, die als mit der Wärme identisch betrachtet werden, theils andere, die im Einklange mit den Schwingungen des Lichtes vor sich gehen und als Ursache des Absorptions- und Emissionsvermögens der Körper angenommen werden.

Obgleich ich in keiner Weise die Identität der inneren molecularen Bewegungen mit der Wärme als bewiesen erachte, so bezweifle ich die Existenz solcher Bewegungen gar nicht, allein die hier in Rede kommenden Geschwindigkeiten werden im Vergleich mit derjenigen des Lichtes immerhin so klein sein, dass sie auf die Lichtbewegungen keinen merkbaren Einfluss haben können. Die einzige bekannte Spur einer Einwirkung der Körperbewegung auf die Lichtbewegung (von dem sehr zweifelhaften, dreiunddreissig Jahre alten Versuche Fizeau's über den Durchgang des Lichtes durch strömendes Wasser abgesehen) ist die Aberration der Sterne, allein die molecularen Geschwindigkeiten sind noch viel kleiner als diejenige der Erde im Weltraume.

Die andere Art von Bewegungen bildet die Grundlage der neueren Arbeiten über die Absorption und Emission des Lichtes. Man hätte gegen die Annahme dieser Bewegungen den Einwand machen können, dass, wenn die Atome eines Körpers mit dem Lichte im Einklange 500 Billionen Schwingungen in der Secunde machen sollen, so ungeheure Kräfte im Inneren des Körpers vorhanden sein müssten, dass eine Verschiebung der in einem Gramm enthaltenen Atome um einen Billionstel Millimeter aus der Gleichgewichtslage einen Druck von einer Billion Kilogramm erfordern würde. Die Hypothese ist doch nicht deshalb erfunden, um irgend eine unmittelbar vom Licht erzeugte Massenbewegung zu erklären, da wir überhaupt keine solche Wirkungen von dem Lichte kennen, sondern nur zur Erklärung gewisser optischer Erscheinungen, die auch vielleicht in anderer Weise erklärt werden können. Wie dem auch sein mag, in jedem Falle wird es zunächst nothwendig sein, die Mitschwingungen des die Atome umgebenden Lichtmittels zu berechnen, unter der Voraussetzung, dass die Atome selbst in Ruhe sind. Wenn es sich alsdann nothwendig zeigen sollte, die Mitschwingungen der Atome in die Rechnung einzuführen, so würde man immerhin nachher diesen nächsten Schritt machen können.

Die allgemein anerkannten Gesetze der Lichtschwingungen eines isotropen und vollkommen homogenen Mittels können bekanntlich durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden:

$$
(1) \quad \begin{cases} \Delta_2 \xi = \dfrac{d^2 \xi}{a^2 dt^2}, \quad \Delta_2 \eta = \dfrac{d^2 \eta}{a^2 dt^2}, \quad \Delta_2 \zeta = \dfrac{d^2 \zeta}{a^2 dt^2}, \\ \dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz} = \theta = 0, \end{cases}
$$

wo die Componenten der Schwingungen durch ξ, η, ζ ausgedrückt sind, und zur Abkürzung:

$$
\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},
$$

gesetzt ist. Es bedeutet hier a die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Beim Uebergang von einem solchen Mittel in ein an-

deres ähnliches, in welchem die Geschwindigkeit eine andere ist, befolgt der Lichtstrahl das bekannte Sinusgesetz, während nach den von Fresnel entdeckten Gesetzen die Amplituden der einfallenden, gebrochenen und reflectirten Strahlen sich wie:

$$1 : \frac{2 \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} : \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)},$$

wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene liegen, und wie:

$$1 : \frac{2 \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} : -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

wenn die Schwingungen des einfallenden Lichtes senkrecht gegen die Einfallsebene sind. Hier ist α der Einfallswinkel und β der Brechungswinkel. Die Polarisationsebene ist dabei senkrecht zur Schwingungsrichtung angenommen.

Die von mir entwickelte Theorie geht allein davon aus, dass diese Gesetze allgemein gültig sind, in der Weise, dass alle Abweichungen von diesen Gesetzen nur davon herrühren, dass kein Körper vollkommen homogen ist, und dass der Uebergang von einem Mittel in ein anderes allmählich, ohne Unterbrechung der Stetigkeit, vor sich geht.

Die obigen Gesetze können auch in anderer Weise ausgedrückt werden. Es sei die Coordinatenebene yz die Grenzfläche der beiden Mittel. Alsdann geht aus den angenommenen Gesetzen hervor, dass die vier Grössen:

$$\eta, \quad \zeta, \quad \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz},$$

an beiden Seiten der Grenzfläche gleiche Werthe haben. Aus diesem Satze können auch umgekehrt die genannten Gesetze sehr leicht abgeleitet werden. Man sieht also ein, dass z. B.:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right) \text{ und: } \frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right),$$

überall, auch für $x = 0$, endlich sind. Durch Addition dieser beiden Grössen ergibt sich:

$$\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy}.$$

Dieser Ausdruck hat also überall einen endlichen Werth. Man wird demnach, der zweiten der Gleichungen (1) zufolge, gemeinschaftlich für beide Mittel die Gleichung:

$$\Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\eta}{dt^2}$$

bilden können, indem durch ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die für $x < 0$ und für $x > 0$ verschiedene Werthe annimmt, ausgedrückt ist. In ganz ähnlicher Weise kann aus den obigen Grenzbedingungen die Gleichung:

$$\Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

abgeleitet werden und, da die yz-Ebene willkürlich als Grenzebene gewählt ist, durch Umsetzung der Buchstaben:

$$\Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\xi}{dt^2}.$$

In dieser Weise sind also alle Gesetze der Lichtbewegungen durch drei partielle Differentialgleichungen ausgedrückt, aus welchen Gleichungen wiederum die Gesetze, von welchen wir ausgegangen sind, leicht abgeleitet werden können. Die gewonnenen Differentialgleichungen müssen auch gültig bleiben, wenn ω als eine beliebige Function von x, y und z betrachtet wird. Sie enthalten eigentlich nichts Neues, und man hätte sie entbehren können, allein für die praktische Rechnung sind sie von grossem Belange.

Beschränken wir uns auf eine einfache Wellenbewegung mit gegebener Schwingungsdauer, so kann die Abhängigkeit von der Zeit t durch den gemeinsamen complexen Factor e^{kti} ausgedrückt werden. Wenn:

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \mu$$

gesetzt wird, so gehen die obigen Differentialgleichungen über in:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_2 \xi - \frac{d\theta}{dx} + \mu \xi = 0, \quad \Delta_2 \eta - \frac{d\theta}{dy} + \mu \eta = 0, \\ \Delta_2 \zeta - \frac{d\theta}{dz} + \mu \zeta = 0. \end{cases}$$

Ich werde zunächst die Lichtbewegungen in einem aus concentrischen kugelförmigen Schichten bestehenden Mittel berechnen, in welchem die Geschwindigkeit des Lichtes eine

Function der Entfernung r vom Mittelpunkte ist. Innerhalb jeder dieser Schichten wird μ constant angenommen, während beim Uebergange aus einer Schicht zur anderen μ andere Werthe annimmt. Auch in dem Falle, dass μ eine stetige Variable ist, wird es offenbar erlaubt sein, diese Supposition festzuhalten, da immerhin die Dicke der Schichten beliebig klein gewählt werden können.

Wird: $$x\xi + y\eta + z\zeta = \varrho$$
gesetzt, und werden die Gleichungen (2) bez. mit x, y und z multiplizirt, so bekommt man durch Addition:

$$(3) \qquad \Delta_2 \varrho - \frac{dr^2\theta}{rdr} + \mu\varrho = 0.$$

Dieselben Gleichungen (2) nach x, y und z differenziirt und addirt, geben:

$$(4) \qquad \mu\theta + \frac{d\mu}{dr} \cdot \frac{\varrho}{r} = 0.$$

Während μ sich in den Grenzflächen zweier Schichten unstetig ändert, verlaufen gewisse Functionen der Schwingungscomponenten überall stetig. So geht aus der Gleichung (3) hervor, dass:

$$\frac{d^2 r\varrho}{rdr^2} - \frac{dr^2\theta}{rdr}$$

überall endlich ist, woraus folgt, dass:

$$\frac{dr\varrho}{dr} - r^2\theta,$$

eine stetige Function ist, die also an den beiden Seiten jeder Grenzfläche, in welcher μ sich unstetig ändert, denselben Werth hat. Ich werde dieses kurz durch die Bezeichnung:

$$\left[\frac{dr\varrho}{dr} - r^2\theta\right] = 0,$$

ausdrücken. Da ferner an beiden Seiten der Grenzfläche μ constant, und demnach $\theta = 0$ ist, so reducirt sich diese Grenzbedingung zu:

$$(5) \qquad \left[\frac{dr\varrho}{dr}\right] = 0.$$

Eine andere Grenzbedingung ergibt sich daraus, dass:

$$\theta - \frac{d}{dr}\frac{\varrho}{r}$$

eine überall endliche Grösse sein muss, indem nämlich die Derivirten nach r einander aufheben. Wenn der in der Gleichung (4) gegebene Werthe von θ eingesetzt wird, geht der obige Ausdruck in:

$$-\frac{1}{\mu}\frac{d}{dr}\frac{\mu\varrho}{r}$$

über, woraus folgt, dass $\mu\varrho$ eine stetige Function ist, und dass also für alle Grenzflächen:

$$[\mu\varrho] = 0 \tag{6}$$

ist. Diese beiden Grenzbedingungen in Verbindung mit der innerhalb jeder Schicht, in welcher μ constant ist, geltenden Differentialgleichung:

$$\Delta_2\varrho + \mu\varrho = 0, \tag{7}$$

genügen, um ϱ zu bestimmen.

Wenn in der ersten der Gleichungen (2) $x = r\cos\varphi$ gesetzt wird, so ersieht man, dass:

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \frac{d\theta}{dr}r\cos\varphi + \frac{d\theta}{d\varphi}\sin\varphi$$

eine überall endliche Grösse ist. Da ferner, wie oben gezeigt ist:

$$\frac{d^2r\varrho}{dr^2} - \frac{dr^2\theta}{dr} \text{ und: } \theta - \frac{d}{dr}\frac{\varrho}{r}$$

ebenfalls überall endliche Grössen sind, so leitet sich hieraus ab, dass:

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \cos\varphi\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \sin\varphi\frac{d^2}{dr\,d\varphi}\frac{\varrho}{r}$$

überall endlich ist. Nachdem dieser Ausdruck in:

$$\frac{d^2r\xi}{dr^2} - \frac{d}{dr}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)$$

umgestaltet ist, ergibt sich hieraus die Grenzbedingung:

$$\left[\frac{dr\xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dx}\right] = 0. \tag{8}$$

Da ferner der letztere Ausdruck und also auch:

$$\frac{dr\xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dr}\cos\varphi$$

überall endlich ist, so bekommt man als zweite Grenzbedingung:

$$[r^2\xi - \varrho x] = 0. \tag{9}$$

In Analogie mit diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(10)\quad \begin{cases} \left[\frac{dr\eta}{dr} - \frac{d\varrho}{dy}\right] = 0, & [r^2\eta - \varrho y] = 0, \\ \left[\frac{dr\zeta}{dr} - \frac{d\varrho}{dz}\right] = 0, & [r^2\zeta - \varrho z] = 0, \end{cases}$$

welchen Grenzbedingungen sich die innerhalb der Grenzflächen geltenden Differentialgleichungen:

$$(11)\quad \Delta_2\xi + \mu\xi = 0, \quad \Delta_2\eta + \mu\eta = 0, \quad \Delta_2\zeta + \mu\zeta = 0,$$

anschliessen. Ausserdem soll hier $\theta = 0$ sein.

Die Functionen ϱ, ξ, η, ζ können in Reihen nach Kugelfunctionen entwickelt werden. Ich werde indessen hier eine von der gewöhnlichen abweichende Form benutzen, wodurch eine bedeutende Erleichterung in der Berechnung gewonnen wird. Es werde:

$$V_n^m = \frac{d^n}{dx^{n-m}\, dy^m}\frac{1}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

gesetzt. Ich beschränke mich auf den Fall, dass ϱ, ξ und η gerade Functionen von z sind, ζ eine ungerade Function von z ist, werde die folgenden Reihenentwickelungen einführen:

$$(12)\quad \varrho = \Sigma\varrho_n^m V_n^m, \quad \xi = \Sigma\xi_n^m V_n^m, \quad \eta = \Sigma\eta_n^m V_n^m, \quad \zeta = \Sigma\zeta_n^m \frac{d}{dz} V_{n-1}^m,$$

wo die Summenzeichen bedeuten, dass m alle ganze Werthe von $m = 0$ bis $m = n$ oder in der letzten Reihe bis $m = n - 1$, und n alle ganze positiven Werthe von $n = 0$ bis $n = \infty$ durchlaufen. Die Coëfficienten ϱ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m sind Functionen von r allein. Ferner sei bemerkt, dass die Derivirten höherer Ordnung als erster nach z, wenn solche im Laufe der Rechnung vorkommen, mittelst der Gleichung:

$$\Delta_2 V_n^m = 0,$$

zu eliminiren sind. Ausserdem ergibt sich aus der Definition von V_n^m:

$$\frac{dV_n^m}{dr} = -\frac{n+1}{r} V_n^m.$$

Wenn die Reihenentwickelungen in die Gleichungen (7) und (11) eingesetzt werden, so ersieht man, dass die Coëfficienten ϱ_n^m, ξ_n^m, η_n^m, ζ_n^m der Differentialgleichung:

$$(13)\quad \frac{d^2 f_n}{dr^2} - \frac{2n}{r}\frac{df_n}{dr} + \mu f_n = 0$$

genügen müssen. Zwei particuläre Integrale dieser Gleichung sind:

$$
(14)\quad \begin{cases} \varphi_n = r^{2n+1}\left(1 - \dfrac{\mu r^2}{2(2n+3)} + \dfrac{\mu^2 r^4}{2.4(2n+3)(2n+5)} - \cdots\right) \\ \psi_n = 1 + \dfrac{\mu r^2}{2(2n-1)} + \dfrac{\mu^2 r^4}{2.4(2n-1)(2n-3)} + \cdots \end{cases}
$$

Man wird demnach:

$$
(15)\quad \begin{cases} \varrho_n^m = k_n^m \varphi_n + \varkappa_n^m \psi_n, & \xi_n^m = a_n^m \varphi_n + \alpha_n^m \psi_n, \\ \eta_n^m = b_n^m \varphi_n + \beta_n^m \psi_n, & \zeta_n^m = c_n^m \varphi_n + \gamma_n^m \psi_n \end{cases}
$$

setzen können, indem alle diese neu eingeführten Coëfficienten, die in derselben Weise wie μ innerhalb jeder Schicht constant sind, von einer Schicht zur anderen verschiedene Werthe annehmen.

Aus den Gleichungen (14) ergibt sich:

$$
(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_n}{rdr} = (2n+1)\varphi_{n-1}, \quad \dfrac{d\psi_n}{rdr} = \dfrac{\mu}{2n-1}\psi_{n-1}, \\ r^{2n+2}\dfrac{d}{dr}\dfrac{\varphi_n}{r^{2n+1}} = -\dfrac{\mu}{2n+3}\varphi_{n+1}, \\ r^{2n+2}\dfrac{d}{dr}\dfrac{\psi_n}{r^{2n+1}} = -(2n+1)\psi_{n+1}. \end{cases}
$$

Ferner gehen aus der Definition von V_n^m die Gleichungen:

$$
x V_0^0 + r^2 V_1^0 = 0, \qquad y V_0^0 + r^2 V_1^1 = 0
$$

hervor. Wird die erste Gleichung $n - m$ mal nach x und m mal nach y, und ebenso die zweite Gleichung $n - m + 1$ mal nach x und $m - 1$ mal nach y differenziirt, so bekommt man zwei Gleichungen, die leicht in die folgenden transformirt werden können:

$$
(17)\quad \begin{cases} (2n+1)\,x V_n^m = -r^2 V_{n+1}^m - (n^2 - m^2) V_{n-1}^m \\ \qquad + m(m-1) V_{n-1}^{m-2} \\ (2n+1)\,y V_n^{m-1} = -r^2 V_{n+1}^m + (n-m+1)(n-m) V_{n-1}^m \\ \qquad - (2n-m+1)(m-1) V_{n-1}^{m-2}. \end{cases}
$$

In ähnlicher Weise und mit Beachtung der letzteren Gleichungen erhält man:

$$(18)\left\{\begin{aligned}(2n+1)\,z\,V_n^m = &-r^2\frac{d}{dz}V_n^m + (n-m)(n-m-1)\frac{d}{dz}V_{n-2}^m\\ &+m(m-1)\frac{d}{dz}V_{n-2}^{m-2}.\end{aligned}\right.$$

Wenn ferner diese Gleichung nach z differenziirt und $n-1$ anstatt n eingesetzt wird, so ergibt sich:

$$(19)\left\{\begin{aligned}(2n+1)\,z\frac{d}{dz}V_{n-1}^m &= r^2 V_{n+1}^{m+2} + r^2 V_{n+1}^m\\ &-(n-m-1)(n-m-2)V_{n-1}^{m+2}\\ -\left((n-m-1)^2+n+m^2\right)&V_{n-1}^m - m(m-1)V_{n-1}^{m-2}.\end{aligned}\right.$$

Die vier Grössen ϱ, ξ, η, ζ sind durch die Gleichungen:

$$x\xi + y\eta + z\zeta = \varrho, \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

miteinander verknüpft. Die hieraus entspringenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten der Reihen (12) können aus den folgenden Reihenentwickelungen, wo s eine beliebige Zahl ist, abgeleitet werden:

$$\frac{d r^s x\xi}{dr} - r^{s+1}\frac{d\xi}{dx} = \Sigma\,\xi_n^m\left((s-n)\,r^{s-1}\,x\,V_n^m - r^{s+1}V_{n+1}^m\right)$$

$$\frac{d r^s y\eta}{dr} - r^{s+1}\frac{d\eta}{dy} = \Sigma\,\eta_n^m\left((s-n)\,r^{s-1}\,y\,V_n^m - r^{s+1}V_{n+1}^{m+1}\right)$$

$$\frac{d r^s z\zeta}{dr} - r^{s+1}\frac{d\zeta}{dz} = \Sigma\,\zeta_n^m\left((s-n)\,r^{s-1}\,z\frac{d}{dz}V_{n-1}^m + r^{s+1}\left(V_{n+1}^m + V_{n+1}^{m+2}\right)\right)$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen bekommt man auf der linken Seite:

$$\frac{d r^s\varrho}{dr} = \Sigma\frac{d r^{s-n-1}\varrho_n^m}{dr}\,r^{n+1}V_n^m.$$

Auf der rechten Seite werden die oben gefundenen Werthe von xV_n^m, yV_n^m und $z(d/dz)V_{n-1}^m$ eingesetzt, wonach an beiden Seiten die Coëfficienten von V_n^m einander gleich gesetzt werden. In dieser Weise findet man, wenn $s = n+1$ eingesetzt wird:

$$(20)\qquad \frac{2n-1}{2n+1}\frac{d\varrho_n^m}{r\,dr} + \xi_{n-1}^m + \eta_{n-1}^{m-1} - \zeta_{n-1}^m - \zeta_{n-1}^{m-2} = 0$$

und, wenn $s = -n$ gesetzt wird:

$$
(20)\quad \left\{\begin{array}{l}
\frac{2n+3}{2n+1} r^{2n+2} \frac{d}{dr} \frac{\varrho_n^m}{r^{2n+1}} + (m+2)(m+1)\xi_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)\xi_{n+1}^m \\
-(m+1)(2n-m+1)\eta_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1)\eta_{n+1}^{m-1} \\
-(m+2)(m+1)\zeta_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n + 1\right)\zeta_{n+1}^m \\
-(n-m+2)(n-m+1)\zeta_{n+1}^{m-2}
\end{array}\right\} = 0.
$$

Wenn in diesen Gleichungen die in den Gleichungen (15) gegebenen Werthe von ϱ_n^m, u. s. w. eingesetzt werden, so ergibt sich mittelst der Gleichungen (16):

$$
(22)\quad \left\{\begin{array}{l}
(2n-1)k_n^m + a_{n-1}^m + b_{n-1}^{m-1} - c_{n-1}^m - c_{n-1}^{m-2} = 0 \\
\frac{\mu}{2n+1} \varkappa_n^m + \alpha_{n-1}^m + \beta_{n-1}^{m-1} - \gamma_{n-1}^m - \gamma_{n-1}^{m-2} = 0.
\end{array}\right.
$$

$$
(23)\quad \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
-\frac{\mu}{2n+1} k_n^m + (m+2)(m+1) a_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right) a_{n+1}^m \\
-(m+1)(2n-m+1) b_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1) b_{n+1}^{m-1} \\
-(m+2)(m+1) c_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n + 1\right) c_{n+1}^m \\
-(n-m+2)(n-m+1) c_{n+1}^{m-2}
\end{array}\right\} = 0. \\
\left.\begin{array}{l}
-(2n+3)\varkappa_n^m + (m+2)(m+1)\alpha_{n+1}^{m+2} - \left((n+1)^2 - m^2\right)\alpha_{n+1}^m \\
-(m+1)(2n-m+1)\beta_{n+1}^{m+1} + (n-m+2)(n-m+1)\beta_{n+1}^{m-1} \\
-(m+2)(m+1)\gamma_{n+1}^{m+2} - \left((n-m)^2 + m^2 + n + 1\right)\gamma_{n+1}^m \\
-(n-m+2)(n-m+1)\gamma_{n+1}^{m-2}
\end{array}\right\} = 0.
\end{array}\right.
$$

Ausser diesen Beziehungen zwischen den Coëfficienten, die innerhalb jeder Schicht, in welcher μ constant ist, auch constant bleiben, müssen die zwischen den verschiedenen Coëfficienten je zweier angrenzender Schichten stattfindenden Beziehungen anfgesucht werden. Es seien die einer angrenzenden inneren Schicht entsprechenden Coëfficienten durch einen Accent bezeichnet. Alsdann geht aus den Gleichungen (5) und (6) hervor, wenn r der Halbmesser der Grenzfläche ist:

$$
(24)\quad \left\{\begin{array}{l}
k_n^m \frac{dr^{-n}\varphi_n}{dr} + \varkappa_n^m \frac{dr^{-n}\psi_n}{dr} = k_n'^m \frac{dr^{-n}\varphi_n'}{dr} + \varkappa_n'^m \frac{dr^{-n}\psi_n'}{dr}, \\
\mu(k_n^m \varphi_n + \varkappa_n^m \psi_n) = \mu'(k_n'^m \varphi_n' + \varkappa_n'^m \psi_n'),
\end{array}\right.
$$

indem φ_n' und ψ_n' die nämlichen Functionen wie φ_n und ψ_n, nur mit Aenderung von μ in μ', sind.

Wenn die Grenzfläche diejenige ist, die dem Mittelpunkte am nächsten liegt, so gehören die Coëfficienten k'^m_n und $\varkappa'^m_n$ der centralen Kugelschicht an. Es müssen aber hier alle Coëfficienten $\varkappa'^m_n$ verschwinden, da im entgegengesetzten Falle im Mittelpunkte selbst der Werth von ϱ unendlich sein würde, und aus den beiden Gleichungen (24) kann ferner k'^m_n eliminirt werden. Von hier aus kann zur nächsten Grenzfläche gegangen werden und so weiter, woraus hervorgeht, dass für jede beliebige Schicht eine Gleichung:

$$\varkappa^m_n = p_n k^m_n \tag{25}$$

gefunden werden kann, indem p_n eine allein von n und von den Werthen, die μ und die Halbmesser der Grenzflächen innerhalb der betrachteten Schicht durchlaufen, abhängige Function ist.

Ebenfalls ergeben sich aus den Gleichungen (8), (9) und (10) durch Einsetzung der Reihenentwicklungen und Vergleichung der Coëfficienten von V^m_n sechs Gleichungen, die sich mittelst der Gleichungen (20) und (21) auf die folgenden zwei Grenzbedingungen zurückführen lassen:

$$\left[m\left(\xi^m_n - \zeta^m_n\right) - (n-m+1)\left(\eta^{m-1}_n - \zeta^{m-2}_n\right)\right] = 0$$

$$\left[\frac{d}{dr}\left(m\left(\xi^m_n - \zeta^m_n\right) - (n-m+1)\left(\eta^{m-1}_n - \zeta^{m-2}_n\right)\right)\right] = 0.$$

Wird zur Abkürzung:

$$\left\{\begin{aligned} m\left(a^m_n - c^m_n\right) - (n-m+1)\left(b^{m-1}_n - c^{m-2}_n\right) &= s^m_n, \\ m\left(\alpha^m_n - \gamma^m_n\right) - (n-m+1)\left(\beta^{m-1}_n - \gamma^{m-2}_n\right) &= \sigma^m_n \end{aligned}\right. \tag{26}$$

gesetzt, so bekommt man mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$\left\{\begin{aligned} s^m_n \varphi_n + \sigma^m_n \psi_n &= s'^m_n \varphi'_n + \sigma'^m_n \psi'_n \\ s^m_n \frac{d\varphi_n}{dr} + \sigma^m_n \frac{d\psi_n}{dr} &= s'^m_n \frac{d\varphi'_n}{dr} + \sigma'^m_n \frac{d\psi'_n}{dr}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

woraus in ganz ähnlicher Weise wie oben die Gleichung:

$$\sigma^m_n = q_n s^m_n \tag{28}$$

hervorgeht, indem q_n allein von n und von den Werthen von μ und r innerhalb der betrachteten Schicht abhängig ist.

Ich gehe jetzt zur Untersuchung der Lichtbewegungen im Inneren eines isotropen Körpers über, indem ich, wie schon in der Einleitung bemerkt, die Atome als Punkte betrachte, um welche sich bis zu einer gewissen Entfernung das Lichtmedium in concentrischen Schichten lagert, während ausserhalb dieser Entfernung, die kleiner angenommen wird als die Hälfte der mittleren Entfernung zweier Nachbaratome, die Geschwindigkeit des Lichtes derjenigen des leeren Raumes gleich ist.

Es sei 2δ die mittlere Entfernung zweier Nachbaratome. In der Entfernung δ von einem der Atome seien die Schwingungen des Lichtes parallel zur y-Axe, und die Bewegung pflanze sich in der Richtung der x-Axe fort. Ich nehme demnach:

$$\text{(29)} \qquad \text{für } r = \delta, \quad \xi = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta = e^{(kt - lx)i} F$$

an, indem F eine Function ist, die sich periodisch von einem Atom zum anderen wiederholt. Die letztere Formel stellt also eine Wellenbewegung dar, die sich mit der Geschwindigkeit k/l im Körper fortpflanzt.

Betrachten wir, um die Eigenschaften der Function F festzustellen, zwei um 2δ voneinander entfernte Atome. Eine durch diese Atome gezogene Gerade schneide die beiden sich tangirenden Kugelflächen, deren Mittelpunkte die Atome sind, und deren Halbmesser gleich δ ist, in den Punkten A, B und C. Die Werthe der Function F in dieser Geraden können alsdann durch eine Curve dargestellt werden, welche von A bis B und von B bis C sich genau wiederholt, in der Weise, dass F in A und B gleiche Werthe hat, und dass die Tangenten der Curve in A und B parallel sind. Da r positiv zu beiden Seiten des Mittelpunktes gerechnet wird, so müssen also die Werthe von dF/dr in A und B gleich gross, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen gerechnet werden.

Wir haben:

$$e^{kti} F = e^{lxi} \eta = e^{lxi} \Sigma \eta_n^m V_n^m,$$

in welcher Reihe die Glieder in zwei diametral entgegengesetzten Punkten gleich gross und mit denselben Vorzeichen

für gerade n, mit entgegengesetztem Vorzeichen für ungerade n versehen sind. Man bekommt demnach für $r = \delta$:

$$e^{lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right)$$
$$= e^{-lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right)$$
$$\frac{d}{dr}\left(e^{lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right)\right.$$
$$\left.+ e^{-lxi}\Sigma\left(\eta_{2n}^m V_{2n}^m - \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m\right)\right) = 0,$$

welche Gleichungen in:

$$(30)\begin{cases}\left(e^{lxi} - e^{-lxi}\right)\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \left(e^{lxi} + e^{-lxi}\right)\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0,\\ \left(e^{lxi} + e^{-lxi}\right)\frac{d}{dr}\Sigma\eta_{2n}^m V_{2n}^m + \left(e^{lxi} - e^{-lxi}\right)\frac{d}{dr}\Sigma\eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0\end{cases}$$

umgestaltet werden können.

Diese für den Tangirungspunkt B geltenden Gleichungen sind überhaupt für alle Punkte, in welchen die Kugelfläche $r = \delta$ von einer anderen ähnlichen tangirt wird, gültig. Da indessen diese Tangirungspunkte zufällig liegen und in den isotrop angenommenen Körper mit gleicher Wahrscheinlichkeit in allen Punkten der Kugelfläche liegen können, so betrachte ich die Gleichungen als für alle Punkte der Kugelfläche $r = \delta$ gültig.

Für die weitere Behandlung der obigen Gleichungen ist es von Wichtigkeit, zu bemerken, dass lx als eine sehr kleine Grösse betrachtet werden kann. Dieser Umstand ist auch von Helmholtz[1]) benutzt worden, indem er in seiner Dispersionstheorie die Annahme gemacht hat, dass „die Entfernungen der ponderablen Theile voneinander verschwindend klein gegen die Wellenlängen sind.“ In der That ist man bekanntlich auf sehr verschiedenen Wegen dahin gelangt, sich wenigstens einen Begriff von diesen Entfernungen zu machen. Es mag z. B. für Wasser eine Wellenlänge des sichtbaren Lichtes gegen 10000 mal grösser sein als δ, und für die Gase, selbst bei der grössten Verdünnung, bei welcher überhaupt die Dispersion messbar ist, mag die Wellenlänge die Grösse δ noch um mehrere hundert mal übersteigen.

1) Helmholtz, Pogg. Ann. **154.** p. 584. 1875.

Nun ist aber:

$$N = \frac{lO}{k}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} O, \qquad l = \frac{2\pi}{\lambda} N,$$

wenn durch N der Brechungscoëfficient des Körpers, durch O die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume und durch λ die ebenfalls auf den leeren Raum bezogene Wellenlänge bezeichnet werden. Aus der letzteren Gleichung ersieht man, dass lx, welche Grösse in den obigen Formeln $l\delta$ nicht übersteigen kann, eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie δ/λ sein muss.

Ferner hat man, wenn für $r = \delta$ μ durch μ_δ bezeichnet wird:

$$\mu_\delta = \frac{k^2}{O^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}, \qquad \text{daher:} \qquad N^2 = \frac{l^2}{\mu_\delta}. \tag{31}$$

Wird also $l\delta$ als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet, so ist $\mu_\delta \delta^2$ eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, während N^2 das Verhältniss zweier unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung ist.

Indem also lx als eine unendlich kleine Grösse betrachtet wird, so ergibt sich aus den Gleichungen (30):

$$lxi \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \Sigma \eta_{2n}^m V_{2n}^m + lxi \frac{d}{dr} \Sigma \eta_{2n+1}^m V_{2n+1}^m = 0.$$

Mittelst der ersten der Gleichungen ergibt sich hieraus durch Vergleichung der Coëfficienten von V_{2n}^m und V_{2n+1}^m:

$$\left\{\begin{aligned} & li\left(-\frac{r^2}{4n+1}\eta_{2n}^m - \frac{(2n+2)^2 - m^2}{4n+5}\eta_{2n+2}^m \right. \\ & \qquad \left. + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+5}\eta_{2n+2}^{m+2}\right) + \eta_{2n+1}^m = 0, \\ & lir\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+2}}\left(-\frac{r^2}{4n-1}\eta_{2n-1}^m - \frac{(2n+1)^2 - m^2}{4n+3}\eta_{2n+1}^m \right. \\ & \qquad \left. + \frac{(m+2)(m+1)}{4n+3}\eta_{2n+1}^{m+2}\right) + \frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n+1}}\eta_{2n}^m = 0, \end{aligned}\right. \tag{32}$$

in welchen Gleichungen $r = \delta$ ist.

Wenn $n = 0$, $m = 0$ gesetzt wird, so bekommt man für $r = \delta$:

$$(33)\quad \begin{cases} li\left(-r^2\eta_0{}^0 - \frac{4}{5}\eta_2{}^0 + \frac{2}{5}\eta_2{}^2\right) + \eta_1{}^0 = 0 \\ -\frac{1}{3} lir \frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\eta_1{}^0 + \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\eta_0{}^0 = 0. \end{cases}$$

Da $r^2\eta_0{}^0$ willkürlich als eine endliche Grösse betrachtet werden kann, so werden die in der ersten Gleichung vorkommenden Grössen $\eta_2{}^0$ und $\eta_2{}^2$ nur insofern Bedeutung haben, als sie endlich sind. Wenn deshalb in der zweiten Gleichung (32) $n = 1$, $m = 0$ und $m = 2$ gesetzt wird, so fällt das erste, den Factor lr enthaltene Glied weg, wonach man für $r = \delta$:

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\eta_2{}^0 = 0. \qquad \frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\eta_2{}^2 = 0$$

bekommt. Durch Einsetzung der constanten Coëfficienten der Gleichungen (15) ergibt sich hieraus mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen, für die der äussersten Schicht bis $r = \delta$ entsprechenden Constanten:

$$2b_2{}^0\delta^5 = 3\beta_2{}^0, \qquad 2b_2{}^2\delta^5 = 3\beta_2{}^2.$$

Für dieselbe Schicht hat man der beiden ersten Gleichungen (29) zufolge:

$$a_2{}^1\delta^5 + \alpha_2{}^1 = 0, \qquad c_2{}^1\delta^5 + \gamma_2{}^1 = 0.$$

Wenn ferner in der zweiten der Gleichungen (22) $n = 3$, $m = 1$ und $m = 3$ eingesetzt wird, so bekommt man mit Vernachlässigung des ersten unendlich kleinen Gliedes:

$$\alpha_2{}^1 + \beta_2{}^0 - \gamma_2{}^1 = 0, \qquad \beta_2{}^2 - \gamma_2{}^1 = 0,$$

während aus den Gleichungen (23) für $n = 1$, $m = 1$

$$-3a_2{}^1 - 4b_2{}^2 + 2b_2{}^0 - 3c_2{}^1 = 0$$
$$-5\varkappa_1{}^1 - 3\alpha_2{}^1 - 4\beta_2{}^2 + 2\beta_2{}^0 - 3\gamma_2{}^1 = 0,$$

erhalten wird. Diese acht Gleichungen genügen indess nicht, um die acht Constanten durch $\varkappa_1{}^1$ auszudrücken, indem sich zeigt, dass dieselben eine Identität enthalten. Es geht indessen aus den Gleichungen (26) und (28) für $n = 2$, $m = 1$:

$$s_2{}^1 = a_2{}^1 - c_2{}^1 - 2b_2{}^0, \qquad \sigma_2{}^1 = \alpha_2{}^1 - \gamma_2{}^1 - 2\beta_2{}^0, \qquad \sigma_2{}^1 = q_2 s_2{}^1,$$

hervor, woraus sich mittelst der obigen Gleichungen:

$$s_2{}^1\delta^5 = -2\beta_2{}^0, \qquad \sigma_2{}^1 = -3\beta_2{}^0, \qquad \text{also:} \quad 3\beta_2{}^0\delta^5 = 2\beta_2{}^0 q_2$$

ergibt. Da aber q_2 allein von den Werthen abhängt, welche μ und die Halbmesser der Grenzflächen innerhalb der äussersten

Schicht annehmen, so muss $\beta_2^0 = 0$ sein. Wir erhalten demnach aus den obigen Gleichungen:

$$b_2^0 = 0, \quad \beta_2^0 = 0, \quad b_2^2 \delta^5 = \tfrac{2}{5} \beta_2^2 = -\tfrac{1}{5} \varkappa_1^1.$$

Wenn ferner in den Gleichungen (22) $n = 1$, $m = 1$ eingesetzt wird, so ergibt sich allgemein:

$$k_1^1 + b_0^0 = 0, \quad \tfrac{1}{3} \mu \varkappa_1^1 + \beta_0^0 = 0.$$

Man hat also für die hier betrachtete äusserste Schicht, in welcher μ gleich μ_s ist, wenn die kleinen Grössen zweiter Ordnung berücksichtigt werden:

$$\eta_0^0 = -k_1^1 (r - \tfrac{1}{6} \mu_s r^3) - \tfrac{1}{3} \mu_s \varkappa_1^1.$$

In dieser Weise können die Gleichungen (33) in:

$$li (k_1^1 \delta^3 - \tfrac{1}{2} \varkappa_1^1) + b_1^0 \delta^3 + \beta_1^0 = 0$$

$$- li (b_1^0 \delta^3 - 2 \beta_1^0) + \mu_s (k_1^1 \delta^3 + \varkappa_1^1) = 0$$

umgestaltet werden. Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{l^2}{\mu_s} = N^2 = \frac{k_1^1 \delta^3 + \varkappa_1^1}{k_1^1 \delta^3 - \frac{1}{2} \varkappa_1^1} \cdot \frac{b_1^0 \delta^3 + \beta_1^0}{b_1^0 \delta^3 - 2 \beta_1^0}.$$

Nun ist der Gleichung (25) zufolge:

$$\varkappa_1^1 = p_1 k_1^1.$$

Ferner ist nach (29) für $r = \delta$, $\xi_1^1 = 0$, also mit Weglassung der unendlich kleinen Grössen:

$$a_1^1 \delta^3 + \alpha_1^1 = 0.$$

Wenn dann in die zweite Gleichung (22) $n = 2$, $m = 1$ eingesetzt wird, so bekommt man mit Weglassung des ersten unendlich kleinen Gliedes zweiter Ordnung für die äusserste Schicht:

$$\alpha_1^1 + \beta_1^0 = 0,$$

während aus den Gleichungen (26) und (28) für $n = 1$, $m = 1$:

$$a_1^1 - b_1^0 = s_1^1, \quad \alpha_1^1 - \beta_1^0 = \sigma_1^1, \quad \sigma_1^1 = q_1 s_1^1,$$

hervorgeht. Es folgt hieraus:

$$\frac{\beta_1^0}{b_1^0} = \frac{q_1 \delta^3}{q_1 + 2 \delta^3}.$$

Der Brechungscoëfficient N wird also durch die einfache Gleichung:

$$(34) \qquad N^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2} p_1} \cdot \frac{\delta^3 + q_1}{\delta^3 - \frac{1}{2} q_1}$$

bestimmt, wo p_1 und q_1 zwei von δ unabhängige Functionen sind.

Wir haben in der innerhalb $r = \delta$ liegenden äusseren Schicht μr^2 als eine unendlich kleine Grösse betrachtet, in

anderen Schichten aber muss diese Grösse einen endlichen Werth annehmen, wenn überhaupt eine Brechung im Körper stattfinden soll. Nehmen wir an, dass μr^2 innerhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ endlich werde, dann ergibt sich aus der zweiten Gleichung (24):

$$\text{für } r = \varepsilon, \quad 0 = k'^m_n \varphi'_n + \varkappa'^m_n \psi'_n ,$$

während der Gleichung (25) zufolge $k'^m_n = p'_n k'^m_n$, wo p'_n von ε unabhängig ist. Man wird also $k'^m_n = 0$ und $\varkappa'^m_n = 0$ haben, dass heisst, die Schwingungen sind innerhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ senkrecht zum Radius. Es leuchtet dies auch unmittelbar ein, indem unsere Voraussetzungen mit der Annahme identisch sind, dass die Geschwindigkeit des Lichtes in der Grenzfläche $r = \varepsilon$ von einem unendlich grossen in einem endlichen Werth übergeht, wodurch alle einfallende Lichtstrahlen gegen den Mittelpunkt gebrochen und die Schwingungen demnach senkrecht zum Radius werden müssen.

Es ergibt sich alsdann aus der ersten der Gleichungen (24) für $n = 1$, $m = 1$:

$$k_1{}^1 . 2\varepsilon - \frac{\varkappa_1{}^1}{\varepsilon^2} = 0, \qquad \text{also:} \qquad p_1 = 2\varepsilon^3.$$

Man kann demnach p_1 annäherungsweise als eine mit dem Volumen des in der Nähe der Atome stark geänderten Lichtmittels proportionale, von der Brechung desselben aber unabhängige Grösse ansehen.

Die zweite in die Gleichung (34) eingehende Grösse q_1 ist aus den Gleichungen (27) und (28) zu berechnen.

In welcher Weise q_1 von der Wellenlänge abhängig ist, werde ich zunächst durch ein Beispiel zu beleuchten versuchen. Ich nehme an, dass μ ausserhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ gleich 0 ist, innerhalb derselben aber überall endlich und constant gleich μ'. In den Gleichungen (27) ist alsdann $\sigma'^m_n = 0$, und mit Weglassung des oberen Index m bekommt man, wenn $n = 1$ gesetzt wird:

$$s_1 \varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1'(\varepsilon^3 - \tfrac{1}{10}\mu'\varepsilon^5 + \cdots),$$
$$3 s_1 \varepsilon^2 \quad = s_1'(3\varepsilon^2 - \tfrac{1}{2}\mu'\varepsilon^4 + \cdots).$$

Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = \tfrac{1}{15}\mu' \varepsilon^5 + \cdots = \frac{a}{\lambda^2} + \cdots$$

Vorausgesetzt, dass die Reihenentwickelung convergent ist, lässt sich also q_1 in einer Reihe nach steigenden Potenzen von $1/\lambda^2$ entwickeln, und das erste Glied a/λ^2 der Reihe ist positiv.

Wenn ganz allgemein μ als eine endliche und stetig variable Function betrachtet wird, so muss zu der Differentialgleichung (13) zurückgegangen werden, aus welcher Gleichung die Grenzbedingungen (27) abgeleitet werden können. Nehmen wir wie oben $r = \varepsilon$ als Grenze an, ausserhalb welcher $\mu = 0$ gesetzt werden kann, so hat man die Aufgabe, die Differentialgleichung unter den Bedingungen zu integriren, dass für $r = 0$ $f_n = 0$ und für $r = \varepsilon$ $f_n = s_n(r^{2n+1} + q_n)$, $df_n/dr = (2n+1)s_n r^{2n}$ werden. Nach Elimination der beiden arbiträren Constanten erhält man aus diesen drei Gleichungen eine Endgleichung zur Bestimmung von q_n. Wenn nun vorausgesetzt wird, dass f_n sich überall in einer convergenten Reihe nach Potenzen des in μ eingehenden Factors $1/\lambda^2$ entwickeln lässt, so kann man leicht einsehen, dass q_n sich allgemein in einer Reihe $a/\lambda^2 + b/\lambda^4 + \cdots$ entwickeln lässt.

Wenn also durch A der einer grossen Wellenlänge oder $q_1 = 0$ entsprechende Brechungscoëfficient bezeichnet wird, so bekommt man mittelst der Gleichung (34):

$$(35)\quad A^2 = \frac{\delta^3 + p_1}{\delta^3 - \frac{1}{2}p_1}, \quad \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}p_1, \quad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2}\delta^3 = \tfrac{1}{2}q_1.$$

Als Resultat dieser Untersuchung ergibt sich, dass die Gesetze der Brechung in einem durchsichtigen, isotropen Körper mit gewöhnlicher Dispersion durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt werden können:

$$\frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}\cdot\frac{1}{d} = R, \quad \frac{N^2 - A^2}{N^2 + 2A^2}\cdot\frac{1}{d} = D = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \cdots$$

wo N der Brechungscoëfficient, d die Dichtigkeit, R und D zwei von der Dichtigkeit des Körpers unabhängige Constanten sind. Ferner ist durch a eine positive Constante und, wie aus den Gleichungen selbst hervorgeht, durch A der dem $\lambda = \infty$ entsprechende Brechungscoëfficient bezeichnet.

Die erstere Gleichung habe ich schon vor 14 Jahren[1]) in ganz anderer Weise theoretisch abgeleitet, und es hat sich bekanntlich später die Richtigkeit dieses Gesetz vielfach bestätigt. Aus meinen eigenen Versuchen über die Brechung einiger Flüssigkeiten und deren Dämpfe habe ich die folgenden, der Natriumlinie entsprechenden „Dispersionsconstanten" D berechnet, wobei A mittelst der einfachen Formel $N^2 = A^2 + b/\lambda^2$ bestimmt ist:

	Flüssigkeit bei 10°	Dampf bei 100°
Alkohol	0,00585	0,00644
Aethyläther	636	623
Chloroform	413	409
Aethyljodid	551	579
Schwefelkohlenstoff . .	1615	1732
Essigäther	536	550

Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von D kann als eine sehr befriedigende betrachtet werden.

Wenn die Reihenentwickelungen (14) der Functionen φ_1 und ψ_1 nicht brauchbar sind, so können diese Functionen, wenn zur Abkürzung $\mu = \alpha^2$ gesetzt wird, durch:

$$\varphi_1 = 3\,\frac{\sin\alpha r - \alpha r\cos\alpha r}{\alpha^3}, \qquad \psi_1 = \cos\alpha r + \alpha r \sin\alpha r,$$

ausgedrückt werden. Es sei z. B. $\mu = 0$ ausserhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon$ und $\mu = \alpha^2$ überall innerhalb dieser Grenzfläche, dann hat man:

$$s_1\varepsilon^3 + \sigma_1 = s_1'\,3\,\frac{\sin\alpha\varepsilon - \alpha\varepsilon\cos\alpha\varepsilon}{\alpha^3},$$

$$3\,s_1\varepsilon^2 = s_1'\,\frac{3\varepsilon}{\alpha}\sin\alpha\varepsilon,$$

woraus: $$\frac{\sigma_1}{s_1} = q_1 = -\varepsilon^3 - \frac{3\varepsilon^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{\alpha^2}$$

gefunden wird. Wenn also die Wellenlänge λ und somit auch α alle Werthe durchläuft, so kann q_1 jeden beliebigen reellen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Der

1) L. Lorenz, Vidensk. Selsk. Skrifter. 5. Reihe. 8. p. 205. Kopenhagen 1869. Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

zweiten Gleichung (35) zufolge wird also auch bei gewissen Werthen von λ N^2 negativ und somit N imaginär, was in dieser Rechnung mit einer Absorption gleichbedeutend ist.

Wenn angenommen wird, dass innerhalb der Grenzfläche $r = \varepsilon\mu$ endlich und die Reihen convergent sind, während erst in einer sehr kleinen Entfernung vom Mittelpunkte die Divergenz eintritt, so wird die Absorption nur bei bestimmten Wellenlängen eintreten, in der Weise, dass wir ein gewöhnliches, mit Absorptionslinien begleitetes Dispersionsspectrum bekommen.

Während also diese Theorie den Fall einer Absorption nicht ausschliesst, so kann auf der anderen Seite eine unvollkommene Absorption, in welcher N die complexe Form $a + bi$ annimmt, nicht aus unseren Voraussetzungen abgeleitet werden. Wenn deshalb auch die Gesetze der anomalen Dispersion theoretisch abgeleitet werden sollen, so muss zunächst die Berechnung auf ein den zusammengesetzten Körpern und Mischungen entsprechendes System von Atomen ausgedehnt werden. Alsdann wird es sich erst zeigen, ob man genöthigt sein wird, die Grundlage selbst der Theorie dahin abzuändern, dass μ als eine complexe Variable aufgefasst wird, was dem Falle entpricht, dass noch eine erste Derivirte der Componenten nach t zu den Gliedern der ursprünglichen Differentialgleichungen der Lichtbewegungen hinzugefügt wird. Es würden alsdann die Gleichungen die nämliche Form annehmen, wie ich es schon in meinem Aufsatze über die Identität der Schwingungen des Lichtes mit den electrischen Strömen[1]) angegeben habe. Ueberhaupt ist, wenn die Möglichkeit einer Berechnung der Lichtbewegungen im Inneren der Körper gegeben ist, für die ferneren Untersuchungen ein weites Feld offen.

---

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. **131.** p. 243. 1867.

II. *Ueber die elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Körpern;* *von A. C. van Ryn van Alkemade.*

Einleitung.

Die bekannten Formeln Fresnel's für die Intensitätsänderungen des parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes bei der Reflexion an der Oberfläche durchsichtiger Körper:

$$a_p = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \qquad a_s = -\frac{\operatorname{tg}(i-r)}{\operatorname{tg}(i+r)},$$

sind in mannichfacher Weise von der Erfahrung bestätigt worden. Jedoch widersprechen einige Folgerungen aus denselben späteren Versuchen.

Infolge dessen hat Cauchy, namentlich mit Rücksicht auf die Versuche Jamin's, für das Amplitudenverhältniss a_s/a_p und den Phasenunterschied d folgende Ausdrücke aufgestellt:

$$\left(\frac{a_s}{a_p}\right)^2 = \frac{\cos^2(i+r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i-r)},$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\frac{d}{\lambda} = \frac{\varepsilon \sin i\,[\operatorname{tg}(i+r) - \operatorname{tg}(i-r)]}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 i \operatorname{tg}(i+r)\operatorname{tg}(i-r)},$$

welche die Beobachtungen in befriedigender Weise darstellten. Eine einfache Ableitung dieser Formeln ist von Eisenlohr gegeben worden[1]), er hat darin gezeigt, dass je nach der Fortpflanzungsart, welche man für die Longitudinalschwingungen annimmt, statt $\varepsilon \sin i$ in den Formeln Cauchy's, entweder eine Constante oder eine Grösse von der Form:

$$\frac{2u \sin i}{t\sqrt{\sin^2 i + t^2}}$$

gesetzt werden muss. Die drei Formeln, welche man so erhält, können fast alle gleich gut mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung gebracht werden; in allen bleibt aber die Bedeutung der Constanten unbestimmt. Da sich nun in der letzten Zeit mehr und mehr die electromagnetische

1) Eisenlohr, Pogg. Ann. **104.** p. 337. 1858.

Theorie des Lichtes als richtig erweist, habe ich derartige Formeln auch aus dieser Theorie abgeleitet. Die darin vorkommenden Constanten haben eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung.

Ausser den Longitudinalschwingungen übt ohne Zweifel noch ein zweiter Umstand auf die Reflexion Einfluss aus, nämlich ein allmählicher Uebergang zwischen den beiden Medien, an deren Grenze das Licht reflectirt wird, während die gewöhnliche Theorie eine scharfe Trennung zwischen ihnen annimmt. Dieser Einfluss ist schon von L. Lorenz[1]) behandelt worden, er hat aber keine bestimmten Formeln für Phasenunterschied und Amplitudenverhältniss abgeleitet. Ich habe es versucht, auch in dieser Hinsicht die Theorie zu vervollständigen, und im Anschluss zu dem schon genannten Einfluss der Longitudinalschwingungen dabei die electromagnetische Theorie zu Grunde gelegt. In meiner Dissertation[2]) habe ich aber gezeigt, dass man unabhängig von jeder Theorie des Lichtes zu ganz denselben Formeln gelangen kann. Dieselben gestatten, mittelst der Beobachtungen Jamin's eine Bestimmung der Dicke der Grenzschicht, in welcher der allmähliche Uebergang stattfindet. Der Werth derselben ist von derselben Grössenordnung wie der Radius der Wirkungssphäre, was als eine Stütze für die Theorie zu betrachten ist, weil die beiden Grössen in engem Zusammenhange stehen.

§ 1. Die Bewegungsgleichungen der Electricität für einen vollkommenen Isolator sind von Helmholtz in folgender Form aufgestellt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\zeta}{\varepsilon}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\eta}{\varepsilon}\right) = A(1 + 4\pi\vartheta)\dfrac{\partial L}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\zeta}{\varepsilon}\right) = A(1 + 4\pi\vartheta)\dfrac{\partial M}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\eta}{\varepsilon}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right) = A(1 + 4\pi\vartheta)\dfrac{\partial N}{\partial t}, \end{cases}$$

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 111. p. 315. 1860.

2) A. C. van Ryn van Alkemade, Over de elliptische polarisatie bij de tergkaatsing van het licht door doorschijnende middenstoffen. 's Gravenhage 1882.

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\eta}{\varepsilon}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\zeta}{\varepsilon}\right)=-\Delta\varphi+A^2k\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2},\\[2ex]
\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial z}=A\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}-4\pi\dfrac{\partial\xi}{\partial t}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=A\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}-4\pi\dfrac{\partial\eta}{\partial t}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=A\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}-4\pi\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial L}{\partial x}+\dfrac{\partial M}{\partial y}+\dfrac{\partial N}{\partial z}=0.
\end{cases}
$$

Zu diesen Gleichungen gehören noch folgende Bedingungsgleichungen, welche an der Grenze zweier Isolatoren erfüllt sein müssen:

$$
(2)\quad \begin{cases}
\dfrac{\xi_1}{\varepsilon_1}+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1=\dfrac{\xi_2}{\varepsilon_2}+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2, & L_1+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial x}\right)_1=L_2+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial x}\right)_2,\\[2ex]
\dfrac{\eta_1}{\varepsilon_1}+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_1=\dfrac{\eta_2}{\varepsilon_2}+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_2, & M_1+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1=M_2+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial y}\right)_2,\\[2ex]
\dfrac{\zeta_1}{\varepsilon_1}+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_1=\dfrac{\zeta_2}{\varepsilon_2}+\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_2, & N_1+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)_1=N_2+\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial z}\right)_2.
\end{cases}
$$

Hierin bedeuten ξ, η, ζ die Componenten der dielectrischen Polarisation; L, M, N diejenigen der magnetisirenden Kraft, φ die electrische, χ die magnetische Potentialfunction, ε die Constante der dielectrischen, ϑ die der magnetischen Polarisation, während k die unbekannte Constante ist, welche in der Helmholtz'schen Formel für die Induction zweier Stromelemente auftritt. Diesen Gleichungen entspricht eine Fortpflanzung electrischer Schwingungen in ebenen Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v der transversalen und V der longitudinalen Schwingungen sind:

$$
v=\frac{1}{A\sqrt{4\pi\varepsilon(1+4\pi\vartheta)}},\qquad V=\frac{1}{A}\sqrt{\frac{1+4\pi\varepsilon}{4\pi\varepsilon k}}.
$$

Denken wir uns nun zwei homogene Medien, getrennt durch eine Ebene, welche wir zur yz-Ebene wählen. Die positive x-Axe sei nach der Seite des zweiten Mediums gerichtet. Dann können die Grenzbedingungen (2) mit Hülfe bekannter Eigenschaften aus der Theorie der Electricität in folgende Form gebracht werden:

$$(4)\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\xi_1 = \dfrac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\xi_2, & \dfrac{\eta_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\eta_2}{\varepsilon_2}, & \dfrac{\zeta_1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\zeta_2}{\varepsilon_2}, \\ (1+4\pi\vartheta_1)L_1 = (1+4\pi\vartheta_2)L_2, & M_1 = M_2, & N_1 = N_2. \end{array}\right.$$

Dazu kommt noch die Stetigkeit von φ und χ.

Im Nachstehenden werden wir, um die Sache etwas einfacher darzustellen, von den magnetischen Eigenschaften der Medien absehen, also $\vartheta = 0$ setzen, was um so mehr erlaubt ist, weil man wirklich gefunden hat, dass das Verhältniss $(1+4\pi\vartheta_1)/(1+4\pi\vartheta_2)$ wenig von der Einheit abweicht.

Wählen wir noch die Einfallsebene zur xz-Ebene, so kann ein Bündel homogenen polarisirten Lichtes, welches unter einen Winkel α_1 einfällt, und dessen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene stehen, mittelst folgender Ausdrücke dargestellt werden:

$$\xi = 0, \quad \eta = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1}{v_1} + p\right), \quad \zeta = 0,$$

$$L = 4\pi A v_1 \sin\alpha_1\,\eta, \quad M = 0, \quad N = -4\pi A v_1 \cos\alpha_1\,\eta, \quad \varphi = 0.$$

Dass diese Ausdrücke den Bewegungsgleichungen entsprechen, sieht man leicht, wenn man sie auf den betrachteten Fall anwendet und ausserdem ε als constant annimmt, weil die beiden Medien homogen sind. Im Folgenden wird es aber bequemer sein, eine complexe Form anzuwenden, deren reeller Theil die ebengenannte Lösung ist. Dann wird das einfallende Licht bestimmt durch folgende Ausdrücke:

$$(5)\left\{\begin{array}{l} [\eta_1] = e^{-i\psi_1} \\ [L_1] = 4\pi A v_1 \sin\alpha_1\, e^{-i\psi_1} \\ [N_1] = -4\pi A v_1 \cos\alpha_1\, e^{-i\psi_1} \end{array}\right\} \psi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1}{v_1} + p\right).$$

Solange ψ_1 reell bleibt, ist es gleichgültig, ob man $e^{+i\psi_1}$ oder $e^{-i\psi_1}$ statt $\cos\psi_1$ setzt; werden aber, wie es später vorkommen wird, $\cos\alpha_1$ oder $\sin\alpha_1$ imaginär, so muss das Vorzeichen von ψ_1 so gewählt werden, dass der reelle Exponentialfactor, der dann in $e^{\pm i\psi_1}$ auftritt, in der Fortpflanzungsrichtung immer kleiner wird.

Gleichfalls haben wir für das zurückgeworfene Licht:

$$(6)\left\{\begin{array}{l} [\eta_1'] = a_1\, e^{-i\psi_1'} \\ [L_1'] = 4\pi A v_1 a_1 \sin\alpha_1'\, e^{-i\psi_1'} \\ [N_1'] = 4\pi A v_1 a_1 \cos\alpha_1'\, e^{-i\psi_1'} \end{array}\right\} \psi_1' = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x\cos\alpha_1' - z\sin\alpha_1'}{v_1} + p\right),$$

für das gebrochene:

$$(7)\begin{cases}[\eta_2] = a_2\, e^{-i\psi_2} \\ [L_2] = 4\pi A v_2 a_2 \sin\alpha_2\, e^{-i\psi_2} \\ [N_2] = -4\pi A v_2 a_2 \cos\alpha_2\, e^{-i\psi_2}\end{cases} \psi_2 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha_2 + z\sin\alpha_2}{v_2} + p\right).$$

Die Grösse p, welche die Phase bestimmt, ist für die drei Lichtbündel gleichgesetzt, weil eine Phasenänderung sich von selbst aus den Formeln, die wir für a_1 und a_2 finden werden, ergeben wird. Die gewöhnlichen Gesetze der Reflexion und Brechung geben hier folgende Relationen:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_1', \qquad \frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2};$$

daraus ergibt sich, dass für $x = 0$ der Werth von ψ für die drei Lichtbündel derselbe wird. Weiter ist überall:

$$\xi = \zeta = M = \varphi = 0,$$

und damit haben wir allen Grenzbedingungen Genüge geleistet ausser denen, die sich auf η, L und N beziehen. Die Stetigkeit von η/ε gibt nun für $x = 0$:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} e^{-i\psi_1} + \frac{a_1}{\varepsilon_1} e^{-i\psi_1'} = \frac{a_2}{\varepsilon_2} e^{-i\psi_2}, \quad \text{also:}$$

$$(8) \qquad \frac{1 + a_1}{\varepsilon_1} = \frac{a_2}{\varepsilon_2}.$$

Die von L ergibt:

$$v_1 \sin\alpha_1\, e^{-i\psi_1} + a_1 v_1 \sin\alpha_1\, e^{-i\psi_1'} = a_2 v_2 \sin\alpha_2\, e^{-i\psi_2},$$

oder:

$$(9) \qquad (1 + a_1) v_1 \sin\alpha_1 = a_2 v_2 \sin\alpha_2$$

und endlich die von N:

$$(10) \qquad (1 - a_1) v_1 \cos\alpha_1 = a_2 v_2 \cos\alpha_2.$$

Leicht überzeugt man sich, dass (8) und (9) dasselbe ausdrücken; es folgt nämlich aus (3) dass:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

und aus dem Brechungsgesetze, dass:

$$\frac{v_1 \sin\alpha_1}{v_2 \sin\alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{ist.}$$

Aus (9) und (10) kann, nach Elimination von a_2, a_1 bestimmt werden; man findet dafür:

$$(11) \qquad a_1 = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Betrachten wir die Zurückwerfung polarisirten Lichtes, dessen Schwingungen parallel zur Einfallsebene vor sich gehen. Das einfallende Licht ist bestimmt durch die Formeln:

$$(12)\left\{\begin{array}{l}[\xi_1] = -\sin\alpha_1\, e^{-i\psi_1} \\ [\zeta_1] = \cos\alpha_1\, e^{-i\psi_1} \\ [M_1] = 4\pi A v_1\, e^{-i\psi_1}\end{array}\right\}\psi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1}{v_1} + p\right),$$

welche den Bewegungsgleichungen Genüge leisten. Das zurückgeworfene Licht kann folgenderweise dargestellt werden:

$$(13)\left\{\begin{array}{l}[\xi_1'] = -a_1\sin\alpha_1'\, e^{-i\psi_1'} \\ [\zeta_1'] = -a_1\cos\alpha_1'\, e^{-i\psi_1'} \\ [M_1'] = 4\pi A v_1 a_1\, e^{-i\psi_1'}\end{array}\right\}\psi_1' = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x\cos\alpha_1' - z\sin\alpha_1'}{v_1} + p\right).$$

Ausserdem können nun aber auch Longitudinalschwingungen auftreten, deren Componenten sind:

$$\left.\begin{array}{l}[\xi_1''] = -b_1\cos\beta_1\, e^{-i\psi_1''} \\ [\zeta_1''] = b_1\sin\beta_1\, e^{-i\psi_1''}\end{array}\right\}\psi_1'' = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x\cos\beta_1 - z\sin\beta_1}{V_1} + p\right).$$

Es tritt hier keine magnetisirende Kraft auf, wohl aber hat die Potentialfunction einen veränderlichen Werth, der mit Hülfe der Bewegungsgleichungen gefunden werden kann, nämlich:

$$[\varphi_1''] = -2iTV_1 b_1\, e^{-i\psi_1''}.$$

Für die Winkel α_1' und β_1 sind die spitzen genommen.

Im gebrochenen Licht sind ebenso die Transversal- und die Longitudinalschwingungen zu unterscheiden. Für die ersteren findet man:

$$(14)\left\{\begin{array}{l}[\xi_2] = -a_2\sin\alpha_2\, e^{-i\psi_2} \\ [\zeta_2] = a_2\cos\alpha_2\, e^{-i\psi_2} \\ [M_2] = 4\pi A v_2 a_2\, e^{-i\psi_2}\end{array}\right\}\psi_2 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha_2 + z\sin\alpha_2}{v_2} + p\right),$$

für die letzteren:

$$\left.\begin{array}{l}[\xi_2'] = b_2\cos\beta_2\, e^{-i\psi_2'} \\ [\zeta_2'] = b_2\sin\beta_2\, e^{-i\psi_2'} \\ [\varphi_2'] = -2iTV_2 b_2\, e^{-i\psi_2'} \\ [M_2'] = 0\end{array}\right\}\psi_2' = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\beta_2 + z\sin\beta_2}{V_2} + p\right).$$

Die Gesetze der Reflexion und Brechung geben hier:

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_1', \quad \frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\beta_1}{V_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\beta_2}{V_2},$$

daher wird der Werth von ψ für alle betrachteten Lichtbündel an der Grenzebene derselbe.

Zunächst folgt nun aus der Stetigkeit der Potentialfunction:

$$(15)\qquad b_1 V_1 = b_2 V_2 \text{ oder: } b_1 \sin\beta_1 = b_2 \sin\beta_2 .$$

Zweitens muss der Ausdruck $\left((1+4\pi\varepsilon)/\varepsilon\,\xi\right)$ an der Grenzebene stetig bleiben, daraus folgt:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\left[-(1+a_1)\sin\alpha_1 - b_1\cos\beta_1\right] \\ &= \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\left[-a_2\sin\alpha_2 + b_2\cos\beta_2\right]. \end{aligned}\right.$$

Drittens gibt dieselbe Bedingung für ζ/ε:

$$(17)\qquad \frac{1}{\varepsilon_1}\left[(1-a_1)\cos\alpha_1 + b_1\sin\beta_1\right] = \frac{1}{\varepsilon_2}\left[a_2\cos\alpha_2 + b_2\sin\beta_2\right].$$

Endlich folgt aus der Stetigkeit von M:

$$(18)\qquad (1+a_1)v_1 = a_2 v_2 \text{ oder: } (1+a_1)\sin\alpha_1 = a_2\sin\alpha_2 .$$

Man kann nun mittelst (15) und (18) a_2 und b_2 aus (16) und (17) eliminiren, dann gibt (16):

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)(1+a_1)\sin\alpha_1 = -b_1\sin\beta_1\left[\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\operatorname{ctg}\beta_1 + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\operatorname{ctg}\beta_2\right].$$

Ebenso geht (17) über in:

$$\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1 - \frac{1+a_1}{\varepsilon_2}\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\sin\alpha_1 = b_1\sin\beta_1\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Die Elimination von b_1 aus den beiden letzteren Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)^2(1+a_1)\sin\alpha_1 \\ &= \left[\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\operatorname{ctg}\beta_1 + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\operatorname{ctg}\beta_2\right]\left(\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1 - \frac{1+a_1}{\varepsilon_2}\frac{\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\sin\alpha_1\right), \end{aligned}$$

woraus a_1 entwickelt werden kann. Man findet so für diese Grösse:

$$(19)\qquad a_1 = \frac{1-q\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)}{1+q\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)}, \qquad \text{wo:}$$

$$q = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1}-\dfrac{1}{\varepsilon_2}}{\dfrac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\operatorname{ctg}\beta_1 + \dfrac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\operatorname{ctg}\beta_2}$$

gesetzt ist. Der Werth von β_1 und β_2 und damit auch derjenige von q hängen wesentlich ab von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalschwingungen, also von der unbekannten Constante k.

Unabhängig aber von dem Werthe dieser Constante kann man ein Resultat erhalten, wenn man die Hypothese einführt, dass ε im allgemeinen sehr gross ist. Dass dies wirklich erlaubt ist, wird in der electromagnetischen Theorie des Lichtes dargethan. Man kann dann $1/\varepsilon$ gegen die Einheit vernachlässigen; dadurch werden die Gleichungen sehr vereinfacht, und es zeigt sich, dass b_1 und b_2 von derselben Grössenordnung wie $1/\varepsilon_1$ und $1/\varepsilon_2$ werden, sodass bei erster Annäherung die Longitudinalschwingungen ausser acht gelassen werden dürfen. In dieser Weise erhält man für a_1 den Fresnel'schen Werth:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Will man diese Vereinfachung nicht durchführen und somit den Einfluss der Longitudinalschwingungen in die Berechnung aufnehmen, so muss man erst ermitteln, welche Form die Ausdrücke für diese Schwingungsart erhalten. Wir haben für die Longitudinalschwingungen im reflectirten Licht gesetzt $b_1 e^{-i\psi_1''}$, wo:

$$\psi_1'' = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x\cos\beta_1 - z\sin\beta_1}{V_1} + p\right) \text{ ist.}$$

Diesen Werth kann man wegen $\sin\beta_1 / V_1 = \sin\alpha_1 / v_1$ auch so schreiben:

$$b_1 e^{-i\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\beta_1}{V_1}x}\left[\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - z\frac{\sin\alpha_1}{v_1} + p\right) - i\sin\frac{2\pi}{T}\left(t - z\frac{\sin\alpha_1}{v_1} + p\right)\right].$$

Der Factor mit $\cos\beta_1 / V_1$ ist hier im Exponenten gelassen, weil er eventuell imaginär werden kann; dann wird aber der Exponent von e reell, was darauf hindeutet, dass die Amplitude der Longitudinalschwingungen mit zunehmender Entfernung von der Grenzebene abnimmt. Wirklich haben wir von vornherein einigen Grund, dies anzunehmen, da man nie etwas von den Longitudinalschwingungen bemerkt hat. Für $\cos\beta_1 / V_1$ finden wir:

$$\frac{\cos\beta_1}{V_1} = \frac{1}{V_1}\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha_1}{v_1^2}V_1^2} = \sqrt{\frac{1}{V_1^2} - \frac{\sin^2\alpha_1}{v_1^2}}$$
$$= \frac{\sin\alpha_1}{v_1}\sqrt{\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1} - 1}.$$

Alles hängt nun ab von der Constante k; ist diese negativ oder Null, so wird $\cos\beta_1 / V_1$ sicher imaginär, ist aber k positiv, so muss:

$$\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1} < 1$$

sein, damit $\cos\beta_1 / V_1$ imaginär wird. Letzteres kommt darauf hinaus, dass man k als sehr klein in Vergleich mit ε annimmt. Wenn aber $\sin\alpha_1 = 0$ oder sehr klein wird, so wird das Vorhergehende zweifelhaft; dieser Fall muss daher später noch näher erörtert werden. Kehren wir zurück zu der Formel für a_1 aus (19), so haben wir erstens zu untersuchen, welchen Werth die Grösse:

$$q = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1+4\pi\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\operatorname{ctg}\beta_1 + \frac{1+4\pi\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\operatorname{ctg}\beta_2}$$

erhält. Dieser Ausdruck ist von der Ordnung $1/\varepsilon$; wenn wir nun bei einer zweiten Annäherung die Grössen von der Ordnung $(1/\varepsilon)^2$ weglassen, so finden wir:

$$q = \frac{n^2 - 1}{8\pi\varepsilon_2(\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2)},$$

und schliesslich:

$$q = \frac{n^2-1}{8\pi\varepsilon_2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1} - 1} + \sqrt{\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_2)\sin^2\alpha_2} - 1}}$$

Nehmen wir zuerst an, k sei negativ, somit $k = -k'$, dann wird:

$$q = -i\frac{n^2-1}{8\pi\varepsilon_2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k'}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1}} + \sqrt{1+\frac{k'}{(1+4\pi\varepsilon_2)\sin^2\alpha_2}}}.$$

Ist k positiv, so muss man, wie oben schon dargethan, annehmen:

$$\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_2)\sin^2\alpha_2} < 1;$$

dann wird aber:

$$q = -i\frac{n^2-1}{8\pi\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_1)\sin^2\alpha_1}}+\sqrt{1-\frac{k}{(1+4\pi\varepsilon_2)\sin^2\alpha_2}}}.$$

Ist endlich $k = 0$, so wird:

$$q = -i\frac{n^2-1}{8\pi\varepsilon_2}.$$

Jedenfalls können wir also setzen $q = -ip$, wo p in den drei betrachteten Fällen eine verschiedene Bedeutung hat, aber immer positiv ist, solange $n > 1$ ist.

Schliesslich haben wir nun für a_1:

$$a_1 = \frac{1+ip\,\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)}{1-ip\,\mathrm{tg}(\alpha_1-\alpha_2)}\cdot\frac{\mathrm{tg}(\alpha_1-\alpha_2)}{\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)}$$

und, wenn man zur Vereinfachung setzt:

$$p\,\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2) = \mathrm{tg}\,l, \quad p\,\mathrm{tg}(\alpha_1-\alpha_2) = \mathrm{tg}\,m,$$

$$a_1 = \frac{\mathrm{tg}(\alpha_1-\alpha_2)\cos m}{\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\cos l}e^{i(l+m)}.$$

Der Ausdruck für die Schwingungen parallel zur Einfallsebene im reflectirten Licht wird nun:

$$\frac{\mathrm{tg}(\alpha_1-\alpha_2)\cos m}{\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)\cos l}e^{-i(\psi_1'-l-m)}.$$

Der reelle Theil dieses Ausdruckes wird, wenn wir die Amplitude a_r nennen:

$$a_r\cos(\psi_1'-l-m).$$

Daraus ergibt sich, dass die Schwingungen parallel zur Einfallsebene eine Phasenverzögerung $l+m$ erlitten haben, während die Intensität bestimmt ist durch:

$$a_r^2 = \frac{\mathrm{tg}^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\mathrm{tg}^2(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{1+p^2\,\mathrm{tg}^2(\alpha_1+\alpha_2)}{1+p^2\,\mathrm{tg}^2(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene erleiden keine Phasenänderung, es stellt somit $l+m$ zugleich den Phasenunterschied dar. Wenn bei der Reflexion in Luft die Phase der Schwingungen parallel zur Einfallsebene verzögert ist gegen diejenige der senkrechten Schwingungen, nennt Jamin den Phasenunterschied positiv, im umgekehrten Falle negativ. In unserem Falle hängt das Vorzeichen von $l+m$ allein ab von demjenigen von p, und weil bei der Reflexion in Luft $n > 1$, somit p positiv ist, wird auch $l+m$ positiv. Die Phasenänderung der parallelen Schwingungen

ist daher eine Verzögerung, und der Phasenunterschied, welcher von den Longitudinalschwingungen herrührt, immer positiv.

Es erübrigt nun noch den Fall zu untersuchen, dass $\alpha_1 = 0$ wird. Dann finden wir nach einiger Rechnung für a_1 aus (19):

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{n-1}{n+1},$$

einen ganz bestimmten reellen Werth, was darauf hindeutet, dass in diesem Falle keine Phasenänderung stattfindet.

§ 2. Die Theorie der Zurückwerfung des Lichtes in ihrer einfachsten Form geht immer von der Voraussetzung aus, dass die beiden Medien, an deren Grenze das Licht reflectirt wird, scharf voneinander getrennt sind, und dass sie bis an die Trennungsfläche als homogen betrachtet werden dürfen. Das ist aber nicht genau, denn die Molecularkräfte, welche die beiden Medien an ihrer Grenzfläche auf einander ausüben, bewirken, dass der Zustand in der unmittelbaren Nähe der Grenzebene ein anderer wird als in grösseren Entfernungen davon. Es sind daher alle physikalischen Eigenschaften der beiden Medien in der Nähe der Grenzebene als Functionen der Entfernung von dieser Ebene aufzufassen, und erst in einer Entfernung, die mit dem Radius der Wirkungssphäre im Zusammenhang steht, können die beiden Medien als homogen betrachtet werden. Daher befindet sich zwischen ihnen eine Uebergangsschicht, zwar von sehr geringer Dicke, welche aber in einer vollständigen Theorie der Reflexion berücksichtigt werden muss.

Eine einfache Berechnung zeigt, dass die Annahme derselben, sei die Dicke noch so gering, wirklich zu der Erklärung der beobachteten elliptischen Polarisation beitragen kann. Denn aus der Interferenz des Lichtes, welches an der Vorderseite, und desjenigen, welches an der Hinterseite der Schicht reflectirt wird, ergibt sich unmittelbar eine Phasenänderung des reflectirten Lichtes, welche im allgemeinen für Schwingungen, senkrecht zur Einfallsebene eine andere ist, als für Schwingungen parallel zur Einfallsebene; daher der Phasenunterschied. Es fragt sich nur, woher es kommt, dass dieser

Phasenunterschied einen beträchtlichen Werth erreichen und namentlich für den Polarisationswinkel ein Viertel Wellenlänge werden kann. Denken wir uns eine einzige sehr dünne Uebergangsschicht, die wir der Einfachheit wegen als homogen betrachten; der Einfallswinkel sei α_1, der Brechungswinkel in der Schicht α_2, derjenige im zweiten Medium α_3. Falls α_1 dem Polarisationswinkel gleich ist, wird $\alpha_1 + \alpha_3 = 90^0$.

Wir betrachten zuerst die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene. Der Reflexionscoëfficient an der Vorderfläche der Schicht ist:

$$-\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

derjenige an der Hinterfläche:

$$-\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)} \quad \text{oder} \quad -\frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Das negative Vorzeichen in beiden Formeln deutet hin auf eine Phasenänderung einer halben Wellenlänge, welche ebensowohl das an der Hinterfläche wie das an der Vorderfläche reflectirte Licht erleidet. Ausserdem ist die Phase der letzteren Lichtart gegen die der ersteren ein wenig verzögert wegen des zweimaligen Durchlaufens der Schicht. Der Coëfficient $-\cos(\alpha_1 + \alpha_2)/\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ ist sehr klein, weil $\alpha_1 + \alpha_2$ nicht weit von 90^0 entfernt ist, daher dürfen wir die Lichtbündel, welche zwei und mehr Reflexionen in der Schicht erlitten haben, ausser acht lassen. Im ganzen hat also das reflectirte Licht eine Phasenänderung von einer halben Wellenlänge erlitten und dazu noch eine Phasenänderung, die sich mit Hülfe des Reflexionscoëfficienten und der Dicke der Schicht leicht berechnen lässt, die aber jedenfalls nur sehr klein ist. Ein ganz anderes Verhalten zeigen die Schwingungen parallel zur Einfallsebene, und zwar wegen des eigenthümlichen Zeichenwechsels des Reflexionscoëfficienten bei dem Polarisationswinkel. Der Reflexionscoëfficient an der Vorderfläche der Schicht ist hier:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)},$$

derjenige an der Hinterfläche:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_3)}{\operatorname{tg}(\alpha_2 + \alpha_3)} = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Beide Coëfficienten sind also einander gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, ausserdem sind sie sehr klein, weil $\alpha_1 + \alpha_2$ wenig von 90^0 entfernt ist; daher dürfen wir die höheren Potenzen weglassen und nur die zwei Lichtbündel in Rechnung bringen, welche an der Vorderfläche und an der Hinterfläche reflectirt sind. Zur Berechnung der Phasenänderung, welche aus der Interferenz dieser beiden Bündel entsteht, stellen wir das einfallende Licht durch $\cos\psi$ vor. Das an der Vorderfläche reflectirte Licht wird:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos\psi\,,$$

das an der Hinterfläche reflectirte:

$$-\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos(\psi - \eta),$$

wo η die sehr kleine Phasenverzögerung ist, welche aus dem zweimaligen Durchlaufen der Schicht hervorgeht. Die Summe beider Ausdrücke ist:

$$-2\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin\tfrac{1}{2}\eta \sin(\psi - \tfrac{1}{2}\eta)$$

oder:
$$-2\frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \sin\tfrac{1}{2}\eta \cos(\psi - \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\eta).$$

Aus dieser Formel geht erstens hervor, dass die Schwingungen parallel zur Einfallsebene ausser dem negativen Vorzeichen noch eine Phasenverzögerung von einem Viertel Wellenlänge, vermehrt um die sehr kleine Grösse $\frac{1}{2}\eta$, erhalten. Der Phasenunterschied der beiden Schwingungsarten ist somit nahezu ein Viertel Wellenlänge. Zweitens aber wird die Amplitude wegen des Factors $\sin\frac{1}{2}\eta$ sehr klein. Beide Schlussfolgerungen stimmen mit den beobachteten Thatsachen überein.

Die vorhergehende ungefähre Rechnung diente nur dazu, um zu zeigen, wie eine Uebergangsschicht von noch so geringer Dicke einen merklichen Phasenunterschied hervorrufen kann. In der Wirklichkeit muss man sich aber eine andere Vorstellung von der Constitution dieser Schicht machen und namentlich darauf acht geben, dass sie nicht

als homogen betrachtet werden darf; die Rechnungen werden dadurch etwas complicirter. Durch die Molecularkräfte, welche das zweite Medium auf das erste ausübt, entsteht an der Grenze des letzteren eine Schicht, deren Dicke dem Radius der Wirkungssphäre gleich ist, und deren Dichte eine andere ist, als in messbarer Entfernung von der Grenzebene. Diese Schicht wirkt auf eine folgende, und so pflanzt sich die Wirkung fort, wird aber gleichzeitig kleiner, sodass in einer gewissen Entfernung von der Grenzebene das erste Medium homogen wird; diese Entfernung ist daher etwas grösser als der Radius der Wirkungssphäre. Dasselbe findet statt an der Grenze des zweiten Mediums; auch hier entsteht somit eine Schicht von veränderlicher Dichte und die zwei Schichten zusammen bilden die ganze Uebergangsschicht, deren Dicke fernerhin δ genannt wird. Die Lichtbewegung in dieser Schicht wird bestimmt durch die allgemeinen Differentialgleichungen des vorigen Paragraphen, wo ε als eine Function von x zu betrachten ist. Zur vollständigen Bestimmung des Einflusses der Uebergangsschicht hätten wir nun eigentlich eine Lösung dieser Gleichungen zu suchen, indem dann später die Bedingung, dass die so gefundene Lösung sich an der Vorderfläche der Schicht bei den gewöhnlichen Ausdrücken für die Lichtbewegung im ersten Medium, an der Hinterfläche bei denen des zweiten anschliessen muss, die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der Intensitäten liefern würde.

Wegen der Form der Differentialgleichungen ist aber eine derartige Lösung nicht möglich, wir verfahren daher am einfachsten folgenderweise. Die Ebene, von der an das erste Medium homogen wird, wählen wir zur yz-Ebene, dann wird die Ebene, wo die Unhomogeneïtät im zweiten Medium aufhört, bestimmt durch $x = \delta$. Betrachten wir erstens die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene, dann wird die Lichtbewegung im ersten und im zweiten Medium vorgestellt durch die Ausdrücke (5), (6), (7) des vorigen Paragraphen. In der Grenzschicht aber, also zwischen $x = 0$ und $x = \delta$, gelten die Differentialgleichungen:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) = A\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) = A\frac{\partial N}{\partial t},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4\pi A\frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Die letzte Gleichung kann aus den beiden ersten abgeleitet, eine dieser drei Gleichungen kann daher fortgelassen werden; dazu wählen wir die erste, weil sie keinen Differentialquotient nach x enthält. Als Unbekannte nehmen wir η/ε, L und N, dann können die drei Gleichungen in folgender Form geschrieben werden:

$$(20) \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial x} = A\frac{\partial N}{\partial t}, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z} + 4\pi A\varepsilon\frac{\partial \eta'}{\partial t},$$

wo $\eta/\varepsilon = \eta'$ gesetzt ist. Die Lösung dieser Gleichungen würde grosse Schwierigkeiten darbieten, weil einer der Coëfficienten, nämlich $4\pi A\varepsilon$ nicht mehr constant, sondern eine Function von x ist. Wir müssen daher versuchen, auf anderem Wege die Form der Lösung zu finden. Wenn ε constant wäre, z. B. gleich ε_1, wie im homogenen Theile des ersten Mediums, so hätten die Werthe von η', L und N den gemeinsamen Factor:

$$e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha_1 + z\sin\alpha_1}{v_1} + p\right)}.$$

Die Uebergangsschicht ist aber nur unhomogen in der Richtung der x-Axe; die Grössen η', L und N bleiben daher in derselben Weise von z und t abhängig, sodass der oben genannte Factor in der Schicht folgende Form haben wird:

$$f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z\sin\alpha}{v} + p\right)}.$$

Wir können uns nun die Uebergangsschicht durch Flächen senkrecht zur x-Axe in unendlich dünne Schichten zerlegt denken, dann findet an jeder Fläche eine Reflexion und eine Brechung statt. Bei jedem dieser Vorgänge bleibt aber $\sin\alpha/v$ constant, dasselbe gilt somit auch von dem ganzen Factor von $f(x)$. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass sich die Gleichungen (20) so schreiben lassen:

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \eta'}{\partial x} = -i\frac{2\pi}{T}AN, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha}{v}N, \\ &\frac{\partial N}{\partial x} = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha}{v}L - i\frac{2\pi}{T}4\pi A\varepsilon\eta'. \end{aligned}\right.$$

Integriren wir diese Gleichungen nach x, zwischen 0 und δ, so wird:

$$\eta_\delta' - \eta_0' = -i\frac{2\pi}{T}A\int_0^\delta N dx, \qquad L_\delta - L_0 = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha}{v}\int_0^\delta N dx,$$

$$N_\delta - N_0 = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha}{v}\int_0^\delta L dx - i\frac{2\pi}{T}4\pi A\int_0^\delta \varepsilon\eta' dx.$$

Hieraus geht erstens hervor, dass, wenn man $\delta = 0$ setzt, die gewöhnlichen Grenzbedingungen, nämlich die Stetigkeit von η', L und N zurückkehren; zweitens aber, dass durch den Einfluss der Uebergangsschicht die Grenzbedingungen etwas geändert werden, so zwar, dass die Unterschiede der Werthe von η', L und N an beiden Seiten der Schicht von derselben Grössenordnung wie δ/λ sind, wo λ die Wellenlänge des Lichtes bedeutet. (Denn die Integrale sind von der Grössenordnung δ, und A ist die umgekehrte Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes.) Diese letzte Bemerkung gibt uns zugleich das Mittel, den Werth der Unterschiede annäherungsweise zu bestimmen. Strenge genommen wird dazu die Bekanntschaft mit den Grössen η', L und N in der Schicht gefordert; wenn wir uns aber auf Grössen von der Ordnung δ/λ beschränken, oder wenn wir δ als sehr klein in Vergleich mit λ betrachten, dann dürfen wir für η', L und N unter dem Integralzeichen die Werthe η_0', L_0 und N_0 schreiben. So ergibt sich:

$$\eta_\delta' - \eta_0' = -i\frac{2\pi}{T}AN_0\delta,$$

$$L_\delta - L_0 = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}N_0\delta,$$

$$N_\delta - N_0 = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}L_0\delta - i\frac{2\pi}{T}4\pi A\eta_0'\int_0^\delta \varepsilon dx.$$

Die Werthe η_δ', η_0' u. s. w. erhalten wir aus den Gleichungen (5), (6) und (7) des vorigen Paragraphen; wir finden dann schliesslich durch Substitution in den drei letzten Gleichungen:

$$\frac{a_2}{\varepsilon_2} e^{i\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\alpha_2}{v_2}\delta} - \frac{1+a_1}{\varepsilon_1} = i\frac{2\pi}{T}\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\frac{\cos\alpha_1}{v_1}\delta,$$

$$\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\frac{\cos\alpha_1}{v_1} - \frac{a_2}{\varepsilon_2}\frac{\cos\alpha_2}{v_2} e^{i\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\alpha_2}{v_2}\delta}$$

$$= i\frac{2\pi}{T}\left(\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\right)^2\frac{1+a_1}{\varepsilon_1}\delta - i\frac{2\pi}{T}4\pi A^2\frac{1+a_1}{\varepsilon_1}\int\limits_0^\delta \varepsilon\, dx.$$

Die Gleichung für $L_\delta - L_0$ ist nicht benutzt, weil sie dasselbe gibt als diejenige für $\eta_\delta' - \eta_0'$.

Durch Elimination von: $\frac{a_2}{\varepsilon_2} e^{i\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\alpha_2}{v_2}\delta}$ erhalten wir nun:

$$\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\frac{\cos\alpha_1}{v_1}\left(1 - i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{Tv_2}\right) = \frac{1+a_1}{\varepsilon_1}\frac{\cos\alpha_2}{v_2}\left(1 - i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{Tv_2}\right) +$$

$$+ i\frac{1+a_1}{\varepsilon_1}\frac{2\pi}{Tv_2^2}\left(\delta - \int\limits_0^\delta \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}dx\right), \text{ oder:}$$

$$\left[(1-a_1)\frac{\cos\alpha_1}{v_1} - (1+a_1)\frac{\cos\alpha_2}{v_2}\right]$$

$$= i\frac{2\pi}{Tv_2^2}(1+a_1)\left(1 + i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{Tv_2}\right)\int\limits_0^\delta\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx.$$

Wenn wir auch hier die Grössen von der Ordnung $(\delta/\lambda)^2$ weglassen, so ergibt sich:

$$(1-a_1)\frac{\cos\alpha_1}{v_1} = (1+a_1)\left[\frac{\cos\alpha_2}{v_2} + i\frac{2\pi}{Tv_2^2}\int\limits_0^\delta\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx\right].$$

Die Lösung von a_1 gibt:

$$a_1 = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2) + ip}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + ip}, \quad p = 2\pi\frac{\sin\alpha_1}{\lambda_2}\int\limits_0^\delta\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx.$$

Die Grösse p ist von der Ordnung δ/λ, daher können wir auch schreiben:

$$a_1 = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}\left[1 + ip\frac{2\sin\alpha_2\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}\right], \text{ oder:}$$

$$a_1 = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\, e^{i\varphi_p}}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos\varphi_p}, \text{ wenn:}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_p = p\frac{2\sin\alpha_2\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ gesetzt wird.}$$

Daraus folgt, dass die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene durch den Einfluss der Uebergangsschicht eine Phasenverzögerung φ_p erlitten haben, während die Intensität bestimmt ist durch:

$$a_p^2 = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_p).$$

Schliesslich kann $\operatorname{tg}\varphi_p$ noch in folgende Form gebracht werden:

$$\operatorname{tg}\varphi_p = \frac{4\pi n^2}{n^2 - 1} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1} \int_0^\delta \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right) dx.$$

Es muss nun ganz in derselben Weise der Einfluss der Uebergangsschicht auf die Schwingungen parallel zur Einfallsebene berechnet werden. Vorher aber werden wir die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen so schreiben, dass keine Longitudinalschwingungen auftreten, weil wir diese schon an und für sich betrachtet haben. Wir thun das, indem wir $1/\varepsilon$ gegen die Einheit vernachlässigen, dadurch dürfen wir zugleich $\varphi = 0$ setzen. Es bleiben nun, weil η, L, und N in diesem Fall verschwinden, die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}\right) = A\frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 4\pi A \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -4\pi A \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist identisch mit den beiden vorigen, eine dieser Gleichungen kann daher fortgelassen werden; wir wählen dazu die zweite, welche keinen Differentialquotienten nach x enthält. Als Unbekannte nehmen wir ξ, $\zeta/\varepsilon = \zeta'$ und M, dann wird:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \xi}{\partial z} - A\frac{\partial M}{\partial t}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = -4\pi A \varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\varepsilon \frac{\partial \zeta'}{\partial z},$$

oder:

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial x} = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\frac{\xi}{\varepsilon} + i\frac{2\pi}{T}AM, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = i\frac{2\pi}{T}4\pi A\varepsilon\zeta',$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\varepsilon\zeta'.$$

Durch Integration zwischen 0 und δ entsteht:

$$\zeta_\delta' - \zeta_0' = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\int_0^\delta \frac{\xi}{\varepsilon}\,dx + i\frac{2\pi}{T}A\int_0^\delta M\,dx,$$

$$M_\delta - M_0 = i\frac{2\pi}{T}4\pi A\int_0^\delta \varepsilon\zeta'\,dx, \quad \xi_\delta - \xi_0 = -i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\int_0^\delta \varepsilon\zeta'\,dx.$$

Aus diesen Gleichungen ersehen wir, dass die Unterschiede der Werthe von ζ', ξ und M an der oberen und unteren Seite der Schicht von der Ordnung δ/λ sind; wir können daher mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung $(\delta/\lambda)^2$, für ζ', ξ' und M unter dem Integralzeichen schreiben ζ_0', ξ_0 und M_0.

Wir erhalten so:

$$\zeta_\delta' - \zeta_0' = i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\xi_0\int_0^\delta \frac{dx}{\varepsilon} + i\frac{2\pi}{T}AM_0\delta,$$

$$M_\delta - M_0 = i\frac{2\pi}{T}4\pi A\zeta_0'\int_0^\delta \varepsilon\,dx, \quad \xi_\delta - \xi_0 = -i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\zeta_0'\int_0^\delta \varepsilon\,dx.$$

Die Einführung der Grenzwerthe, welche aus (12), (13), (14) des vorigen Paragraphen folgen, gibt:

$$\frac{a_2}{\varepsilon_2}\cos\alpha_2\, e^{i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{\lambda_2}} - \frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1 =$$

$$= -i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin^2\alpha_1}{v_1}(1+a_1)\int_0^\delta \frac{dx}{\varepsilon} + i\frac{2\pi}{T}4\pi A^2 v_1(1+a_1)\delta, \text{ oder:}$$

$$\frac{a_2}{\varepsilon_2}\cos\alpha_2\, e^{i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{\lambda_2}} - \frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1 =$$

$$= i\frac{2\pi}{Tv_1}\frac{1+a_1}{\varepsilon_1}\left(\delta - \sin^2\alpha_1\int_0^\delta \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\,dx\right),$$

$$v_2 a_2 e^{i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{\lambda_2}} - (1+\alpha_1)v_1 = i\frac{2\pi}{T}\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\int_0^\delta \varepsilon\,dx,$$

$$(1+a_1)\sin\alpha_1 - a_2\sin\alpha_2\, e^{i\frac{2\pi\delta\cos\alpha_2}{\lambda_2}} = -i\frac{2\pi}{T}\frac{\sin\alpha_1}{v_1}\frac{1-a_1}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\int_0^\delta \varepsilon\,dx.$$

Wie man leicht einsieht, sind die beiden letzten Gleichungen identisch; aus den beiden ersten ergibt sich durch Elimination von a_2:

$$(1 + a_1)\sin\alpha_2\cos\alpha_2 - (1 - a_1)\sin\alpha_1\cos\alpha_1 =$$

$$= -i\frac{2\pi}{Tv_2}(1 - a_1)\sin\alpha_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2\int_0^\delta\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}dx +$$

$$+ i\frac{2\pi}{Tv_2}(1 + a_1)\sin\alpha_2\left(\delta - \sin^2\alpha_1\int_0^\delta\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}dx\right).$$

Aus dieser Gleichung kann a_1 bestimmt werden, wir finden:

$$a_1 = \frac{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2 + 2i(p - q)}{\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 - 2i(p + q)}, \qquad \text{wo:}$$

$$p = \frac{2\pi}{Tv_2}\sin\alpha_2\left(\delta - \sin^2\alpha_2\int_0^\delta\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}dx\right),$$

$$q = \frac{2\pi}{Tv_2}\sin\alpha_1\cos\alpha_1\cos\alpha_2\int_0^\delta\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}dx \text{ ist.}$$

Weil p und q von der Ordnung δ/λ sind, darf man mit Vernachlässigung von Grössen höherer Ordnung schreiben:

$$a_1 = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)}\left(1 + 4i\frac{p\sin 2\alpha_1 - q\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}\right).$$

Aus dieser Formel ersieht man, dass die Schwingungen parallel zur Einfallsebene eine Phasenverzögerung φ_s erlitten haben, welche bestimmt wird durch:

$$\operatorname{tg}\varphi_s = 4\frac{p\sin 2\alpha_1 - q\sin 2\alpha_2}{\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2}.$$

Die Intensität dieser Schwingungen wird:

$$a_s^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \alpha_2)}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_s).$$

Nach einigen Rechnungen findet sich für die Phasenverzögerung:

$$\operatorname{tg}\varphi_s = \frac{4\pi n^2}{n^2 - 1}\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1}\frac{\int_0^\delta\left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx - \sin^2\alpha_2\int_0^\delta\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Es zeigt sich somit, dass der Einfluss der Uebergangsschicht, mit Vernachlässigung höherer Potenzen von δ/λ, dargestellt wird durch folgende Formeln für die Phasenänderung φ und die Amplitude a:

$$\operatorname{tg}\varphi_p = \frac{4\pi n^2}{n^2-1}\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1}R, \quad \operatorname{tg}\varphi_s = \frac{4\pi n^2}{n^2-1}\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1}\frac{R - S\sin^2\alpha_2}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)},$$

$$a_p{}^2 = \frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}(1+\operatorname{tg}^2\varphi_p), \qquad a_s{}^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha_1-\alpha_2)}{\operatorname{tg}^2(\alpha_1+\alpha_2)}(1+\operatorname{tg}^2\varphi_s),$$

$$R = \int_0^\delta\left(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx, \qquad S = \int_0^\delta\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}\right)dx.$$

Es fragt sich, ob diese Formeln die beobachtete elliptische Polarisation wieder geben. Dazu müssen wir aus ihnen die Ausdrücke für die Phasendifferenz und das Amplitudenverhältniss ableiten, welche Grössen vorzugsweise gemessen worden sind.

Nun ist $\operatorname{tg}\varphi_p$ immer eine sehr kleine Grösse von der Ordnung δ/λ, $\operatorname{tg}\varphi_s$ aber wird vermöge des Factors $\cos(\alpha_1+\alpha_2)$ im Nenner unendlich gross für $\alpha_1+\alpha_2 = 90^0$, was mit den Beobachtungen übereinstimmt. Weil man eben in der Nähe des Polarisationswinkels für den Phasenunterschied einen merklichen Werth gemessen hat, so dürfen wir bei der Besprechung dieses Phasenunterschiedes, φ_p gegen φ_s vernachlässigen, wir erhalten somit für den Phasenunterschied d:

$$\operatorname{tg}2\pi\frac{d}{\lambda} = \frac{4\pi n^2}{n^2-1}\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1}\frac{R - S\sin^2\alpha_2}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Von dem Vorzeichen dieser Formel hängt es nun ab, ob die Schwingungen parallel zur Einfallsebene eine Phasenverzögerung oder eine Phasenbeschleunigung erlitten haben, ob mithin die Reflexion positiv oder negativ ist. Um das Vorzeichen besser beurtheilen zu können, ist es am besten, die Formel folgenderweise zu transformiren. Es ist:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2) = 1 - \sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2,$$

also:

$$\operatorname{tg}2\pi\frac{d}{\lambda} = \frac{4\pi n^2}{n^2-1}\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1}R +$$

$$+ \frac{2\pi}{n^2-1}\frac{\sin\alpha_1}{\lambda_1}\frac{\sin 2\alpha_1}{\cos(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1-\alpha_2)}[(n^2+1)R - S],$$

$$\operatorname{tg}2\pi\frac{d}{\lambda} = \frac{4\pi n^2}{n^2-1}\frac{\cos\alpha_1}{\lambda_1}R + \frac{2\pi}{n^2-1}\frac{\sin\alpha_1}{\lambda_1}\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)[(n^2+1)-RS] +$$

$$+ \frac{2\pi}{n^2-1}\frac{\sin\alpha_1}{\lambda_1}\operatorname{tg}(\alpha_1-\alpha_2)[(n^2+1)R - S].$$

Das zweite Glied ist wegen des Factors $\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)$ soviel grösser als die beiden anderen, dass diese ohne Zweifel

fortgelassen werden können. Dadurch erhalten wir schliesslich für die Phasendifferenz:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = \frac{2\pi}{n^2 - 1} \frac{\sin \alpha_1}{\lambda_1} \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)[n^2 + 1)R - S].$$

Für den letzten Factor finden wir:

$$(n^2 + 1)R - S = \int_0^\delta \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx.$$

Wie nun auch die Uebergangsschicht gebildet sein mag, immer ist ε zwischen ε_1 und ε_2 gelegen; das Integral ist somit immer positiv und dadurch auch der Phasenunterschied, ebenso wie derjenige, welcher von den Longitudinalschwingungen herrührt. Setzen wir:

$$\frac{2\pi}{(n^2 - 1)\lambda_1} \int_0^\delta \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon \varepsilon_1} dx = e,$$

dann wird:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{d}{\lambda} = e \sin \alpha_1 \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

wo e der sogenannte Ellipticitätscoëfficient ist.

Wir müssen nun das Amplitudenverhältniss näher betrachten. Für diese Grösse finden wir:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \left(\frac{4\pi n^2}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_1}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{R - S \sin^2 \alpha_2}{\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}\right)^2}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) + \left(\frac{4\pi n^2}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_1}{\lambda_1}\right)^2 R^2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Wäre die Uebergangsschicht nicht vorhanden, so hätten wir:

$$\frac{a_s^2}{a_p^2} = \frac{\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Die Abweichungen von dieser Formel sind so klein, dass wir sie kaum bemerken können. Allein in der Nähe des Polarisationswinkels, wo $\cos(\alpha_1 + \alpha_2)$ sehr klein wird, müssen die Abweichungen deutlicher hervortreten, und namentlich für $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$ wird das Verhältniss (das sogenannte Hauptamplitudenverhältniss):

$$\frac{a_s}{a_p} = k = \frac{4\pi n^2}{n^2 - 1} \frac{\cos \alpha_1}{\lambda_1} \frac{R - S \sin^2 \alpha_2}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)},$$

weil wir wieder das zweite Glied im Nenner gegen das erste fortlassen dürfen. Berücksichtigen wir nun, dass $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$ ist, so erhält k schliesslich folgende einfache Gestalt:

$$k = \frac{1}{2\cos\alpha_1} \cdot \frac{2\pi}{(n^2 - 1)\lambda_1} [(n^2 + 1) R - S]$$

oder:

$$k = \frac{e}{2\cos J},$$

wo J den Polarisationswinkel bedeutet.

§ 3. Bei der Vergleichung der erhaltenen Formeln mit den Beobachtungen schien es mir am zweckmässigsten, erst zu untersuchen, inwieweit der Einfluss der Uebergangsschicht an und für sich im Stande ist, die beobachteten Thatsachen zu erklären. Der Phasenunterschied hat zunächst dieselbe Gestalt wie in der Cauchy'schen Formel, welche von Jamin und Quincke auf ihre Beobachtungen erprobt worden ist. Zweitens aber zeigt die Formel für den Ellipticitätscoëfficienten, dass bei Umkehrung der beiden Medien das Vorzeichen des Phasenunterschiedes sich ebenfalls umkehrt, eine Eigenthümlichkeit, die von Quincke beobachtet wurde. Eine grosse Schwierigkeit bietet sich aber bei der Betrachtung des Vorzeichens des Ellipticitätscoëfficienten. Wenn nämlich $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ist, so ist e und damit auch der Phasenunterschied immer positiv, während Jamin bei der Reflexion in Luft auch wohl negative Phasenunterschiede beobachtet hat. Diese Schwierigkeit gilt aber auch von dem Phasenunterschied, welcher von den Longitudinalschwingungen herrührt.

Weiter habe ich aus den beobachteten Werthen der Ellipticitätscoëfficienten einen ungefähren Werth für die Dicke der Uebergangsschicht abgeleitet. Diese Werthe sind von derselben Grössenordnung wie die Zahlen, welche Quincke und van der Waals durch Betrachtungen ganz anderer Art für den Radius der Wirkungssphäre gefunden haben. Wir hatten nämlich:

$$e = \frac{2\pi}{(n^2 - 1)\lambda_1} \int_0^\delta \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon\,\varepsilon_1} dx.$$

Setzen wir hierin:

$$\frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon)}{\varepsilon\varepsilon_1} = f(x),$$

so ist $f(x)$ immer positiv, weil $\varepsilon_2 > \varepsilon > \varepsilon_1$ ist. Wollen wir daher einen Mittelwerth von $f(x)$ vor das Integralzeichen bringen, so haben wir nur den grössten und den kleinsten Werth von $f(x)$ zu berechnen.

Der kleinste Werth ist $f(x) = 0$, er wird erreicht, wenn $\varepsilon = \varepsilon_1$ oder $\varepsilon = \varepsilon_2$ ist; der grösste Werth ist:

$$\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} - 1\right)^2 = (n-1)^2,$$

und wird erreicht für $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Der gesuchte Mittelwerth ist somit:

$$\vartheta(n-1)^2,$$

wo $1 > \vartheta > 0$ ist. Bringen wir diesen Werth vor das Integralzeichen, so erhalten wir:

$$e = 2\pi \frac{n-1}{n+1} \frac{\vartheta\delta}{\lambda_1}. \tag{21}$$

Hierin ist δ, die Dicke der Uebergangsschicht, wie schon früher bemerkt wurde, jedenfalls grösser als der Radius der Wirkungssphäre; daher muss $\vartheta\delta$ von derselben Grössenordnung als dieser Radius sein.

Für die Berechnung von $\vartheta\delta$ aus e könnten wir entweder die Beobachtungen über die Phasenunterschiede oder diejenigen über das Amplitudenverhältniss anwenden. Wir müssen uns aber auf letzteres beschränken, denn die Rechnungen von van der Waals und Quincke beziehen sich nur auf Flüssigkeiten, und für diese gibt Jamin nur den Werth des Hauptamplitudenverhältnisses. Zwar gibt Quincke auch Phasenunterschiede an, aber die Flüssigkeiten, welche er untersucht hat (Wasser und Eisenchlorid), zeigten einen negativen Phasenunterschied und liegen somit ausserhalb unserer Theorie. Der Zusammenhang zwischen Hauptamplitudenverhältniss und Ellipticitätscoëfficient ist gegeben durch:

$$k = \frac{e}{2\cos J};$$

setzen wir hierin für e den Werth (21), so finden wir:

$$\vartheta\delta = \frac{(n+1)k\cos J}{\pi(n-1)}\lambda_1.$$

Mit Hülfe dieser Formel sind die Werthe von $\vartheta\delta$ berechnet für einige Flüssigkeiten, für welche Jamin in seiner Tabelle No. IV [1]) die Werthe von k, J und n angibt.

	k	J	n	$\vartheta\delta$
Amylen . .	0,00233	56° 5′	1,487	0,000 001 4 mm
Alkohol . .	0,00208	53 38	1,36	0,000 001 7 „
Benzol . . .	0,00118	56 55	1,503	0,000 000 67 „
Aceton . . .	0,00165	53 55	1,359	0,000 001 3 „
Aethyloxalat .	0,00154	55 45	1,4068	0,000 001 1 „
Chloral . . .	0,00154	55 25	1,461	0,000 000 98 „
Aethylacetat .	0,00117	53 45	4,367	0,000 000 94 „
Methylacetat .	0,00101	53 47	1,359	0,000 000 82 „

Für λ_1 (die Wellenlänge in Luft) ist bei dieser Rechnung der Werth 0,00066 mm eingesetzt. Für einige Flüssigkeiten hat van der Waals das Verhältniss der beiden Capillaritätsconstanten K und H, welches auch mit dem Radius der Wirkungssphäre im Zusammenhang steht, berechnet. Er findet dann folgende Zahlen:

Aether	Alkohol	Schwefelkohlenstoff	Wasser	Quecksilber
$29 . 10^{-8}$	$25 . 10^{-8}$	$23 . 10^{-8}$	$31 . 10^{-8}$	$49 . 10^{-8}$ mm

Diese Zahlen sind sämmtlich kleiner als $\vartheta\delta$, das Verhältniss H/K ist aber nur ein gewisser Bruchtheil des Radius. Dagegen findet Quincke[2]) eine viel grössere Zahl:

$$\varrho = 0{,}000\,050 \text{ mm},$$

die aber, wie er selbst anerkennt, wahrscheinlich viel zu gross ist. Jedenfalls können wir also sagen, dass die aus e berechneten Zahlen für $\delta\vartheta$ von derselben Grössenordnung wie der Radius der Wirkungssphäre sind, und damit ist gezeigt, dass der Einfluss der Uebergangsschicht an und für sich im Stande ist, die elliptische Polarisation von Flüssigkeiten mit positiver Reflexion zu erklären. Der Einfluss der Longitudinalschwingungen lässt sich nicht bestimmen, solange die Constante k noch unbekannt ist, jedenfalls aber können sie nie einen negativen Phasenunterschied hervorrufen.

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. **31—33.** p. 179.

2) Quincke, Pogg. Ann. **137.** 1869.

Betrachten wir die Körper mit negativer Reflexion etwas genauer, so finden wir, dass der von uns gegebene Werth von e negativ werden kann, wenn ε nicht zwischen ε_1 und ε_2 liegt, denn:

$$e = \frac{2\pi}{(n^2-1)\lambda_1}\int_0^\delta \frac{(\varepsilon-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon)}{\varepsilon\varepsilon_1}\,dx.$$

Bei der Reflexion in Luft ist nun immer $\varepsilon > \varepsilon_1$ und im allgemeinen $\varepsilon < \varepsilon_2$; bei einigen festen Körpern kann aber in der Grenzschicht an der Oberfläche $\varepsilon > \varepsilon_2$ sein, denn beim Poliren wird auf der Oberfläche ein grosser Druck ausgeübt, und dadurch kann die Dichte dort grösser werden als im Inneren. Dann wird aber $\varepsilon > \varepsilon_2$, was einen negativen Werth von e zur Folge haben kann. Bei Flüssigkeiten hat Jamin die negative Reflexion nur beim Wasser und bei einigen Salzlösungen beobachtet. Ueberdies hat er noch die Beobachtung gemacht, dass, wenn der Salzgehalt zunimmt, der negative Ellipticitätscoëfficient kleiner und endlich Null und positiv wird. Vielleicht ist somit die negative Reflexion als eine Eigenthümlichkeit des Wassers zu betrachten; mit Bestimmtheit aber ist darüber nichts zu sagen.

III. *Die Brechungscoëfficienten einiger Gemische von Anilin und Alkohol; von W. Johst.*

(Mittheilungen aus dem math.-phys. Laboratorium in Königsberg i. Pr. Nr. 8.)

Bei den Untersuchungen über eine etwaige einfache Relation zwischen dem Brechungsexponenten n eines Körpers und dessen Dichtigkeit d ist man zu drei verschiedenen Formeln gelangt, durch welche sich diese Relation darstellen lassen soll, dieselben sind:

$$\frac{n^2-1}{d} = \text{Const.}, \qquad \frac{n-1}{d} = \text{Const.}, \qquad \frac{n^2-1}{n^2+2}\,\frac{1}{d} = \text{Const.}$$

Diesen Formeln sind Gleichungen nachgebildet, welche zwischen den Brechungsexponenten und Dichtigkeiten von

Flüssigkeiten und deren Gemischen bestehen müssen. Sie lauten für den Fall zweier Flüssigkeiten:

$$\text{(I)} \qquad \frac{N^2-1}{D} \cdot P = \frac{n_1{}^2-1}{d_1} p_1 + \frac{n_2{}^2-1}{d_2} p_2,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{N-1}{D} \cdot P = \frac{n_1-1}{d_1} p_1 + \frac{n_2-1}{d_2} p_2,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{N^2-1}{N^2+2} \cdot \frac{P}{D} = \frac{n_1{}^2-1}{n_1{}^2+2} \frac{p_1}{d_1} + \frac{n_2{}^2-1}{n^2+2} \frac{p_2}{d_2}.$$

worin n_1 d_1 p_1; n_2 d_2 p_2; N D P Brechungsexponenten, Dichtigkeit und Mischungsgewicht für die beiden Flüssigkeiten und das Gemisch bezeichnen. P ist also $= p_1 + p_2$. Die erste der drei Formeln ist aus der Emissionstheorie abgeleitet und durch die Hrn. Schrauf[1]) und Hoeck[2]) experimentell geprüft; bei genauerer Untersuchung stellte sich heraus, dass dieselbe durchaus nicht im Einklange mit den Beobachtungen steht, und dass auch die Bestätigung dieser Herren auf einem zu ungenauen Verfahren basirte. Die Formel II ist eine rein empirische, ihre Gültigkeit prüften die Hrn. Dale und Gladstone[3]) und Landolt[4]) an ihren Beobachtungen und fanden befriedigende Resultate. Erst Hr. Wüllner[5]) hat durch eine Reihe genauer Beobachtungen dargethan, dass weder die Formel $(n-1)/d = \text{const.}$ noch $(A-1)/d = \text{const.}$ (worin A die Refractionsconstante der Cauchy'schen Formel bedeutet) streng gültig ist, sondern dass sich diese Beziehung nur mehr oder weniger nahe, ähnlich wie das Mariotte'sche Gesetz den einzelnen Substanzen anschliesst. Dass die Formel $(n-1)/d = \text{const.}$, also diese Beziehung für jeden beliebigen Strahl, nicht richtig ist, folgert Hr. Wüllner[6]) schon daraus, dass die Brechungsexponenten n_α, n_β, n_γ selbst in verschiedener Weise mit der Temperatur sich ändern. Ich will hieran gleich die Bemerkung knüpfen, dass ich mit der allgemeinen Behauptung des Hrn. Wüllner[7])

1) Schrauf, Pogg. Ann. **116.** p. 193. 1862; **118.** p. 359. 1863; **119.** p. 461. 1863; **126.** p. 177. 1865; **127.** p. 175. 1866.

2) Pogg. Ann. **112.** p. 347. 1861.

3) Dale u. Gladstone, Phil. Trans. **103.** p. 317. 1863.

4) Landolt, Pogg. Ann. **123.** p. 595. 1864.

5) Wüllner, Pogg. Ann. **133.** p. 1. 1868.

6) l. c. p. 32. 7) l. c. p. 5.

dass eine etwaige Relation streng genommen nur für di Constante A geprüft werden könne, allerdings nicht einverstanden bin. Soviel ich übersehe, ist es nicht ausgeschlossen, dass wirklich eine unbekannte Relation bestehen könnte, welcher sowohl das A als auch jedes beliebige n genügte. Es würde dies doch nur zur Voraussetzung haben, dass die Aenderung der übrigen Constanten B, C u. s. w. irgend einer Dispersionsformel bei Verdünnungen, resp. Verdichtungen der Substanz sich in einer bestimmten Abhängigkeit von der Aenderung des A befände. Eine solche Abhängigkeit ist aber von vorn herein nicht auszuschliessen, und das um so weniger, da diesen Grössen A, B, C u. s. w. noch nicht bestimmte physikalische Bedeutungen beigelegt werden können, da die Dispersionsformeln nur empirische sind. Die dritte Formel schliesslich ist von den Hrn. H. A. Lorentz[1]) und L. Lorenz[2]) aufgestellt, und zwar sind beide Herren auf theoretischem Wege, und von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, zu derselben gelangt. Hr. L. Lorenz hat sie nur für die Constante A nachgewiesen, wogegen sich Hr. H. A. Lorentz dafür ausspricht, dass sie nicht blos für A, sondern für jede bestimmte Gattung von Lichtstrahlen gelte. Einer Prüfung unterzogen ist diese Formel von beiden Herren selbst und ferner von den Hrn. K. Prytz[3]) und Landolt. Ihre Resultate bestehen darin, dass die Relation ungefähr denselben Grad von Genauigkeit zeigt, wie Formel (II), dass sie sich aber in Bezug auf die Abweichungen entgegengesetzt verhält, indem sie stets zu kleine Werthe für N liefert, während die Formel (II) stets zu grosse ergibt.

Zu sämmtlichen Beobachtungen, an welchen die Gültigkeit der drei Formeln geprüft worden ist, sind nun erstens Gemische aus Flüssigkeiten benutzt worden, deren Brechungsexponenten nicht sehr weit auseinander liegen; die einzige dazu angewandte stärker brechende Flüssigkeit ist Schwefelkohlenstoff, welcher aber wegen seiner leichten Verdunst-

1) H. A. Lorentz, Wied. Ann. 9. p. 641. 1880.
2) L. Lorenz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.
3) K. Prytz, Wied. Ann. 11. p. 104. 1880.

barkeit nicht sehr zur Herstellung von Gemischen geeignet ist. Es schien daher von Interesse, zu untersuchen, wie gross sich die Abweichungen ergeben, wenn man Flüssigkeiten nimmt, deren Brechungs- und Dispersionsvermögen möglichst stark differiren. Zwei solche Substanzen eignen sich denn auch besser dazu, eventuell eine neue Formel aufzustellen. Zweitens ist die Refractionsconstante A stets nach der einfachen Cauchy'schen Formel $n = A + (B/\lambda^2)$ berechnet, worin λ die äussere Wellenlänge bedeutet. Nur in einem Falle, nämlich bei Schwefelkohlenstoff hat Hr. Wüllner dieselbe nach der dreiconstantigen Cauchy'schen Dispersionsgleichung $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4$ bestimmt. Diese beiden Gleichungen sind aber aus der allgemeinen Cauchy'schen Formel:

$$\frac{1}{n^2} = a + b\frac{n^2}{\lambda^2} + c\frac{n^4}{\lambda^4}$$

unter ganz besonderen Voraussetzungen abgeleitet, deren Zulässigkeit schon von Hrn. Christoffel[1]) bestritten worden ist. Später hat Hr. Ketteler[2]) an zahlreichen Beispielen dargethan, dass selbst die strenge Cauchy'sche Formel nicht ausreichend ist, die Dispersion darzustellen und noch weit weniger die vorhin genannten. Er führt ebendaselbst die Gleichung:

$$\frac{1}{n^2} = \varkappa\lambda^2 + a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4}; \qquad l = \frac{\lambda}{n}$$

an, durch welche die Dispersion dargestellt werden könne, findet also, dass der strengen dreiconstantigen Cauchy'schen Formel noch ein Glied zuzufügen sei, welches l^2 im Zähler enthält. Es wäre also möglich, dass die nach der Ketteler'schen Dispersionsformel berechnete Constante $A = \sqrt{1/a}$ sich anders gegen eine der drei aufgestellten Formeln verhält, wenngleich andererseits A alsdann die Bedeutung verliert, die Grenze zu sein, welcher sich die Brechungsexponenten von Strahlen mit grosser Wellenlänge nähern.

Diese beiden angeführten Punkte veranlassten Hrn. Prof. Voigt, mir eine neue Untersuchung vorzuschlagen und zu

1) Christoffel, Pogg. Ann. **117.** p. 27. 1862.
2) Ketteler, Pogg. Ann. **140.** p. 1. 1870.

Beobachtungen Gemische aus Anilin und Alkohol zu empfehlen. Das anfangs statt des Anilins in Aussicht genommene Cassiaöl mit noch höherem Brechungsexponenten musste verworfen werden, weil es sich herausstellte, dass Cassiaöl den violetten Streifen des Wasserstoffspectrums absorbirte.

Indem ich zur Beschreibung meiner Beobachtungen übergehe, schicke ich voraus, dass dieselben zum Unterschiede von denjenigen der oben genannten Herren sämmtlich bei nahezu constanter Temperatur, und zwar in der Nähe von 16,3° C. gemacht und auf 16,3° C. reducirt wurden. Die grössten Abweichungen betrugen 0,4° nach beiden Seiten hin, meistens nur 0,2° und darunter. Die Methode zur Bestimmung der Brechungsexponenten war die der kleinsten Ablenkung. Zu den Messungen der Winkel diente ein vortreffliches Spectrometer von Hrn. Heyde in Dresden. Die Theilung desselben gab direct 10′ an. Die genauere Ablesung erfolgte an zwei um 180° voneinander abstehenden Mikrometermikroskopen bis auf einen Trommeltheil oder 2″. Das Fadenkreuz des Fernrohres wurde so gestellt, dass der verticale Faden parallel der Spalte war. Zur Aufnahme der Flüssigkeit diente ein Hohlprisma von Steinheil (die planparallelen Verschlussplatten durch blosse Adhäsion festgehalten). Der Parallelismus der Platten war so vollkommen, dass die durch das leere Prisma erzeugte Ablenkung sich der Beobachtung entzog. Da die Platten während der ganzen Untersuchung nicht abgenommen wurden, so war der brechende Winkel constant, er betrug 60° 8′ 42″. In der zum Füllen des Prismas dienenden Oeffnung wurde mittels eines Korkes ein Thermometer befestigt. Dieser Korkverschluss erwies sich gleichzeitig als ausreichend, jede Verdunstung der Flüssigkeit zu verhindern. Zur Verhütung von Verschiebungen wurde das Prisma auf dem Tischchen mittels Talg befestigt. Die genaue Einstellung des Fernrohres senkrecht zur Drehungsaxe, ferner die des Prismas u. s. w. wurde nach der bekannten Methode bewirkt. Den Beobachtungen wurden die drei Strahlen α β γ des Wasserstoffspectrums und ausserdem die Natronlinie D unterworfen.

Diese letztere zeigte sich bei Anilin und den anilinhaltigen Gemischen deutlich in zwei Streifen gesondert, während sie bei Alkohol und den an Alkohol reicheren Gemischen in eine Linie zusammenschmolz. Die Einstellung des Fadenkreuzes geschah stets auf die Mitte des Bildes, also bei der Natronlinie im Falle zweier Streifen zwischen dieselben. Für jede Lichtlinie wurden meistens vier Beobachtungen gemacht, und zwar in folgender Reihenfolge: zuerst zwei Beobachtungen von D, dann viermal immer abwechselnd $\alpha\ \beta\ \gamma$ und schliesslich wieder einige Beobachtungen für D. Es wurde ferner immer der doppelte Ablenkungswinkel 2δ bestimmt. Das zur Bestimmung der Temperatur im Prisma benutzte Thermometer war in Fünftelgrade eingetheilt und die Theilung so gross, dass man die Temperatur auf 0,02° schätzen konnte.

Die Herstellung der Gemische geschah mit der Waage und die Bestimmung der Dichtigkeit mittelst eines Pyknometers von ca. 25 ccm Inhalt und der Waage und ebenfalls für die Temperatur von 16,3°. Das Pyknometer wurde zu dem Zwecke in ein Wasserbad von 16,3° C. gestellt, welches mittelst einer kleinen Turbine in stetiger Bewegung erhalten wurde. Sämmtliche Gewichte wurden auf den luftleeren Raum reducirt und die Dichtigkeit in Bezug auf Wasser von 16,3° C. angegeben.

Ich will jetzt noch kurz der Hauptschwierigkeiten Erwähnung thun, die sich im Laufe meiner Untersuchung einstellten, und der Art und Weise der Abhilfe.

1. Wurde die Flüssigkeit im Prisma durch Erwärmung auf die erforderliche Temperatur von 16,3° gebracht, und war es auch nur durch eine um 1° und ohne Einwirkung von directen Wärmestrahlen, so wurde das Bild trübe und erst nach einiger Zeit (ca. $^1/_2$ Stunde) wieder klar, ein Zeichen dafür, dass die Temperatur in der Flüssigkeit merklich constant war. Indessen zeigten dann eine halbe Stunde und länger fortgesetzte Beobachtungen eines Strahles eine stetige Aenderung der auf 16,3° reducirten Brechung nach derselben Seite hin. Erst später wurde dieselbe constant. Die Ursache schrieb ich dem Umstande zu, dass es nach

der Aenderung der Temperatur einer so geraumen Zeit bedurfte, bis die Temperatur der Flüssigkeit und des Quecksilbers dieselbe waren; vorher waren also die Temperaturcorrectionen unrichtig bestimmt. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, füllte ich am Tage vorher das Prisma und stellte der ganzen Apparat zur Beobachtung bereit, liess alsdann des Abends das Zimmer erwärmen, sodass sich am Morgen die gewünschte Temperatur von nahe 16,3^{0} vorfand, die dann noch geraume Zeit vor Beginn der Beobachtungen nach Bedürfniss regulirt wurde.

2. Die Reinigung des Prismas mit absolutem Alkohol und nachherigem Trocknen durch Lufteinblasen stellte sich als lange nicht ausreichend heraus. Es muss sich gewissermassen Flüssigkeit in die Poren des mattgeschliffenen Glases einsaugen, welche erst nach langer Zeit, mitunter nach acht Stunden und noch mehr, sich löst. Da ich diese Thatsache erst im Laufe meiner Untersuchung feststellte, so mussten alle vorher gemachten Beobachtungen als unzuverlässige verworfen werden. Der Sache selbst wurde dadurch abgeholfen, dass ich ca. zwölf Stunden vorher das Prisma mit einem Gemisch von nahezu derselben Zusammensetzung wie das zu untersuchende füllte, dasselbe nachher entfernte und mit dem definitiv zu beobachtenden Gemisch frisch füllte.

3. Die Verdunstung, resp. das Wasseraufsaugen des Alkohols, wenn derselbe mit der Luft in Berührung kam, wie z. B. beim Füllen des Pyknometers, zeigte sich von so starkem Einfluss, dass dieselbe grössere Vorsicht gebot. Es wurde daher ein Heber benutzt, dessen einen Schenkel ich mittelst Gummischlauch fest mit dem einen Röhrchen des Pyknometers verband, und durch welchen alsdann das letztere gefüllt wurde. Dieselbe Vorrichtung benutzte ich zum Füllen des Prismas.

4. Ein weiterer Uebelstand zeigte sich darin, dass das Bild manchmal überhaupt nicht ganz klar wurde. Obgleich dies an den Strahlen α β γ kaum wahrzunehmen war, so zeigte es sich doch deutlich an der Natronlinie, wenn diese, wie bei Anilin, aus zwei Streifen bestand. Es gesellte sich dann nämlich zu diesen beiden noch ein dritter, weniger

heller Streifen, der das ganze Bild unklar machte und das Einstellen sehr erschwerte. Dass dies nur von Temperaturdifferenzen in der Flüssigkeit herrühren konnte, bestätigte ich dadurch, dass ich die Flüssigkeit schüttelte, wodurch wieder ein klares Bild, aus zwei hellen Streifen bestehend, hervortrat. Diesem Uebelstande konnte ich nicht abhelfen, und derselbe dürfte auch die Hauptursache der Beobachtungsfehler sein.

Ich bin über die genannten Schwierigkeiten nicht stillschweigend hinweggegangen, weil ihre Mittheilung bei ähnlichen Untersuchungen doch vielleicht als Anhaltepunkt dienen könnte. Ich selbst habe solche und ähnliche Angaben oft vermisst. Erscheinungen an dem Geissler'schen Rohre, wie Hr. Wüllner sie beobachtet, sind bei mir nicht vorgekommen. Der violette Streifen γ war allerdings auch nicht immer gleich hell, dies war aber wohl hauptsächlich der Stärke der Batterie und dem Gemisch selbst zuzuschreiben, indem sich bei Anilin diese Linie weniger hell zeigte, als bei Alkohol.

In der folgenden Tabelle I (p. 56) sind v_1 und v_2 die genauen Volumenverhältnisse $p_1/d_1 : p_2/d_2$ des im Gemisch enthaltenen Anilins und Alkoholes; das Gemisch selbst ist in der Rubrik „Substanz" z. B. mit 1 An.: 1 Al. bezeichnet, wenn dasselbe nahezu diese Volumenzusammensetzung hat. Die Brechungsexponenten sind mit n und zugefügtem Index, welcher den betreffenden Lichtstrahl angibt, und die Dichtigkeit mit d bezeichnet. A bedeutet die Constante $\sqrt{1/a}$ der Ketteler'schen Formel, A_1 die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Constante a_1 der einfachen Cauchy'schen Gleichung:

$$n = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{c_1}{\lambda^4}$$

und A_2 die Constante $\sqrt{1/a}$ der strengen Cauchy'schen Formel:

$$\frac{1}{n^2} = a + \frac{b n^2}{\lambda^2} + \frac{c n^4}{\lambda^4}.$$

Ich habe mich nicht mit der Ketteler'schen Constante A allein begnügt, weil ich prüfen wollte, ob sich dieselbe

thatsächlich anders verhält, wie A_1 und A_2. Die Grösse A_2 ist nicht nach der Methode der kleinsten Quadrate, sondern in der Weise bestimmt, dass ich dieselbe aus den vier Combinationen von je drei Strahlen berechnet und aus den vier erhaltenen Werthen das Mittel genommen habe. Es lässt sich dies nämlich ohne bedeutende Rechnung machen, wenn man die vorher bestimmten Werthe der Ketteler'schen Constanten dazu benutzt. Tab. II (p. 56) enthält für alle Gemische die Constanten der Ketteler'schen und Cauchy'schen Dispersionsformel, Tab. III (p. 57) die nach dem im Eingang gegebenen Formeln (II) und (III) berechneten Werthe der Grössen n und A verglichen mit den beobachteten.

Das Zeichen Δ bedeutet die Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung. Bei der Berechnung dienten folgende Zahlen als Verhältnisse der Wellenlängen:

$$\lambda_\alpha = 2{,}4263\,,\quad \lambda_D = 2{,}1786\,,\quad \lambda_\beta = 1{,}7973\,,\quad \lambda_\gamma = 1{,}6043\,.$$

Es sind λ_α, λ_D, λ_β den Angaben des Hrn. Ångström[1]) und λ_γ der Abhandlung des Hrn. Wüllner entnommen.

Bevor ich die genauere Besprechung der Tabelle beginne, will ich zunächst den Genauigkeitsgrad angeben, welcher den Beobachtungen beizulegen ist. Da ich bei nahezu constanter Temperatur beobachtet habe, so lassen sich die vom Einstellen auf das Minimum und von der Temperaturablesung herrührenden Beobachtungsfehler zusammen angeben. Die Abweichungen bei den für jeden Strahl gemachten vier Beobachtungen betrugen meistens nur zwei bis drei Trommeltheile, im Maximum sechs, für den doppelten Ablenkungswinkel 2δ. Der mittlere Fehler von δ dürfte also hierdurch auf einen Trommeltheil reducirt sein, wodurch der Brechungsexponent um weniger als eine Einheit der fünften Stelle beeinflusst wird. Der brechende Winkel wurde aus mehreren Beobachtungen als Mittel berechnet und kann, da die Beobachtungen selbst nur um höchstens zwei Trommeltheile abweichen, der Fehler als ohne Einfluss auf den eigentlichen Zweck der Untersuchung betrachtet werden, weil er sämmtliche Brechungsexponenten in demselben Sinne beeinflusst.

1) Ångström, Pogg. Ann. **123**. p. 489. 1864.

Tabelle I.

Substanz	Beobachtete Werthe									
	v_1	v_2	d	n_α	n_D	n_β	n_γ	Ketteler A	Cauchy A_1	Cauchy A_2
Anilin . .	—	—	1,02478	1,58135	1,58818	1,60632	1,62271	1,55631	1,55781	1,55618
3 An. : 1 Al.	3,01029	1,00000	0,97628	1,52890	1,53443	1,54890	1,56186	1,50981	1,50951	1,50844
2 An. : 1 Al.	2,00000	1,00015	0,95888	1,51088	1,51596	1,52921	1,54104	1,49365	1,49297	1,49206
1 An. : 1 Al.	1,00000	1,00147	0,92284	1,47465	1,47886	1,48979	1,49943	1,46025	1,45948	1,45889
1 An. : 2 Al.	1,00000	2,01369	0,88467	1,43757	1,44095	1,44960	1,45713	1,42634	1,42509	1,42476
1 An. : 3 Al.	1,00000	3,03600	0,86470	1,41882	1,42178	1,42932	1,43580	1,40818	1,40766	1,40744
Alkohol . .	—	—	0,80810	1,36225	1,36403	1,36836	1,37187	1,35549	1,35498	1,35495

Tabelle II.

Substanz	Const. der Ketteler'schen Dispersionsformel $\frac{1}{n^2} = a + \frac{b n^2}{\lambda^2} + c \frac{n^4}{\lambda^4} + k \frac{\lambda^2}{n^2}$				Const. der Cauchy'schen Formel $n = a_1 + \frac{b_1}{\lambda^2} + \frac{c_1}{\lambda^4}$		
	a	$-b$	$-c$	k	a_1	b_1	c_1
Anilin . .	0,41287	0,02935	0,00295	0,00001	1,55781	0,11574	0,13151
3 An. : 1 Al.	0,43869	0,02687	0,00384	0,00015	1,50951	0,09752	0,09529
2 An. : 1 Al.	0,44823	0,02581	0,00414	0,00018	1,49297	0,09060	0,08470
1 An. : 1 Al.	0,46897	0,02430	0,00411	0,00016	1,45948	0,07836	0,06259
1 An. : 2 Al.	0,49154	0,02194	0,00394	0,00019	1,42509	0,06606	0,04186
1 An. : 3 Al.	0,50429	0,02178	0,00293	0,00009	1,40766	0,06031	0,03108
Alkohol . .	0,54426	0,01772	0,00010	0,00007	1,35498	0,04217	0,00328

Tabelle III.

Substanz	Werthe, berechnet nach der Formel (II)													
	n_α	n_D	n_β	n_γ	A	A_1	A_2	$-\Delta n_\alpha$	$-\Delta n_D$	$-\Delta n_\beta$	$-\Delta n_\gamma$	$-\Delta A$	$-\Delta A_1$	$-\Delta A_2$
3 An. : 1 Al.	1,53057	1,53618	1,55099	1,56426	1,50994	1,51095	1,50971	167	175	209	240	13	144	127
2 An. : 1 Al.	1,51282	1,51801	1,53167	1,54387	1,49371	1,49455	1,49344	194	205	246	283	6	158	138
1 An. : 1 Al.	1,47670	1,48104	1,49239	1,50245	1,46064	1,46114	1,46030	205	218	260	302	39	166	141
1 An. : 2 Al.	1,43937	1,44285	1,45186	1,45972	1,42641	1,42657	1,42601	180	190	226	259	7	148	125
1 An. : 3 Al.	1,42026	1,42331	1,43113	1,43790	1,40887	1,40886	1,40843	144	153	181	210	69	120	99

Substanz	Werthe, berechnet nach der Formel (III)													
	n_α	n_D	n_β	n_γ	A	A_1	A_2	Δn_α	Δn_D	Δn_β	Δn_γ	ΔA	ΔA_1	ΔA_2
3 An. : 1 Al.	1,52789	1,53335	1,54771	1,56055	1,50777	1,50871	1,50754	101	108	119	131	204	80	90
2 An. : 1 Al.	1,50963	1,51463	1,52777	1,53946	1,49112	1,49188	1,49085	125	133	144	158	253	109	121
1 An. : 1 Al.	1,47308	1,47724	1,48802	1,49750	1,45770	1,45813	1,45736	157	162	177	193	255	135	153
1 An. : 2 Al.	1,43618	1,43950	1,44801	1,45537	1,42383	1,42385	1,42343	139	145	159	176	251	124	133
1 An. : 3 Al.	1,41759	1,42051	1,42791	1,43427	1,40669	1,40668	1,40625	123	127	141	153	149	103	119

Der durch die Messung bedingte mittlere Fehler würde also eine Einheit der fünften Decimale nicht überschreiten, wenn nicht der schon erwähnte Uebelstand des zuweilen unklaren Bildes einträte. Um hierüber eine Vorstellung zu erhalten, habe ich Versuche mit Anilin zu verschiedener Zeit gemacht. Die Brechung erwies sich merklich als dieselbe. Dagegen erhielt ich in den einzelnen partiellen Dispersionen, wie $n_D - n_\alpha$, etc. Differenzen, welche die vorher angeführten Beobachtungsfehler überschritten, und die ich durch jenen Uebelstand erkläre. Am meisten wich, wie zu erwarten war, die Natronlinie ab. Die an den Strahlen α β γ beobachteten Differenzen, obgleich an diesen, wie vorhin bemerkt, die Unklarheit des Bildes wenig wahrzunehmen war und die Einstellung auch weiter nicht erschwert wurde, erkläre ich mir dadurch, dass das Bild doch bei Beobachtungen an verschiedenen Tagen nicht immer in der gleichen Weise scharf ausgeprägt ist (namentlich bei H_γ), und dass man geneigt ist, bei einer und derselben Beobachtungsreihe immer auf eine bestimmte Stelle des Fadenkreuzes einzustellen, die aber nicht immer die Mitte des Bildes ist. Hierdurch werden dann jene bald hintereinander gemachten vier Beobachtungen jedes Strahles nahezu gleich, ohne indess immer richtig zu sein. Ich habe mich überzeugt, dass es nicht zu niedrig gegriffen ist, wenn ich den hierdurch bedingten Beobachtungsfehler auf drei Trommeltheile für δ, d. h. auf ca. zwei Einheiten der fünften Decimale für n schätze. Hiernach mag es vielleicht scheinen, dass es überflüssig gewesen ist, für jeden Strahl vier Beobachtungen zu machen, dagegen kann ich aber anführen, dass dies zum Theil deshalb geschehen ist, um eine Controle zu haben, ob während der Beobachtungen auch wirklich die Temperatur der Flüssigkeit und des Thermometers dieselbe war.

Weitere, die Untersuchung beeinflussende Fehler, können bei der Dichtigkeitsbestimmung und der Herstellung des Gemisches gemacht werden. Ich habe gefunden, dass diese Fehler den nach den Formeln (II) und (III) berechneten Werth N um eine Grösse unsicher machen, die im Maximalfalle einen Werth von einundeinhalb Einheiten erreichen kann. Es

ist dabei aber zu bemerken, dass durch diesen Fehler alle Beobachtungen mit demselben Gemisch in gleicher Weise, und dass ferner die verschiedenen Gemische durch den von d_1 und d_2 herrührenden Theil in demselben Sinne beeinflusst werden.

Alles zusammen genommen will ich im ungünstigsten Falle den beobachteten Brechungsexponenten eine Unsicherheit von drei Einheiten der fünften Decimale für Anilin und Alkohol und von vier Einheiten für deren Gemisch zugestehen, will aber gleichzeitig erwähnen, dass sie in den meisten Fällen sicherer sein werden.

Indem ich jetzt auf den Inhalt der Tabelle eingehe, hebe ich zunächst hervor, dass in Uebereinstimmung mit dem auf p. 49 Erwähnten auch bei meinen Gemischen die Formel (II) negative und (III) positive Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung ergeben hat. Man sieht ferner, dass die Differenzen in beiden Fällen grösser werden, je mehr man sich dem Gemisch 1 An.: 1 Al. nähert, und je weiter man sich in den stärker gebrochenen Theil des Spectrums begibt. In letzterer Hinsicht scheint aber die Formel (III) einen Vorzug vor II zu haben, indem bei ihr die Zunahme der Abweichungen eine bedeutend langsamere ist. Die Frage, welche von den beiden Formeln die Beobachtungen genauer wiedergibt, lässt sich wohl kaum nach dieser Tabelle beantworten, da die Differenzen, welche (III) liefert, doch nicht soviel kleiner als nach (II) sind, als dass man mit Sicherheit daraus eine Folgerung ziehen könnte.

Die nach den Cauchy'schen Gleichungen bestimmten Constanten A_1 und A_2 schliessen sich dem besprochenen Verhalten der Brechungsexponenten selbst an, was auch in der Natur der Sache liegt, da sie den Brechungsexponenten für den Grenzstrahl darstellen.

In dem System der nach der Ketteler'schen Dispersionsformel berechneten Constanten k erblickt man eine Unregelmässigkeit, die mich zu untersuchen veranlasste, wie sich denn die Ketteler'schen Constanten gegen die Beobachtungsfehler verhalten. Von den erhaltenen Resultaten will ich hier nur diejenigen anführen, welche sich bei den Grund-

stoffen Anilin und Alkohol ergaben, indem diese genügen, durch Interpolation auch die übrigen annähernd kennen zu lernen. Es ergibt sich für Anilin:

$$\frac{\partial A}{\partial n_\alpha} = -30 \quad \frac{\partial A}{\partial n_D} = +55 \quad \frac{\partial A}{\partial n_\beta} = -36 \quad \frac{\partial A}{\partial n_\gamma} = +11$$

$$\frac{\partial b}{\partial n_\alpha} = -21 \quad \frac{\partial b}{\partial n_D} = +42 \quad \frac{\partial b}{\partial n_\beta} = -31 \quad \frac{\partial b}{\partial n_\gamma} = +13$$

$$\frac{\partial c}{\partial n_\alpha} = +10 \quad \frac{\partial c}{\partial n_D} = -19 \quad \frac{\partial c}{\partial n_\beta} = +15 \quad \frac{\partial c}{\partial n_\gamma} = -6$$

$$\frac{\partial k}{\partial n_\alpha} = -4 \quad \frac{\partial k}{\partial n_D} = +6 \quad \frac{\partial k}{\partial n_\beta} = -4 \quad \frac{\partial k}{\partial n_\gamma} = +1,$$

und für Alkohol:

$$\frac{\partial A}{\partial n_\alpha} = -34 \quad \frac{\partial A}{\partial n_D} = +65 \quad \frac{\partial A}{\partial n_\beta} = -48 \quad \frac{\partial A}{\partial n_\gamma} = +18$$

$$\frac{\partial b}{\partial n_\alpha} = -50 \quad \frac{\partial b}{\partial n_D} = +102 \quad \frac{\partial b}{\partial n_\beta} = -85 \quad \frac{\partial b}{\partial n_\gamma} = +34$$

$$\frac{\partial c}{\partial n_\alpha} = +29 \quad \frac{\partial c}{\partial n_D} = -62 \quad \frac{\partial c}{\partial n_\beta} = +58 \quad \frac{\partial c}{\partial n_\gamma} = -26$$

$$\frac{\partial k}{\partial n_\alpha} = -5 \quad \frac{\partial k}{\partial n_D} = +8 \quad \frac{\partial k}{\partial n_\beta} = -5 \quad \frac{\partial k}{\partial n_\gamma} = +2.$$

Aus diesen Werthen und aus der angegebenen Grösse der Beobachtungsfehler ist allerdings ersichtlich, dass sich jene Unregelmässigkeiten wohl durch die Ungenauigkeit der Beobachtungen erklären lassen.

Die Werthe für $\partial A/\partial n_\alpha$ etc. zeigen, dass bei dem Genauigkeitsgrad meiner Beobachtungen A selbst sehr leicht um eine Einheit der dritten Stelle und noch mehr unsicher werden kann, und dass somit die ΔA, welche die Formel (II) liefert, sich innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler befinden. Man könnte daher in Zweifel sein, ob nicht wirklich die Gleichung $(A-1)/d =$ Const. als streng erfüllt anzunehmen sei. Selbst die Thatsache, dass sämmtliche ΔA positiv sind, würde nichts daran ändern, denn dies könnte ja von der Ungenauigkeit der Werthe A für Anilin und Alkohol herrühren, welche sämmtliche Gemische in demselben Sinne beeinflussen. Ich glaube indes, diese Annahme durch folgende Betrachtung als unwahrscheinlich darzustellen, wenn ich sie auch nicht widerlegen kann. Die Rubrik für k

zeigt, dass entweder das für Anilin oder das für Alkohol berechnete k zu klein sein wird, und die Gleichungen zeigen, dass dann auch das entsprechende A zu klein ausgefallen sein wird. Dadurch werden aber die Differenzen ΔA bedeutend grösser. Die zu Formel (III) gehörigen ΔA werden kleiner, und es ist leicht möglich, dass in Wirklichkeit auch diese Differenzen kleiner ausfallen wie die ΔA nach (II), analog Δn und ΔA_1. Jedenfalls aber sieht man, dass weit genauere Beobachtungen nöthig sind, wenn man die Constante A der Ketteler'schen Formel einer näheren Untersuchung unterwerfen will. Es würde dies z. B. dadurch zu erreichen sein, dass man viele Lichtstrahlen mit dem möglichen Grad von Genauigkeit beobachtet und dann die Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt. Diese Methode ist ja auch von Hrn. Ketteler bei der Prüfung seiner Formel in Anwendung gebracht und erst dadurch z. B. die Existenz von k begründet, denn eine Bestimmung aus vier Linien gibt über dasselbe keinen Aufschluss, da es selbst nur Werthe hat, die in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen. Aus dem Umstande, dass k stets positiv ist, lässt sich wenig schliessen, da ja auch die Ungenauigkeit der Wellenlänge λ ins Spiel kommt, welche überall, wenn auch nicht erheblich, so doch in demselben Sinne wirkt. Die Constanten der Cauchy'schen Formeln sind lange nicht in demselben Grade empfindlich gegen die Beobachtungsfehler; es ergibt sich hier $\partial A / \partial n$ im Durchschnitt gleich ca. 5. Ob nun die grossen Aenderungen bei der Ketteler'schen Formel nur durch die Constante k bedingt sind, oder ob dieselben davon herrühren, dass man überhaupt eine Constante mehr in die Dispersionsgleichung aufnimmt, habe ich nicht festgestellt.

Bei Anwendung der Formel (I) ergeben sich Differenzen, welche sieben Einheiten der dritten Decimale erreichen, und dies ist der Grund, weshalb ich dieselben nicht in die Tabelle aufgenommen habe.

Was die Aufstellung einer neuen Formel anbelangt, so will ich hier nur einige Andeutungen geben, da ich gedenke, in kurzer Zeit auf eine Untersuchung dieser Art zurückzu-

kommen. Man hat für diesen Zweck einen Anhaltepunkt durch den mehrfach erwähnten Umstand, dass die Formel (II) zu grosse, und die Formel (III) zu kleine Werthe für N ergibt. Es ist also darauf zu achten, dass man der Relation (II) eine Formel zur Seite stellt, für welche N kleiner, oder der Relation (III) eine solche, für welche N grösser ausfällt. Diese Bedingung wird erfüllt von der Formel:

$$\frac{\sqrt{n}-1}{a} = \text{Const., resp. } \frac{n-1}{n+2}\frac{1}{d} = \text{Const.,}$$

welche aus (II) und (III) dadurch entstehen, dass man n für n^2 setzt. Ich habe mich überzeugt, dass diese Formeln auch in mancher anderen Hinsicht bessere Resultate liefern als (II) und (III). So werden z. B. bei einem und demselben Gemisch die Differenzen Δ für das ganze Spectrum constanter. Ebenso bleiben die Differenzen für einen und denselben Lichtstrahl constanter, wenn man von den anilinhaltigeren Gemischen allmählich zu den alkoholreicheren übergeht. Nur ein Nachtheil zeigt sich darin, dass sie nicht mehr wie die Formeln (II) und (III) beim Gemisch 1 An.: 1 Al. die grössten Differenzen liefern, d. h. dass sie nicht mit demselben Grade von Genauigkeit für die anilinhaltigeren, wie für die entsprechenden alkoholreicheren Gemische anwendbar sind. Aus diesem Grunde verzichte ich auch auf die Aufstellung einer vollständigen Tabelle und begnüge mich, zum Vergleich die Werthe anzugeben, welche sich für die Differenzen ΔA_1 und ΔA_2 nach der Formel $(\sqrt{n}-1)/d =$ Const. ergeben.

	3 An. : 1 Al.	2 An. : 1 Al.	1 An. : 1 Al.	1 An. : 2 Al.	1 An. : 3 Al.
ΔA_1	−50	−45	−33	−29	−19
ΔA_2	−33	−25	− 8	− 6	+ 2

IV. *Bemerkungen zu Hrn. E. Lommel's Abhandlung „Ueber die Newton'schen Staubringe"*[1]; *von Karl Exner.*

Um die seit längerer Zeit mit Hrn. Lommel über die Erklärung des Phänomens der Staubringe geführte Polemik zu einem endlichen Schlusse zu bringen, habe ich in meiner letzten Publication über diesen Gegenstand[2]) die beiden von Hrn. Lommel und mir gegebenen Theorien dieses Phänomens einer Prüfung durch messende Versuche unterworfen. Die angestellten Messungen ergaben die Unrichtigkeit der von Hrn. Lommel aus seiner Theorie abgeleiteten Sätze, hingegen die Richtigkeit meiner eigenen Formeln.

So einfach diese Sachlage ist, hat doch Hr. Lommel geglaubt, Folgendes erwidern zu sollen: „Ein Haupteinwand, mit welchem sich Hr. Exner in seiner letzten Publication vorzugsweise beschäftigt, besteht im Folgenden. Indem Hr. Exner ohne weiteres $N_1 = N_2$ setzt, folgert er, angeblich aus meiner Theorie, in der That aber aus dieser seiner unrichtigen Unterstellung, dass, wenn die Bestäubungsfläche aus der Parallellage in die schiefste Lage übergeführt wird, das Phänomen einfach ungeändert bleiben müsste. Diese mir untergeschobene Theorie, mit welcher ich selbst aber nichts zu thun habe, widerlegt nun Hr. Exner, indem er numerische Werthe daraus ableitet und diese unter der unrichtigen Bezeichnung „„nach Lommel's Theorie"" mit beobachteten Werthen zusammenstellt. Die so berechneten Werthe stimmen allerdings mit den Beobachtungen nicht überein; wohl aber thun dies die wirklich nach meiner Theorie berechneten."

Diese Darstellung entspricht nicht dem Sachverhalte: Wenn ich im 11. Bande der Annalen $N_1 = N_2$ gesetzt habe, so steht dies in keinem Zusammenhange mit den numerischen Werthen, welche ich im 17. Bande der Annalen unter der Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie", mit den beobachte-

---

1) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 613. 1883.

2) Exner, Wied. Ann. 17. p. 149. 1882.

ten Werthen zusammengestellt habe. Ich habe bei dieser experimentellen Prüfung überhaupt keine Consequenz aus der Theorie des Hrn. Lommel gezogen, vielmehr durch messende Versuche in directester Weise und ohne jede theoretische Zwischenbetrachtung einen Satz widerlegt, welchen Hr. Lommel mit Betonung als eine Consequenz seiner Theorie hingestellt hat. Wenn Hr. Lommel behauptet, dass die „wirklich" nach seiner Theorie berechneten Werthe mit den Beobachtungen übereinstimmen, so beruht dies auf einem lapsus memoriae, da der Satz, auf welchen sich jene Werthe beziehen, von Hrn. Lommel selbst seither als unrichtig zurückgenommen worden ist.

Um alles dies deutlicher zu machen, habe ich in Erinnerung zu bringen, wie jene Zahlen entstanden sind, welche unter der Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie", mit den beobachteten Werthen zusammengestellt worden sind.

Hr. Lommel[1]) hat zuerst auf Grund von Beobachtungen den Satz aufgestellt, nach welchem die Durchmesser der Ringe unabhängig sein sollen von dem zwischen der getrübten und spiegelnden Fläche enthaltenen Winkel und nur bedingt durch die mittlere Entfernung der wirksamen Staubtheilchen von der Spiegelfläche, und hat diesen Satz sodann theoretisch abgeleitet.[2]) Hr. Lommel hat in einer späteren Abhandlung auf Grund „zahlreicher Versuche" und ausführlichster Beschreibung derselben diesen Satz wiederholt[3]), in dem Capitel „Diffusions- oder Beugungstheorie" den Versuch als ein experimentum crucis für die Richtigkeit seiner Theorie in Anspruch genommen und in dem Capitel „Theorie der Newton'schen Staubringe", diesen Satz neuerdings aus seiner Theorie abgeleitet und wie folgt ausgesprochen[4]): „Wir sehen also, dass in voller Uebereinstimmung mit dem Ergebniss der Beobachtungen und Messungen die Durchmesser der Ringe unabhängig sind von dem zwischen der bestäubten und spiegelnden Fläche enthaltenen Winkel und nur bedingt

1) Lommel, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 237 u. 238. 1878.
2) Lommel, l. c. p. 240 u. 241.
3) Lommel, Wied. Ann. 8. p. 195, 196 u. 197. 1879.
4) Lommel, l. c. p. 234.

werden durch den Abstand des Schwerpunktes (Mittelpunktes) der Bestäubung von der Spiegelfläche."

Es kann also keinem Zweifel unterliegen, dass Hr. Lommel den Satz, nach welchem bei der Drehung des Bestäubungsblättchens um seinen Mittelpunkt die Radien der Ringe ungeändert bleiben sollen, wiederholt als eine Consequenz seiner Theorie aufgestellt und behauptet hat, dass dieses sein theoretisches Resultat durch die messenden Versuche bestätigt wurde. Da mich meine eigene Theorie diesen Satz als falsch erkennen liess[1]), war es eben dieser Satz des Hrn. Lommel, welchen ich in meiner letzten Publication durch messende Versuche geprüft habe.[2])

Es wurden[3]) die Radien der Ringe bei der Parallelstellung des Blättchens gemessen, sodann das Blättchen um seinen Mittelpunkt gedreht und neuerdings die Radien der Ringe gemessen. Die Radien der Ringe sollten nach Hrn. Lommel's obigem Satze nach der Drehung dieselben sein wie vor der Drehung, nach meiner Formel[4]) hingegen andere Werthe annehmen. Demgemäss wurden[5]) unter die Bezeichnung: „Gemessen", die nach der Drehung gemessenen Radien gesetzt, unter die Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie", die vor der Drehung gemessenen, und unter die Bezeichnung: „Nach Exner's Theorie", die sich aus meiner Formel ergebenden.

Es kann demnach auch dies keinem Zweifel unterliegen, dass jener von H. Lommel aufgestellte Satz von mir ohne jede theoretische Zwischenbetrachtung in directester Weise experimentell geprüft worden ist.

Es zeigte sich nun, dass die Radien der Ringe nicht, wie es der Satz des Hrn. Lommel verlangt, ungeändert geblieben waren, vielmehr dass sie sich ungefähr auf die Hälfte ihrer ursprünglichen Grösse reducirt und jene Werthe angenommen hatten, welche sich aus meiner Formel ergeben.

---

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 229. 1880.
2) Exner, Wied. Ann. 17. p. 158. 1882.
3) Exner, l. c. p. 157.
4) Exner, Wied. Ann. 11. p. 229. 1880.
5) Exner, Wied. Ann. 17. p. 158. 1882.

Hiermit ist jedoch die historische Darstellung des Gegenstandes noch nicht erschöpft. Nachdem ich nämlich die Unrichtigkeit jenes Satzes theoretisch und experimentell nachgewiesen hatte, wurde jener Satz von Hrn. Lommel in seiner letzten Publication zurückgenommen, und zwar mit den folgenden Worten[1]: „Die Ringe behalten nämlich nicht, wie ich damals gefunden hatte, beim Drehen der Staubplatte aus der parallelen in die geneigte Lage die gleichen Durchmesser, sondern sie ziehen sich zusammen, ganz in der Weise, wie Hr. Exner angibt. Die Fehlerquelle, welche jenes unrichtige Resultat verschuldete, vermag ich gegenwärtig mit Sicherheit nicht mehr zu eruiren. In diesem, ein Beobachtungsresultat betreffenden Punkte hat also Hr. Exner recht. Nicht so in den übrigen, die Theorie betreffenden Punkten."

Was die „übrigen, die Theorie betreffenden Punkte" anlangt, bedarf die Mittheilung des Hrn. Lommel einer Berichtigung. Wenn nämlich jenes Beobachtungsresultat trotz der „zahlreichen" vorgenommenen „Beobachtungen und Messungen" unrichtig ist, müssen nothwendig die eben so zahlreichen theoretischen Ableitungen, welche Hr. Lommel für dasselbe gegeben hat, ebenfalls unrichtig sein, und es muss angenommen werden, dass ich die Unrichtigkeit dieser Ableitungen mit Recht behauptet habe.[2])

So geringfügig Hrn. Lommel's Zugeständniss der Unrichtigkeit seines Satzes zu sein scheint, so weitgehend ist es wirklich. Ich erinnere nur daran, dass die von Hrn. Lommel für den Fall gegebene Theorie, wo die beiden Flächen eines Prismas als Bestäubungs- und Spiegelfläche dienen[3]), zu einem Resultate geführt hat, welches jenen von Hrn. Lommel jetzt als unrichtig erkannten Satz als speciellen Fall enthält, indem es in diesen übergeht, sobald man den Brechungsexponenten des Prismas der Einheit gleich setzt. Hr. Lommel gibt also mit der Unrichtigkeit jenes

1) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 617. 1883.
2) Exner, Wied. Ann. 11. p. 231. 1880.
3) Lommel, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 258. 1878.

Satzes zugleich stillschweigend die von mir wiederholt betonte Unrichtigkeit seiner Theorie des Versuches mit dem Prisma zu.

Ich habe Hrn. Lommel's theoretische Ausführungen noch in anderer Richtung durch messende Versuche widerlegt und bin genöthigt, auch auf diese zurückzukommen.

Hr. Lommel hat auf Grund seiner Beobachtungen das folgende Resultat ausgesprochen[1]): „Bedeckt man den mittleren Theil des (schief gegen die Spiegelfläche stehenden) horizontalen Spaltes, sodass an beiden Enden gleiche Stücke offen bleiben, so zeigen sich Ringe mit den nämlichen Durchmessern, als wenn der ganze Spalt oder nur sein mittlerer Theil offen gelassen wird", und hat dieses Beobachtungsresultat auch theoretisch abgeleitet.[2]) Da meine eigene Theorie auch hier zu einem ganz anderen Resultate führte[3]), wiederholte ich auch diesen Versuch des Hrn. Lommel messend, setzte unter die Bezeichnung: „gemessen", jene Werthe der Ringdurchmesser, welche sich ergaben, als die beiden Enden des Bestäubungsspaltes allein wirksam waren, unter die Bezeichnung: „Nach Lommel's Theorie", die der alleinigen Wirksamkeit des mittleren Theiles der Bestäubung entsprechenden Radien der Ringe und unter die Bezeichnung: „Nach Exner's Theorie", die meiner eigenen Formel entsprechenden Werthe.[4])

Man sieht, von einer „untergeschobenen" Theorie kann auch hier nicht die Rede sein, auch hier handelte es sich lediglich um eine experimentelle Prüfung eines von Hrn. Lommel aufgestellten Satzes und um eine Wiederholung eines von Hrn. Lommel angestellten Versuches. Es zeigte sich abermals, dass Hr. Lommel zu einem falschen Beobachtungsresultate gelangt war; und sollte Hrn. Lommel's theoretische Ableitung dieses falschen Resultates richtig sein können?

Hr. Lommel[5]) stellt neuerdings den unrichtigen Satz auf,

1) l. c. p. 238.

2) l. c. p. 240.

3) Exner, Wied. Ann. 11. p. 222. 1880.

4) Exner, Wied. Ann. 17. p. 154 u. 155. 1882.

5) Lommel, Wied. Ann. 18. p. 620. 1883.

nach welchem der beim Durchgange durch eine gleichmässige Bestäubung in irgend einer Richtung gebeugte resultirende Strahl die nämliche Phase haben soll, wie der durch den Mittelpunkt der Bestäubungsfläche in derselben Richtung gebeugte Elementarstrahl. Der neue Beweis enthält in anderer Form denselben Fehlschluss wie der früher gegebene. Dieser Fehlschluss findet sich l. c. p. 619, wo es heisst: „Wählt man nun als Coordinatenanfang die Projection des Mittelpunktes der, z. B. rechtwinkligen, Bestäubungsfläche auf die Spiegelebene, so ist jede der Summen:

$$\sigma_1 = \Sigma \sin(q_1 x_\nu + r_1 y_\nu), \qquad \sigma_2 = \Sigma \sin(q_2 x_\nu + r_2 y_\nu)$$

gleich Null, weil, wenn die Bestäubung gleichförmig ist und aus sehr zahlreichen Körperchen besteht, zu jedem Körperchen mit den Coordinaten x_ν, y_ν eines solchen mit den Coordinaten $-x_\nu$, $-y_\nu$ vorhanden ist. Man hat daher . . . “ Hier sind x_ν, y_ν die Coordinaten des Mittelpunktes irgend eines der Körperchen, welche Hr. Lommel als kugelförmig voraussetzt. Jener Schluss ist ein Fehlschluss, weil die Lage der einzelnen Körperchen als unregelmässig oder zufällig vorausgesetzt ist, also keineswegs jedem Kügelchen, dessen Mittelpunkt die Coordinaten x_ν, y_ν besitzt, ein zweites mit den Coordinaten $-x_\nu$, $-y_\nu$ entspricht. Hr. Lommel stellt eben seinen Satz für eine unregelmässige Bestäubung auf und supponirt während eines Theiles der Rechnung eine regelmässige Bestäubung. Es ist dies gerade so, als wenn Hr. Lommel das Beugungsbild eines aus einer grossen Zahl gleich breiter, paralleler, aber nicht äquidistanter, sondern unregelmässig vertheilter Stäbe berechnen wollte und während der Rechnung den Stäben kleine Verschiebungen ertheilte, durch welche sie äquidistant würden. So klein diese Verschiebungen immer sein mögen, so weiss man doch, dass hierdurch das Beugungsbild in ein vollständig anderes verwandelt wird. Andererseits lässt sich die Unrichtigkeit dieses von Hrn. Lommel aufgestellten Satzes unmittelbar vor jeder Rechnung einsehen: die Lage jedes einzelnen Körperchens ist zufällig. Es folgt, dass für eine gegebene Beugungsrichtung die Phase des diesem Körperchen entsprechenden resultirenden gebeugten Strahles zufällig ist, und hieraus,

dass auch die Phase des von der ganzen Bestäubung herrührenden resultirenden Strahles zufällig ist. Ist sie aber zufällig, d. h. von der zufälligen Vertheilungsweise der Körperchen abhängig, so kann sie nicht identisch sein mit der von der Vertheilungsweise der Körperchen unabhängigen Phase des durch den Mittelpunkt des Umrisses der Bestäubungsfläche gebeugten Strahles.

Hr. Lommel sagt: „Die Theorie des Hrn. Exner, obgleich sie von dem richtigen Grundgedanken der Beugung ausgeht und zu einer Endformel gelangt, welche mit der aus meiner Intensitätsformel durch ein Näherungsverfahren entwickelten identisch ist, ist dennoch verfehlt......"

Ich erwidere: Ich gelangte allerdings zu derselben Intensitätsformel, wie Hr. Lommel in seiner letzten Publication[1]), allein ich gelangte zu dieser Formel zu einer Zeit[2]), da Hr. Lommel noch nicht zu derselben gelangt war, vielmehr das Gesetz der Ringdurchmesser, welches sich aus dieser Formel ergibt, noch theoretisch und experimentell zu widerlegen suchte.[3]) Diese Intensitätsformel, oder vielmehr die allgemeinere[4]), aus welcher sie sich ergibt, repräsentirt die Lösung des Problems der Staubringe, und ich ergreife die Gelegenheit, um meine Priorität in dieser Richtung zu betonen, indem ich zugleich bemerke, dass die Ableitung, welche Hr. Lommel von dieser Intensitätsformel in seiner letzten Publication gibt, keineswegs correct ist, da von einem Satze Verdet's Gebrauch gemacht wird, dessen Unrichtigkeit seither von mir[5]) und Rayleigh[6]) nachgewiesen worden ist.

Hr. Lommel begründet seine oben citirte Behauptung, nach welcher meine Theorie verfehlt sein soll, mit den Worten: „...Denn sie stützt sich auf den Satz, „„die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden

---

1) Lommel, Wied. Ann. **18.** p. 616. 1883.
2) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 227. 1880.
3) Lommel, Wied. Ann. **8.** p. 202 u. 203. 1879.
4) Exner, Wied. Ann. **17.** p. 162. 1882.
5) Exner, Wien. Ber. **76.** p. 522. 1877.
6) Rayleigh, Phil. Mag. (5). **10.** p. 73. 1880.

Strahlen verhalten sich wie incohärente Strahlen, indem sie ihre Intensitäten summiren.“‘ Dieser Satz ist unrichtig....“

Ich erwidere: Dieser Satz ist nur dann unrichtig, wenn er unrichtig verstanden wird. Ich bin jedoch versichert, dass jeder, der nicht nur die citirte Hälfte, sondern den ganzen Satz[1]) sowie seine Ableitung gelesen hat, über den Inhalt desselben vollkommen im Klaren sein wird.

Hr. Lommel fährt fort: „Das wahre Verhalten wird vielmehr durch folgenden Satz ausgedrückt: Die von verschiedenen Theilen der Bestäubung kommenden resultirenden Strahlen verhalten sich wie cohärente Strahlen, welche mit einander interferiren, indem sie ihre Excursionen summiren. Als Resultat dieser Interferenz ergeben sich die oben beschriebenen nur von der Gruppirung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes. Da Hr. Exner die Uebereinanderlagerung elementarer Ringsysteme, die Incohärenz der durch verschiedene Stellen der Bestäubung hervorgebrachten Erscheinungen, die einfache Superposition der Ringsysteme wiederholt betont, kann wohl kein Zweifel übrig bleiben, dass er jene resultirenden Strahlen wirklich für incohärent hält.“

Ich erwidere: Da Hr. Lommel noch immer der Meinung ist, dass in meiner Theorie die von verschiedenen Stäubchen kommenden Strahlen als incohärent behandelt werden, finde ich mich zu der folgenden Erklärung veranlasst. Schon in meiner ersten Abhandlung über den Gegenstand[2]) habe ich diese Strahlen als cohärent behandelt, während im Gegentheile Hr. Lommel dieselben ursprünglich für incohärent hielt, ja diese vermeintliche Incohärenz theoretisch ableitete.[3]) Ich betone meine Priorität in dieser Beziehung. Ich habe ferner diese Strahlen nicht nur stets als cohärent angesehen, ich habe auch das Resultat ihrer Interferenz durch Summation der Excursionen berechnet[4]) und habe so erst theoretisch, dann experimentell das Vor-

1) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 222. 1880.
2) Exner, Wien. Ber. **71.** p. 423. 1875.
3) Lommel, Pogg. Ann. **8.** Ergbd. p. 102. 1878.
4) Exner, Wied. Ann. **11.** p. 218. 1880.

handensein jener „oben beschriebenen nur von der Gruppirung der Stäubchen abhängigen Modificationen des Beugungsbildes“, die Granulation nämlich, entdeckt, von welcher früher weder Hrn. Lommel's Theorie noch sein Experiment etwas gewusst hatten. Auch in dieser Richtung betone ich meine Priorität.

Indem man die von verschiedenen Stäubchen kommenden Strahlen als cohärent betrachtet, wie man muss, und das Resultat der Interferenz berechnet, findet man, dass in Rücksicht auf die Radien der Ringe das Resultat dasselbe ist, als wenn jene Strahlen incohärent wären. Dieser Umstand mag Hrn. Lommel dahin geführt haben, fortgesetzt zu behaupten, dass ich jene Strahlen für incohärent halte.

Hr. Lommel sagt: „Hr. Exner schliesst seine Abhandlung mit einigen gegen meine Theorie gerichteten Sätzen, welche ich hier zum Schlusse wiederholen will, indem ich nur, wo Hr. Exner sagt: „„es ist unrichtig,““ schreibe: „„es ist richtig““ ......“, und lässt die Aufzählung dreier Sätze folgen.

Ein Vergleich der von Hrn. Lommel aufgezählten Sätze mit den von mir aufgezählten [1]) ergibt die folgenden Resultate. Hrn. Lommel's Aufzählung enthält einen Satz zu wenig. Die Richtigkeit des von mir mit (1) bezeichneten Satzes wurde in der That von Hrn. Lommel anerkannt. Der zweite Satz des Hrn. Lommel ist richtig aber nicht identisch mit dem von mir als unrichtig bezeichneten analogen Satze, indem die zweite Hälfte hier weggelassen ist. Der dritte Satz des Hrn. Lommel ist ebenfalls nicht identisch mit dem von mir als unrichtig bezeichneten analogen Satze. Abgesehen nämlich davon, dass Hr. Lommel infolge einer von meiner Seite erfolgten Richtigstellung in der Formel den Factor $^1/_4$ unterdrückt hat, ist auch in der Formel des Hrn. Lommel die Bedeutung von N_1 und N_2 seither eine andere geworden. Nur der erste der von Hrn. Lommel angeführten Sätze ist demnach identisch mit dem von mir unter (2) als unrichtig bezeichneten Satze, allein ich habe

---

1) Exner, Wied. Ann. 11. p. 236. 1880.

oben gezeigt, dass auch der neue von Hrn. Lommel für diesen Satz gegebene Beweis fehlerhaft ist, indem während eines Theiles der Rechnung für die unregelmässige Bestäubung stillschweigend eine regelmässige supponirt wird.

Ich habe mich im Vorhergehenden auf die unvermeidlichen Bemerkungen beschränkt, einerseits, weil ich es nicht als meine Aufgabe ansehen kann, allen nebensächlichen Ausführungen des Hrn. Lommel prüfend zu folgen, andererseits, weil Hr. Lommel die Richtigkeit der von mir für die schiefe Lage einer rechteckigen Bestäubungsfläche aufgestellten Intensitätsgleichung anerkannt hat, also jedenfalls über das Wesentliche der Sache mit mir einerlei Meinung geworden ist.

Ich lasse eine Zusammenfassung der Resultate folgen, zu welchen mich die Berechnung der Newton'schen Staubringe geführt hat.

1. Wenn die von dem punktförmigen Spalte des Spectralapparates kommenden parallelen Strahlen, nachdem sie von einem ebenen Spiegel nahe normal reflectirt worden und zweimal, vor und nach der Reflexion, durch denselben Bestäubungsraum gegangen sind, sich in der Focalebene des Beobachtungsfernrohres vereinigen, so nimmt man in der Umgebung des Bildes der Lichtquelle ein Beugungsbild wahr.

2. Das Beugungsbild zeigt eine Granulation, d. h. der Uebergang von einem hellen Ringe zu einem folgenden dunkeln besteht nicht in einer continuirlichen Abnahme der Helligkeit, diese geht vielmehr durch zahlreiche, sehr nahe aneinander liegende unregelmässige Maxima und Minima, welche so gedrängt liegen, dass sie nur bei genau punktförmiger Lichtquelle unterschieden werden.

3. Bei der Berechnung des Beugungsbildes macht man von dem Babinet'schen Principe Gebrauch, nach welchem die Wirkung jedes Körperchens so berechnet wird, als wenn es eine Oeffnung wäre.

4. Die Granulation des Beugungsbildes rührt her von der Interferenz der Strahlen, welche von verschiedenen Oeffnungen kommen, hängt also von der unregelmässigen Vertheilung der Körperchen ab. Aendert man die, stets als

überall gleich dicht vorausgesetzte Bestäubung, bei ungeändertem Bestäubungsraum, so ändert sich die Granulation, nicht aber die Lage der Ringe. Da die Vertheilung der Körperchen als zufällig und nicht gegeben vorausgesetzt ist, kann man auch nicht die Intensität in einem gegebenen Punkte des Beugungsbildes berechnen, wohl aber die (mittlere) Intensität an einer gegebenen Stelle desselben.

5. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese mittlere Intensität in der Nähe jedes Punktes des Beugungsbildes gleich ist der Summe der in diesem Punkte von den einzelnen Körperchen für sich hervorgebrachten Intensitäten:

$$J = \Sigma(i). \tag{1}$$

6. Aus Gleichung (1) findet man für einen beliebigen Bestäubungsraum, welcher mit zahlreichen unregelmässig vertheilten und entweder unregelmässig gestalteten oder gleich gestalteten und orientirten Körperchen erfüllt ist:

$$J = \frac{2W}{R}\int\int\int\left(1 + \cos\frac{4\pi x(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}\right)dx\,dy\,dz. \tag{2}$$

Hier ist W die von der Bestäubung entsprechend einer nur einmaligen Beugung hervorgebrachte Intensität, R die Grösse des Bestäubungsraumes, γ und φ die Winkel der einfallenden und der gebeugten Strahlen mit der Spiegelnormale, und es erstreckt sich die Integration über den ganzen Bestäubungsraum. Sind die Körperchen unregelmässig gestaltet, so mimmt W mit wachsendem Beugungswinkel verhältnissmässig langsam ab ohne Maxima und Minima zu zeigen; die Maxima und Minima des Beugungsbildes fallen dann mit jenen des dreifachen Integrales zusammen.

7. Aus der Gl. (2) ergibt sich unmittelbar der folgende Satz: Unter der Voraussetzung unregelmässig gestalteter Körperchen, besteht das Beugungsbild, welche Gestalt immer der Bestäubungsraum habe, aus kreisförmigen Ringen, deren gemeinsamer Mittelpunkt auf die Spiegelnormale (oder ihr Bild) fällt.

8. Hat der Bestäubungsraum die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen eine Seitenfläche mit dem Spiegel parallel ist, so ergibt sich aus (2):

$$(3) \quad J = 2W\left(1 + \frac{\sin\frac{2a\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}}{\frac{2a\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}} \cdot \cos\frac{4e\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}\right),$$

wo a die Seite des Parallelepipeds senkrecht zum Spiegel und e die Entfernung des Mittelpunktes des Bestäubungsraumes vom Spiegel sind.

9. Degenerirt der Bestäubungsraum in eine beliebig begrenzte und gegen den Spiegel beliebig geneigte Bestäubungsebene (gleichmässig bestäubtes Glasblättchen), so erhält man aus (2):

$$(4) \qquad J = \frac{2W}{f\sin\psi}\int_{x_1}^{x_2}\left(1 + \cos\frac{4x\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}\right) F(x)\,\partial x,$$

wenn f die Grösse der Bestäubungsebene ist, ψ der Winkel der Bestäubungsebene mit dem Spiegel, x_1, x_2 die kleinste und die grösste Entfernung der Bestäubungsebene vom Spiegel, $F(x)$ die Länge einer auf der Bestäubungsebene parallel dem Spiegel gezogenen Geraden, ausgedrückt als Function ihrer Entfernung vom Spiegel.

10. Ist insbesondere die Bestäubungsebene ein Rechteck, dessen eine Seite dem Spiegel parallel ist, so ergibt sich aus (4):

$$(5) \quad J = 2W\left(1 + \frac{\sin\frac{2(x_2 - x_1)\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}}{\frac{2(x_2 - x_1)\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}} \cdot \cos\frac{4e\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}\right).$$

11. Vergleicht man die Formeln (3) und (5), so gelangt man zu dem Satze:

Ein parallelepipedischer Bestäubungsraum, dessen eine Seitenfläche mit der Spiegelebene parallel ist, bringt dasselbe Beugungsbild hervor, wie eine rechteckige Bestäubungsebene, wenn zwei Seiten dieser Bestäubungsebene auf die beiden dem Spiegel parallelen Seitenflächen des Parallelepipeds fallen.

12. Fällt insbesondere eine der beiden dem Spiegel parallelen Seiten der rechteckigen Bestäubungsebene auf die Ebene des Spiegels, so erhält man aus (5):

$$(6) \qquad J = 2W\left(1 + \frac{\sin\frac{8e\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}}{\frac{8e\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}}\right).$$

13. Ist schliesslich der Bestäubungsraum eine beliebig gestaltete Ebene parallel dem Spiegel, so erhält man aus (2):

$$(7) \qquad J = 2W\left(1 + \cos\frac{4e\pi(\cos\gamma - \cos\varphi)}{\lambda}\right).$$

14. Lässt man die Strahlen, nachdem sie nur einmal durch den Bestäubungsraum gegangen sind, unter Hinweglassung des Spiegels in das Beobachtungsfernrohr treten, so nimmt man ebenfalls ein Beugungsbild wahr, welches gegeben ist durch die Gleichung:

$$(8) \qquad J = W = \Sigma(i),$$

wo i die durch ein einziges Körperchen hervorgebrachte Intensität bedeutet und sich Σ auf sämmtliche Körperchen erstreckt. Diese Gleichung hat man bei Berechnung der oben gegebenen Formeln namentlich dann zu beachten, wenn die Körperchen gleich gestaltet und gleich orientirt sind, da dann W seine eigene Maxima und Minima hat.

15. Sind sämmtliche Körperchen, n an der Zahl, gleich gestaltet und gleich orientirt, so ergibt sich aus (8):

$$(9) \qquad J = ni.$$

D. h. das Beugungsbild ist identisch mit jenem, welches eine Oeffnung von der Gestalt und Lage eines der Körperchen (oder vielmehr der Projection des Körperchens auf eine zu den directen Strahlen senkrechte Ebene) hervorbringt. Sind insbesondere die Körperchen kugelförmig, so hat man das Phänomen der kleinen Höfe.

Alle diese Sätze und Formeln gestatten eine strenge numerische Prüfung durch messende Versuche, welche zum grossen Theile noch nicht durchgeführt sind. Hier ist das Feld, auf welchem Hr. Lommel meine Theorie der Staubringe, wofern sie unrichtig ist, ebenso wirksam wird widerlegen können, wie ich die seine widerlegt habe.

Wien, im Mai 1883.

V. *Ueber ein Verfahren, electrische Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen zu vergleichen; von F. Kohlrausch.*

(Aus den Monatsber. d. Berl. Academie vom 29. März 1883 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Wenn die Bedeutung der obigen Aufgabe im allgemeinen nicht näher begründet zu werden braucht, so erscheint dies um so weniger nöthig in einem Augenblicke, in welchem die Copirung von Quecksilberwiderständen von erhöhter Bedeutung ist. Diese Arbeit würde durch eine von Uebergangswiderständen ganz unabhängige Vergleichsmethode in mehrfacher Hinsicht erleichtert werden, sowohl was die Gestalt und die Dimensionen der Quecksilbersäule, als was das Material der Electroden betrifft.

Ausser den electrostatischen Methoden, welche für die feinsten Widerstandsmessungen nicht empfindlich genug sind, arbeitet meines Wissens nur das von Matthiessen und Hockin auf kurze Drähte angewandte sinnreiche Verfahren von Uebergangswiderständen ganz unabhängig. Aber auch hier dürfte die für fundamentale Aichungen geforderte Genauigkeit kaum zu erreichen sein, da zur Messung Hülfsgrössen eingeschoben werden, und da die Beobachtungen aus mehreren Theilen bestehen, welche verschiedene Manipulationen und Zeit beanspruchen.

Die von W. Thomson gegebene werthvolle Modification der Wheatstone'schen Brücke für kleine Widerstände lässt den Einfluss von Zuleitungswiderständen bekanntlich sehr klein werden. Dieselben Dienste kann, wie Hr. Kirchhoff gezeigt hat, in einfacherer Weise das Differentialgalvanometer leisten, wenn man die Multiplicatoren gegen- und hintereinander schaltet. Hr. Kirchhoff hat dabei ein Verfahren entwickelt und angewandt, welches mit einfachen Mitteln sogar ungleiche sehr kleine Widerstände miteinander scharf vergleichen lässt.[1]

---

1) G. Kirchhoff, Berl. Monatsber. 1880. p. 601 und Wied. Ann. **18.** p. 410. 1881. Vgl. auch Dieterici, Wied. Ann. **16.** p. 234. 1882. Auf die Hintereinanderschaltung hat unter anderen Gesichtspunkten zuerst Heaviside hingewiesen. Phil. Mag. (4) **45.** p. 245. 1873.

Die vorliegende Mittheilung betrifft eine äusserlich geringfügige Abänderung der Hintereinanderschaltung des Doppelmultiplicators, welche man den übergreifenden Nebenschluss nennen kann, und durch welche nun die Zuleitungswiderstände vollkommen eliminirt werden. Das Verfahren arbeitet sehr rasch und genau. Man wird unten ein Beispiel finden, in welchem sehr kleine Widerstände mit einer Genauigkeit bis auf Hunderttausendtel ihres Betrages, nämlich bis auf Zehnmilliontel der Siemens'schen Einheit verglichen werden.

I. Widerstandsvergleichung mittelst übereinandergreifender Abzweigungen durch das Differentialgalvanometer.

Wir schalten die zu vergleichenden Widerstände w und r zwischen A und B, resp. A' und B' in dieselbe Stromleitung ein. Abzweigungen dieses Hauptstromes werden in entgegengesetzter Richtung durch die beiden Hälften eines Differentialmultiplicators von grossem Widerstande geführt, aber so, dass die Anfangspunkte A und A' des Stromes in beiden Widerständen mit dem einen, die Endpunkte B und B' mit dem anderen Multiplicator verbunden seien, sodass also das Verbindungsstück BA' auf beiden Seiten mit gemessen wird.

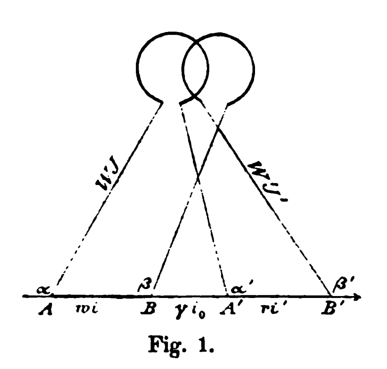


Fig. 1.

Der Widerstand dieses Mittelstückes heisse γ, derjenige der Multiplicatorhälften, resp. W und W'; $\alpha\beta$ $\alpha'\beta'$ seien die unbekannten Uebergangswiderstände. Die Stromstärken in w, γ und r mögen i, i_0 und i' heissen, diejenigen in den Multiplicatoren J und J'.

Setzen wir zunächst die beiden Multiplicatoren bezüglich ihres Widerstandes $W = W'$ und ihrer Lage gegen die Nadel als ganz gleich voraus; dann sagt die Ruhe der Nadel bei dem Stromschluss aus:

$$J = J', \text{ also auch } i = i'; \text{ ferner:}$$

$$wi + \gamma i_0 = (W + \alpha + \alpha')\,J; \qquad ri + \gamma i_0 = (W + \beta + \beta')\,J,$$

worin: $\qquad i_0 = i - J.$

Hieraus findet sich:

$$\text{(I)} \qquad \frac{w + \gamma}{r + \gamma} = \frac{W + \gamma + \alpha + \alpha'}{W + \gamma + \beta + \beta'}.$$

Nun werden die Verbindungen so vertauscht, aber ohne an den Zuleitungen zu den Multiplicatoren etwas zu ändern, dass die Punkte, welche vorher die inneren bildeten, die äusseren werden und umgekehrt, sodass jetzt auch die Uebergangswiderstände α und β' von ihrer äusseren Lage nach innen kommen und umgekehrt. Wir nehmen an, dass wir einen der Widerstände, z. B. r, um kleine, bestimmte Beträge abändern können (vgl. unter 4). Es sei jetzt derjenige Widerstand, welcher mit w zusammen den Ausschlag Null der Nadel ergibt, gleich r_1. Dann ist wie oben:

Fig. 2.

$$\text{(II)} \qquad \frac{w + \gamma}{r_1 + \gamma} = \frac{W + \gamma + \beta + \beta'}{W + \gamma + \alpha + \alpha'}.$$

Aus (I) und (II) folgt unter Wegfall aller Uebergangswiderstände:

$$w + \gamma = \sqrt{(r + \gamma)\,(r_1 + \gamma)}\,.$$

Sind nun r und r_1 nur wenig verschieden, so kann man anstatt des geometrischen Mittels das arithmetische nehmen und hat: $\qquad w = \frac{1}{2}(r + r_1).$

(Der dabei begangene relative Fehler beträgt:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{r - r_1}{r + r_1}\right)^2 = \tfrac{1}{8}\left(\frac{r - r_1}{w}\right)^2$$

und ist, wenn $r - r_1$ etwa $= 0{,}01\,w$, was ziemlich hoch gegriffen ist, praktisch zu vernachlässigen.)

Man hat also in einfachster Weise zwei Bestimmungen mit ausgewechselten Verbindungen vorzunehmen und das arithmetische Mittel gleich dem gesuchten Widerstande zu setzen.

II. Herstellung des Differentialmultiplicators.

Für lange feine Drähte einen constanten Querschnitt zu erzielen, scheint sehr schwierig zu sein, wahrscheinlich

weil die Ziehlöcher sich abnutzen. Selbst bei Draht (von Obermaier in Nürnberg), der angeblich durch Diamantlöcher gezogen war, fanden sich Differenzen des Widerstandes beider Hälften bis gegen 10 Procent.

Eine Schwierigkeit erwächst hieraus nicht, denn nach der Herstellung des Doppelmultiplicators verbindet man mit dem einen Theile constant einen ausgleichenden Widerstand in Gestalt einer bifilar gewickelten Rolle aus derselben Drahtsorte (vgl. noch unten).

Was zweitens die Gleichheit der Wirkungen desselben Stromes in beiden Hälften auf die Nadel betrifft, so ist diese genügend nahe zu erreichen, wenn man in bekannter Weise die beiden Drähte miteinander auf den Rahmen auflaufen lässt. Weil bei raschem Wickeln die Drähte gern etwas auseinander laufen, wodurch also zwei Multiplicatoren entstehen würden, welche gegen einander verschoben sind, so gebraucht man die Vorsicht, in regelmässigen Intervallen, d. h. nach je einigen hundert Umwindungen, die Drahtrollen, von denen man abwindet, in Bezug auf links und rechts auszuwechseln.

Hr. Dr. Strecker hat so ohne Mühe einen Doppelmultiplicator aus 0,15 mm dickem, doppelt besponnenem Kupferdraht von zweimal 3000 Windungen hergestellt, der keinen merklichen Contact zwischen beiden Theilen besass, und dessen eine Hälfte nur um etwa $^1/_{200}$ stärker auf die auf die Nadel wirkte als die andere. Rahmen und Nadel sind angeordnet, wie ich vor kurzem beschrieben habe.[1])

Nimmt man sich zu dem Aufwinden Zeit, so kann man die Gleichheit noch weiter treiben. Es ist dies aber nicht nöthig, denn man kann die Ausgleichung durch den Widerstand vornehmen. Hierin zeigt sich ein fernerer Vortheil der Anordnung des Differentialgalvanometers von grossem Widerstande als Nebenschliessung.

Denn unsere Aufgabe ist, dass der Doppelmultiplicator keinen Ausschlag gebe, wenn die Potentialdifferenz an beiden Paaren von Endpunkten gleich gross ist. Um dem In-

---

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **15.** p. 554. 1882.

strument diese Eigenschaft zu geben, verzweigen wir also den Strom einer Säule direct durch beide Hälften in entgegengesetztem Sinne und fügen der einen Hälfte soviel Widerstand hinzu, dass der Ausschlag Null wird.

Streng genommen darf man die Angaben eines so justirten Differentialmultiplicators nur dann als richtig ansehen, wenn die zu vergleichenden Widerstände gegen diejenigen der Multiplicatoren verschwinden. Betragen die letzteren übrigens, wie bei uns, etwa 700 Q. E., so würden bei dem oben genannten Unterschied beider Multiplicatorfunctionen um $^1/_{200}$ selbst Stücke von je 10 Q. E. bis auf weniger als 0,001 Q. E. genau bestimmt werden.

Im Folgenden soll nun noch nachgewiesen werden, wie man die Fehler, welche von beliebigen aber kleinen Ungleichheiten der Multiplicatoren herrühren, einfach durch den Versuch selbst eliminirt.

III. Elimination von Ungleichheiten des Differentialgalvanometers.

Bei jeder Widerstandsvergleichung lassen sich bekanntlich Ungleichheiten der Anordnung dadurch eliminiren, dass man die zu vergleichenden Widerstände auswechselt, so wie bei einer Doppelwägung die Gewichte. Die ausgewechselten Widerstände sind gleich, wenn die Einstellung des Galvanometers ungeändert bleibt.

So einfach dieses Verfahren im Princip ist, bieten sich doch bei der Ausführung einige Uebelstände. Denn da die Umlegung des Commutators nicht ohne Zeitverlust, nicht ohne Unterbrechung oder einseitige Schlüsse geschehen kann, so handelt es sich thatsächlich nicht nur um eine plötzliche Beobachtung, ob keine Aenderung eintritt, sondern man muss zwei Einstellungen beobachten und sehen, ob dieselben gleich sind. Das langweilige Probiren, welches aus der wörtlichen Befolgung dieser Vorschrift entspringt, lässt sich allerdings durch ein Interpolationsverfahren vermeiden. Aber es bleibt ein anderer Uebelstand, nämlich der mit diesen Beobachtungen verbundene längere Stromschluss mit seinen Fehler-

quellen der Erwärmung. Um diese zu vermeiden, habe ich deswegen früher kurze Inductionsstösse constanter Wirkung im Differentialgalvanometer angewandt[1]), was aber zu einer längeren Beobachtungsreihe und Rechnung führte.

Es gewährt daher grossen Vortheil, dass die Nullmethode beibehalten werden kann. Die kleinen Ungleichheiten eliminiren sich nämlich von selbst, indem wir ja bei unserem Verfahren (p. 77, 78 Fig. 1 u. 2) nicht nur die Eintritts- und Austrittspunkte des Stromes in die beiden Widerstände w und r, sondern zugleich w und r gegen die beiden Galvanometerzweige auswechseln. Einer der beiden Widerstände, etwa r, möge wie oben kleine bekannte Aenderungen gestatten. Ueber die Anordnung vgl. Nr. 4.

Bleibt dann die Nadel in Ruhe, wenn neben w das eine mal r, das andere mal r_1 eingeschaltet ist, so ist wieder[2]):

$$w = \tfrac{1}{2}(r + r_1).$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 142. p. 418. 1871.

2) Dies ist für sehr kleine Aenderungen ohne weiteres klar; um den zulässigen Betrag der letzteren zu erkennen, wollen wir den vollständigen Ausdruck ableiten.

Die beiden Galvanometerzweige (Fig. 1 p. 76) mögen den Widerstand W, bez. $W' = W + \delta$ haben. Die beiden Galvanometerfunctionen mögen im Verhältnisse $1 : 1 + \sigma$ stehen, sodass die Ruhe der Nadel die beiden Stromstärken J und $J(1 + \sigma)$ anzeigt. $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ seien wieder die zu eliminirenden Uebergangswiderstände.

Dann ist also bei der ersten Verbindung:

$$(W + \alpha + \alpha')\,J = wi + \gamma i_0; \qquad (W + \delta + \beta + \beta')\,J(1 + \sigma) = ri' + \gamma i_0,$$
$$\text{wo } i_0 = i - J(1 + \sigma) = i' - J.$$

Hieraus findet man:

$$\text{(I)} \qquad \frac{w + \gamma}{r + \gamma} = \frac{W + \alpha + \alpha' + \gamma(1 + \sigma)}{(W + \delta + \beta + \beta' + \gamma)(1 + \sigma) + r\sigma}.$$

Nach dem Umschalten wird ebenso erhalten:

$$\text{(II)} \qquad \frac{w + \gamma_1}{r_1 + \gamma_1} = \frac{(W + \delta + \beta + \beta')(1 + \sigma) + \gamma_1}{W + \alpha + \alpha' + \gamma_1 - r_1\sigma}.$$

Wir haben hier γ_1 statt früher γ gesetzt, also angenommen, dass der Widerstand des Verbindungsstückes sich bei dem Umschalten ändere, um zu untersuchen, wie weit man hierauf Rücksicht nehmen muss.

Multipliciren wir (I) mit (II), so erhält das Product rechts die Form:

$$\frac{W + x}{W + x_1}\,\frac{W + y}{W + y_1} \quad \text{oder} \quad 1 + \frac{x - x_1 + y - y_1}{W},$$

insofern $x \ldots$ gegen W klein sind. So bekommen wir einfach:

IV. Ausführung.

1. **Commutator.** Um die Verbindungen bequem und sicher zu wechseln, dienen sechs Quecksilbernäpfe, von denen man je drei Paare überbrücken kann. Die in der Figur ausgezeichnete Ueberbrückung lässt die unteren Abzweigungspunkte der Widerstände als äussere auftreten, die punktirte macht dieselben zu inneren. Die beiden Paare von Zuleitungsdrähten zum Commutator hat man von gleichem Widerstande zu nehmen.

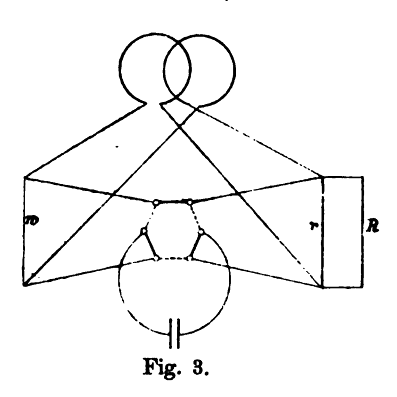


Fig. 3.

2. **Die nothwendigen kleinen Abänderungen** eines der zu vergleichenden Widerstände bildet man dadurch, dass man an den grösseren von beiden einen gewöhnlichen Stöpselrheostaten R als Nebenschliessung anlegt, so wie z. B. schon Rayleigh gethan hat[1]), wobei vorausgesetzt ist, dass der Betrag von r genähert bekannt sei. Bei der Copierung von Quecksilberwiderständen werden höchstens Stücke von wenigen Einheiten gebraucht werden. Ueberhaupt wird die Methode vorwiegend auf kleine Widerstände angewandt werden. In diesem Falle reicht die gebräuchliche Form der Stöpselrheostaten bis zu 10000 unter allen Um-

---

$$\frac{(w+\gamma)(w+\gamma_1)}{(r+\gamma)(r_1+\gamma_1)} = 1 + \frac{r_1 - r}{W}\sigma.$$

Das Correctionsglied, dessen Zähler das Product aus zwei sehr kleinen Grössen, und dessen Nenner gross ist, wird gegen Eins vernachlässigt, und man hat:

$$(w+\gamma)(w+\gamma_1) = (r+\gamma)(r_1+\gamma_1).$$

Hieraus findet man unter Vernachlässigung höherer Glieder:

$$w = \frac{r+r_1}{2}\left[1 - \frac{(r-r_1)(\gamma-\gamma_1) + \frac{1}{2}(r-r_1)^2}{(r+r_1)^2 + (r+r_1)(\gamma+\gamma_1)}\right].$$

Setzt man z. B. $r - r_1 = 0{,}01$, $\gamma - \gamma_1 = 0{,}01$, $w = 1$, so beträgt das Correctionsglied weniger als $^1/_{20000}$.

1) Rayleigh, Phil. Trans. 1882. II, p. 679.

ständen aus; denn wenn durch Zufall eine Ungleichheit von weniger als einigen Zehntausendteln vorläge, so kann man durch eine kleine Temperaturänderung von einem der Vergleichsstücke nachhelfen.

3. Anwendung auf Quecksilberwiderstände. Wenn es gelingt, in die Glasröhre, ohne Beeinträchtigung ihrer Gestalt, seitlich einen Platindraht oder eine sonstige Zuleitung einzuführen, so kann einfach die mit Quecksilber gefüllte Röhre gebraucht werden, indem man ausserhalb der Platindrähte den Hauptstrom zu- und ableitet. Nimmt man die gewöhnlich gebrauchte Siemens'sche Form, nämlich die Röhre, welche beiderseitig mit den Endpunkten in Gefässe hineinragt, so müssen die Abzweigepunkte nach dem Differentialgalvanometer so weit von der Röhrenmündung abstehen, dass einige Millimeter Unsicherheit in der Stellung keinen Einfluss haben. Es hat keine Schwierigkeit, den Widerstand, welcher zwischen der Rohrmündung und der Aequipotentialfläche der Ableitung liegt, hinreichend genau zu schätzen. Haben aber die Hauptelectroden eine Oberfläche von einigen Quadratcentimetern, so kann man ohne merklichen Fehler einfach den Ausbreitungswiderstand des Stromes in das Quecksilbergefäss zu dem Widerstand der Röhre zurechnen.[1]) Da Uebergangswiderstände herausfallen, so kann man alle Electroden aus Platin herstellen.

4. Thermoströme. In Bezug auf Fehler durch thermoelectromotorische Kräfte ist die obige Anordnung so günstig, wie sie nur sein kann; denn in den zu vergleichenden Widerständen werden die Ströme bei der Umschaltung gewendet, in den Galvanometerzweigen aber behalten sie ihre Richtung bei.

5. Extraströme dagegen würden, wenn man mit momentanem Stromschluss arbeiten will, Schwierigkeiten bieten. Wollte man die Methode also z. B. gebrauchen, um die Spulen, welche zur absoluten Widerstandsbestimmung gedient haben, unmittelbar mit Quecksilber zu vergleichen (was übrigens kaum rathsam wäre), so gibt es kein anderes Mittel,

1) Kirchhoff l. c.; Maxwell Lehrb. d. Electr., übers. von Weinstein, 1. p. 447. 1883.

als entweder mit längerem Stromschluss zu arbeiten, oder die Spulen aus zwei miteinander gewundenen Drähten bestehen zu lassen, die man dann gegeneinander einschaltet. Diese Trennung des Spulendrahtes empfiehlt sich, wie ich an einem anderen Orte bemerkt habe, allerdings auch aus sonstigen Gründen.[1])

V. Versuche mit Quecksilber.

In der eben beschriebenen Weise wurde der Widerstand w einer Quecksilbersäule mit einem Neusilberdrahte verglichen, welcher selbst 1,4 Q. E. besass und ein wenig grösser war als der Widerstand der Quecksilbersäule. Die Ausgleichung geschah mit Hülfe eines Stöpselrheostaten, der dem Neusilberdraht als Nebenschluss beigegeben wurde.

Die Beträge dieses Rheostaten, bei denen die Galvanometernadel bei momentanem Stromschluss in Ruhe blieb, sollen mit R bezeichnet werden, dann ist:

$$r = \frac{1{,}4 \, . \, R}{1{,}4 + R}.$$

Um die Uebereinstimmung zu prüfen, wurden mehrere Abwechslungen eingeführt:

1. gab ein zweiter Commutator von zweimal vier Quecksilbernäpfen mit vier überbrückenden Drähten von der Anordnung XII die Möglichkeit, die Galvanometerhälften gegenüber den Widerständen w und 1,4 auszuwechseln. Die beiden Stellungen des letzteren Commutators werden mit A und B bezeichnet, während I und II die beiden Stellungen des Umschalters der Widerstände gegen das Element (1 Smee) bedeuten. Man erhielt so:

Temperatur Quecksilber	Temperatur Neusilber	Commutatoren	R	$\frac{1{,}4\,.\,R}{1{,}4+R}$	$w = \frac{r+r_1}{2}$
17,18°	18,00°	A I	104,9 Q.-E.	r = 1,38156	1,38324
		A II	128,7 „	r_1 = 1,38493	
		B I	128,4 „	r = 1,38490	1,38327
		B II	105,4 „	r_1 = 1,38164	

2. Man schaltete in die eine Ableitung vom Quecksilber einen Uebergangswiderstand von etwa 2 Q.-E. ein.

[1]) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 18. p. 514. 1883.

Temperatur Quecksilber	Temperatur Neusilber	Commutatoren	R	$\frac{1,4 . R}{1,4 + R}$	$w = \frac{r + r_1}{2}$
17,13°	17,96°	A I	128,5 Q.-E.	r = 1,38491	1,38323
		A II	104,9 „	r_1 = 1,38156	
		B I	167,4 „	r = 1,38839	1,38328
		B II	88,4 „	r_1 = 1,37818	

Die Uebereinstimmung ist eine vollständige zu nennen.

3. Im Vorigen fanden die Abzweigungen vom Quecksilber nach dem Differentialgalvanometer mittelst Platinblechstreifen von 5 mm Breite statt, welche in die Quecksilbergefässe eintauchten. An denselben Ort (etwa mitten zwischen die 4 qcm grossen Electroden und die von diesen letzteren etwa 15 mm weit abstehenden Mündungen der Röhren in die Gefässe) wurden statt der Blechstreifen Drahtspitzen gebracht, die aus Glasröhrchen hervorragten. Die hiermit erhaltenen Resultate sind unten mit einem * bezeichnet.

4. Es wurden auch die Stromstärken gewechselt, was ausser auf die Grösse der Ausschläge keinen merklichen Einfluss hatte.

So wurden, theilweise an verschiedenen Tagen, mehrere Versuchsreihen angestellt. ** bedeutet, dass der künstliche Uebergangswiderstand eingeschaltet worden war.

Um der unmittelbaren Vergleichbarkeit willen sollen die gefundenen Resultate mit dem von Hrn. Strecker bestimmten Temperaturcoëfficienten 0,00064 des betreffenden Neusilberdrahtes auf gleiche Temperatur (16°) des letzteren reducirt angegeben werden. w_{16} gibt dann die Widerstände der Quecksilbersäule auch bei 16° reducirt mit dem von Rink angegebenen[1]) Temperaturcoëfficienten 0,00094.

Temp des Hg	w_t	w_{16}	Temp. des Hg	w_t	w_{16}
t = 18,20°	1,3865	1,3837	** t = 14,18°	1,3813	1,3836
18,19	1,3866	1,3837	14.19	1,3813	1,3836
17,20	1,3850	1,3834	* 14,18	1,3812	1,3835
** 17,20	1,3851	1.3835	* 14,19	1,3811	1,3835
17,18	1,3851	1,3835	* 14,06	1,3810	1,3835
** 17,13	1,3850	1,3835			

1) Rink, Beibl. 2. p. 277. 1878.

Die grössten Abweichungen vom Mittel betragen etwa $^1/_{10000}$ des Ganzen und würden vielleicht noch kleiner ausfallen, wenn die Verhältnisse mit aller Sorgfalt vorbereitet werden.

VI. Vergleichung sehr kleiner Widerstände.

Ich habe endlich noch den Versuch gemacht, die Methode auf sehr kleine Widerstände anzuwenden. Dazu dienten drei gleiche Stücke Neusilberdraht von 0,19 m Länge, 1,4 mm Durchmesser, welche je nahe 0,01 Q. E. darstellten. Diese Drähte waren in je zwei 3,5 mm dicke Kupferdrähte von 5 cm Länge eingelöthet. Endklemmen führten den Strom in die Kupferdrähte ein; die zu vergleichenden Widerstände waren abgegrenzt durch kleine an die dicken Kupferdrähte seitlich angelöthete dünnere Drähte, von denen aus die Abzweigungen nach dem Differentialgalvanometer mit gewöhnlichen kleinen Klemmen stattfanden. Die Stücke sollen mit I II III bezeichnet werden. Sie wurden jedes mit jedem verglichen. Den Strom lieferte ein Smee'sches Element.

Die Beobachtungen wurden übrigens gerade wie früher angestellt. Die Ergebnisse von drei an verschiedenen Tagen ausgeführten Reihen, bei denen alle Verbindungen, nämlich mit dem Commutator, mit dem Galvanometer und mit dem Rheostaten, welcher als ausgleichender Nebenschluss an dem grösseren von beiden Widerständen diente, gewechselt worden sind, folgen unten. Die Stücke befanden sich neben einander in demselben Luftkasten, hatten also jedesmal gleiche Temperatur.

Das Maass für die Genauigkeit wird aus der Uebereinstimmung beider Reihen untereinander ersehen. Insofern kleine spontane Aenderungen der Drähte oder kleine Unterschiede der Temperaturcoëfficienten vorhanden sein könnten, ist eine noch directere Probe für die Genauigkeit in der Annäherung der Summe der drei Unterschiede an den Werth Null gegeben. Beide Proben stellen der Methode ein vorzügliches Zeugniss aus, denn es wurden gefunden in Millionteln der Q. E.:

I—II	= + 1,20	+ 1,26	+ 1,33	$\frac{\text{Q.-E.}}{10^6}$
II—III	= +10,98	+10,89	+10,86	„
III—I	= −12,17	−12,30	−12,22	„
Summe	= + 0,01	− 0,15	− 0,03	$\frac{\text{Q.-E.}}{10^6}$

Es wurde also von einem Hundertel der Siemens'schen Quecksilbereinheit mit ziemlicher Sicherheit noch der hunderttausendste Theil bestimmt, und zwar ohne irgend eine Schwierigkeit und mit den einfachsten Hülfsmitteln. Grössere Genauigkeiten sind bei Widerstandsbestimmungen unmöglich, denn auch unter den günstigsten Verhältnissen erreichen die Unsicherheiten der Temperatureinflüsse einen solchen Betrag.

VI. *Ueber einige Bestimmungsweisen des absoluten Widerstandes einer Kette, welche einen Erdinductor und ein Galvanometer enthält; von F. Kohlrausch.*

(Aus den Sitzungsber. der math.-physikal. Classe der k. bayr. Acad. d. Wiss. 1883, Heft II, mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Wilhelm Weber hat zwei Verfahren der absoluten Widerstandsmessung mit seinem Erdinductor gegeben. Das eine, welches ein Galvanometer mit weiten Windungen benutzt, ist neuerdings von ihm und Zöllner ausgeführt worden.[1]) Von dem anderen Verfahren mit engem Galvanometer hat Weber eine Probe in seiner Abhandlung „Zur Galvanometrie" gegeben.[2]) Später habe ich dasselbe im magnetischen Observatorium zu Göttingen zu einer absoluten Bestimmung der Quecksilbereinheit gebraucht.[3])

Dieses letztere Verfahren ist, wie ich glaube, einiger vortheilhafter Abänderungen fähig.

---

1) W. Weber u. F. Zöllner, Sitzungsber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1880. p. 77.

2) W. Weber, Zur Galvanometrie; aus Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. **10.** 1862.

3) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. Ergbd. **6.** p. 1. 1874.

1. Die ursprüngliche Form besteht darin, dass ausser dem Ausschlage, welchen ein Inductionsstoss der Galvanometernadel ertheilt, die Dämpfung der Nadel durch den Multiplicator beobachtet und mittelst der letzteren im Verein mit der Schwingungsdauer und dem Trägheitsmoment die Galvanometerfunction abgeleitet wird.

Es bedeute:

F die Windungsfläche des Inductors,

H die horizontale erdmagnetische Componente,

K das Trägheitsmoment der Nadel,

t ihre Schwingungsdauer,

λ ihr logarithmisches Decrement,

α ihren Ausschlag durch einen Inductionsstoss, ohne die Dämpfung.[1])

Dann ist, von kleineren Einflüssen abgesehen, der Widerstand der Kette gegeben durch:

$$w = \frac{8}{\pi^2} \frac{F^2 H^2 \lambda t}{\alpha^2 K}. \qquad \text{(I)}$$

Die Schwierigkeiten dieses Verfahrens waren beträchtlich. Ueber die Fehlerquellen der Ausmessung einer Windungsfläche, welche letztere obendrein im Quadrate auftritt, ist seitdem von mehreren Seiten gehandelt worden. Auch die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus tritt in der zweiten Potenz auf, und endlich ist das Trägheitsmoment eine nur schwierig genau zu bestimmende Grösse.

Ich glaube, dass die von mir ausgeführte Messung einer Windungsfläche auf galvanischem Wege[2]) diese Bestimmung wesentlich erleichtert. Das Trägheitsmoment wird sich nach Erfahrungen, die ich in der letzten Zeit gemacht habe, vielleicht auf einem anderen Wege, nämlich mittelst bifilarer

---

1) Wie α bestimmt wird, ob durch einen einzelnen Stoss, ob durch Multiplication oder durch Zurückwerfung, welche letztere bei der Weber'schen Methode angewandt wurde, braucht hier nicht gesagt zu werden.

2) F. Kohlrausch, Gött. Nachr. 1882. p. 654; Wied. Ann. 18. p. 513. 1883. Neuerdings habe ich zur Tangentenbussole eine Glasscheibe mit aufgezogenem Kupferdrahte benutzt. Ein solcher Kreis lässt sich in sehr grossen Dimensionen ausführen. Die Nadel ist auf einem leichten Spiegel befestigt, der selbst als Töpler'scher Luftdämpfer wirkt.

Aufhängung bequemer auswerthen lassen als durch das Gauss'sche Belastungsverfahren. Jedenfalls lässt das letztere sich auf diesem Wege controliren. Es wird endlich Sache des Versuchs sein, festzustellen, ob die verschiedenen jetzt vorliegenden Methoden der Messung des Erdmagnetismus zu hinreichend übereinstimmenden Ergebnissen führen.

2. Es ist möglich, das Trägheitsmoment zu eliminiren, indem man statt dessen eine andere Grösse bestimmt, nämlich das Product MH, wo:

M den Nadelmagnetismus bedeutet.

Zu diesem Zwecke bringt man den Stab in eine ostwestlich orientirte bifilare Aufhängung und misst die Ablenkungen, wie ich beschrieben habe.[1])

Insofern nun: $K = \frac{t^2}{\pi^2} \cdot (MH)$, so wird:

$$w = 8 \frac{F^2 H^2}{\alpha^2} \frac{\lambda}{t} \frac{1}{(MH)}. \tag{II}$$

Die Beziehung kann zur Controle der ersten Methode, namentlich betreffs des Trägheitsmoments dienen.

3. Eine gründlichere Umgestaltung des Ausdruckes (I), durch welche nicht nur das Trägheitsmoment herausfällt, sondern auch der Erdmagnetismus aus der zweiten in die erste Potenz versetzt wird und nun obendrein nur im Verhältniss zum Nadelmagnetismus vorkommt, folgt aus (II) ohne weiteres, wenn man Nenner und Zähler durch H theilt. Dann wird:

$$w = 8 \frac{F^2}{\alpha^2} \frac{H}{M} \frac{\lambda}{t}. \tag{III}$$

Das Verhältniss H/M ist bekanntlich durch Ablenkungen verhältnissmässig leicht zu bestimmen.

Allerdings muss der erdmagnetische Inductionscoëfficient des Stabes bekannt sein.

Ein astatisches Nadelpaar zu gebrauchen, wie bis jetzt bei der Methode (I) geschah, wird hier kaum möglich sein. Man wird wohl ein Galvanometer von sehr grossen Dimensionen mit einfacher Nadel anwenden.

---

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 765. 1882.

4. Eine fernere wesentliche Abänderung des Verfahrens lässt sich einführen, wenn man die Galvanometerfunction anstatt aus der Dämpfung durch Vergleichung mit einem Galvanometer von bekannter Function ermittelt, ähnlich wie bereits von Dorn geschehen ist.[1]

Freilich wird hier nicht die dynamische Galvanometerfunction C, sondern die statische c bestimmt. Es ist:

$$C = M \,.\, c = \frac{\pi^2}{t^2} \frac{K}{H} c.$$

Nun ergibt sich aus dem Neumann'schen Grundgesetz der Magnetinduction und aus der Bewegungsgleichung einer gedämpften Nadel nach Weber[2]), wenn man wie oben von Correctionsgliedern absieht:

$$\lambda = \frac{1}{2w} \frac{t}{K} \cdot C^2 = \frac{\pi^4}{2} \frac{1}{w} \frac{K}{t^3} \frac{c^2}{H^2}.$$

Dies in (I) eingesetzt, liefert:

(IV) $$w = 2\pi \frac{F}{\alpha} \frac{c}{t}.$$

Der Ausdruck enthält alle Grössen nur in erster Potenz und ist vom Trägheitsmoment und vom Erdmagnetismus unabhängig. In der Ausführung tritt allerdings noch das Verhältniss der erdmagnetischen Intensitäten an dem Orte des Inductors und des Galvanoskopes herein. Dieses Verhältniss lässt sich auf dem von mir der k. bayerischen Academie im Januar d. J. vorgelegten Wege genau ermitteln.[3])

5. Endlich erhält man aus dem obigen Ausdruck für λ noch:

(V) $$w = \frac{\pi^2}{2} \frac{c^2}{\lambda t} \frac{M}{H}$$

unabhängig von dem Erdinductor.

Durch die verschiedenen hier vorgeschlagenen Bestimmungsweisen ist also die Möglichkeit gegeben, die sämmtlichen einzelnen beobachteten Grössen durch andere zu ersetzen, ohne an der angewandten Kette eine Aenderung eintreten zu lassen. Diese Möglichkeit ist von grosser Be-

1) E. Dorn, Wied. Ann. **17.** p. 775. 1882.

2) W. Weber, Zur Galvanometrie, p. 21, wo $F = C/K$ zu setzen ist.

3) Vgl. auch Wied. Ann. **19.** p. 130. 1883.

deutung bei einer Messung, welcher man, wie die Erfahrung gezeigt hat, sich im höchsten Grade kritisch gegenüberstellen muss.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die beiden unter 4 und 5 erwähnten Methoden in der Hauptsache bereits von Weber angegeben sind, mit dem Unterschiede allerdings, dass die Galvanometerfunction bei ihm aus den Dimensionen des Multiplicators berechnet wird, während wir dieselbe empirisch bestimmen wollen.

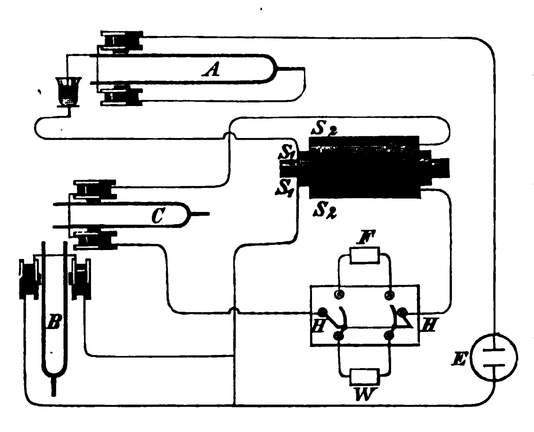
VII. *Ueber die durch die Polarisation bewirkte Phasenänderung von Wechselströmen; von A. Winkelmann.*

Hr. F. Kohlrausch hat gezeigt[1]), dass der Verlauf von Wechselströmen durch die Einschaltung einer polarisirenden Flüssigkeitsschicht eine zweifache Aenderung erfährt. Es wird einerseits eine Verschiebung der Schwingungsphase und andererseits eine Veränderung der Stromstärke hervorgebracht. Die letztere Aenderung ist von Hrn. Kohlrausch benutzt, um die Grösse der Polarisation zu messen, während Hr. Oberbeck die Phasenverschiebung näher studirt und zu dem gleichen Zweck zu verwerthen die Absicht hat.[2]) Beide Beobachter verwendeten den Sinusinductor zur Erzeugung der Wechselströme und beobachteten die Wirkung derselben mittelst des Electrodynamometers. Da die Intensitätsvertheilung der so erzeugten Ströme dem einfachen Sinusgesetze folgt, so sind dieselben sehr gut geeignet, um die hervortretende Phasendifferenz näher zu untersuchen. Es war aber zu erwarten, dass auch die in der gewöhnlichen Weise erzeugten Inductionsströme eine Verschiebung ihrer Intensitätscurve erleiden würden, und dass letzteres durch ein geeignetes Mittel sichtbar gemacht werden konnte. Ich habe diese Erwartung durch einen electromagnetischen Stimm-

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 183. 1873. Jubelb. p. 290. 1874.
2) Oberbeck, Wied. Ann. 19. p. 213. 1883.

gabelapparat geprüft und bestätigt gefunden. Die Einrichtung der Versuche war folgende:

Von drei möglichst gleich gestimmten Gabeln *A*, *B*, *C* (s. Fig.) diente *A* als Unterbrechungsgabel, *B* mit senkrecht gestellten Zinken trug das Objectiv des Beobachtungsmikroskops; ein durch eine Lampe beleuchtetes Quecksilberkügelchen auf der Gabel *C*, deren Zinken horizontal standen, wurde durch das Mikroskop beobachtet. Der Strom der Batterie *E* durchlief die Windungen der Electromagnete und die Unterbrechungsvorrichtung der Gabel *A*, dann die primäre Spirale S_1 eines Inductionsapparates (ohne Condensator) und endlich in einer Zweigleitung die Windungen für die Gabel *B*. Die Windungen der secundären Spirale S_2 waren einerseits mit den Windungen der Gabel *C*, deren Zinken magnetisirt waren[1]), und andererseits mit einer Wippe *HH* verbunden; das zweite Ende der Windungen der Gabel *C* stand ebenfalls mit der Wippe in Verbindung. Durch die Wippe konnte abwechselnd die zu untersuchende Flüssigkeit *F* oder ein anderer Widerstand *W* in den Lauf des Inductionsstromes eingeschaltet werden.



Bald nach der Erregung des Apparates bildet sich bei der Beobachtung durch das Mikroskop eine feststehende leuchtende Curve aus, deren Gestalt von mancherlei Umständen abhängt. Zunächst ist die Schwingungsdauer der freischwingenden Gabeln von Einfluss, ferner die Stromstärke der Batterie und endlich die Grösse des Widerstandes, welcher

1) Vgl. v. Ettingshausen, Pogg. Ann. **159.** p. 51. 1876.

in den Inductionsstrom eingeschaltet wird. Wenn man einen der genannten Factoren ändert, so tritt nicht nur eine Aenderung der Amplitude, sondern auch eine solche der Phase der beiden Gabeln ein, welche sich durch eine Verschiebung der leuchtenden Curve zu erkennen gibt. Es lässt sich dies durch den Einfluss des Magnetismus, welcher nicht gleichzeitig mit dem Strommaximum seine grösste Intensität erlangt, sowie durch die Induction der bewegten Gabelzinken und jene der Spiralen auf sich selbst und aufeinander erklären. Diese Veränderungen der Phase sind für die Beobachtungen des Einflussus der Polarisation zwar störend, lassen aber doch denselben unter gewissen Umständen deutlich erkennen. Die folgende Einrichtung zeigte sich zweckmässig.

Als Widerstand *W* wurde ein mit gesättigter Kupfervitriollösung gefüllter Glaskasten benutzt; in die Lösung tauchten Kupferelectroden. Man erhält auf diese Weise einen Widerstand, der continuirlich verändert werden kann und nur sehr schwach polarisirt wird. Als polarisirende Flüssigkeit *F* wurde entweder verdünnte Schwefelsäure oder gesättigte Kochsalzlösung mit blanken Platinelectroden verwandt, deren Grösse zwischen 45 und 20 qmm variirte. Nach der Erregung des Apparates richtet man die Zweigleitung zur Gabel *B* so ein, dass die Amplituden beider Gabeln ungefähr gleich sind, und bewirkt dann durch Aufkleben von kleinen Wachskugeln auf eine der Gabeln *B* oder *C*, dass die beobachtete Ellipse in eine gerade Linie, die nahezu 45^0 gegen die Horizontale geneigt ist, übergeht. Um die Stellung derselben zu markiren, war in dem Mikroskop ein Ocularmikrometer angebracht, dessen Linien durch Drehung des Oculars der leuchtenden Linie parallel gestellt wurden. Verändert man jetzt den Widerstand *W*, indem man die Kupferelectroden voneinander entfernt, so tritt eine langsam fortschreitende Aenderung der geraden Linie ein, indem dieselbe in eine Ellipse übergeht, deren kleine Axe wächst, während die grosse abnimmt und gleichzeitig sich so dreht, dass sie sich der Horizontalen nähert. Legt man dann die Wippe um und lässt also den Inductionsstrom durch die polarisirende Flüssigkeit gehen, so verändert sich die Curve, und man kann

nicht von vornherein beurtheilen, ob diese Aenderung blos von einer Widerstandsänderung herrührt oder nicht. Es lässt sich aber leicht ein solcher Widerstand W finden, dass bei dem Umlegen der Wippe die Curve eine charakteristische Aenderung erfährt. Während nämlich bei Anwendung der Kupferlösung die grosse Axe der Ellipse, wenn sie durch eine Widerstandsänderung kleiner wird, sich der Horizontalen zudreht, kann man den Widerstand der Kupferlösung so reguliren, dass beim Umlegen der Wippe die grosse Axe sich aufrichtet und zugleich kleiner wird. Dass dies nur von einer Phasendifferenz herrühen kann, welche der primäre und secundäre Strom gegeneinander erfahren, und welche nicht durch eine Widerstandsänderung hervorgebracht ist, folgt aus dem Vorstehenden unmittelbar. Bei dem von mir eingerichteten Apparate betrug die Verschiebung des Endes des grossen Axe etwa $^1/_{20}$ dieser selbst und liess sich ganz deutlich wahrnehmen. Eine genauere Ausmessung würde keinen Werth haben, und bemerke ich nur noch, dass die benutzten Gabeln 210 Schwingungen in der Secunde machten.

Hohenheim, Juni 1883.

VIII. *Quantitative Bestimmung des Einflusses der durch Dehnung erzeugten Temperaturveränderung auf die Messung der ersteren; von Dr. A. Miller in München.*

Früher[1]) habe ich Formeln aufzustellen versucht, die es ermöglichen, für jede Dehnung und unmittelbar darauf folgende Verkürzung eines Drahtes den Einfluss zu bestimmen, welchen die durch Dehnung, resp. Zusammenziehung im Drahte erzeugte Temperaturveränderung auf diese Vorgänge hat, selbst wenn letztere beliebig oft hintereinander statt-

1) Miller, Sitzungsber. der kgl. Acad. der Wiss. München 1883. Heft. 1.

finden. Die vorliegende Arbeit soll diesen Einfluss zahlenmässig für das Eisen festsetzen. Hierzu mussten nach der erwähnten Formel zwei Constanten experimentell bestimmt werden, nämlich das k, welches das Verhältniss der Temperaturänderung Δt zur Dilatation λ_0 angibt, und das h, die Constante in dem Newton'schen Abkühlungsgesetz. Da die Formel $k\lambda_0 = \Delta t$ enthält, so wurde direct $k\lambda_0$, resp. Δt aus der bekannten von W. Thomson abgeleiteten und von Edlund modificirten Formel bestimmt, welche die Beziehung zwischen Druck- und Temperaturänderung vermittelt. Der Werth von Δt ist für 5° und 100° C. berechnet.

Die Constante h konnte nicht direct bestimmt werden. Es wurde deshalb für dieselben Eisendrahtsorten eine Abkühlungsconstante h_1 auf die übliche Weise ermittelt, indem der sich abkühlende Eisendraht um das Gefäss eines empfindlichen Thermometers gewunden war. Aus h_1 konnte das Emissionsvermögen des Drahtes und daraus h selbst berechnet werden.

Bei der Anwendung der so gefundenen Constanten k und h wurde beachtet, dass der thermische Ausdehnungscoëfficient im belasteten und unbelasteten Zustande verschieden ist. Die Rechnung ergibt, dass die erste Decimale des in Scalentheilen angegebenen Correctionswerthes innerhalb weiter Grenzen weder von der Wiederholungszahl der Dehnungen, noch von der hierzu verwendeten Zeit beeinflusst wird. Auch kann für das An- und Abspannen ein mittlerer Correctionswerth genommen werden, der für den untersuchten Eisendraht von 0° bis 100° C. zwischen 0,15 und 0,24 Scalentheilen liegt.

§ 1. Ich habe früher[1]) den Elasticitätsmodul mit Ausschluss der elastischen Nachwirkung zu bestimmen versucht. Die dabei am Eisen gefundenen vorläufigen Resultate weisen auf, meines Wissens bisher nicht bekannte, Eigenthümlichkeiten der „elastischen Dehnung", wie ich die Dehnung mit Ausschluss der elastischen Nachwirkung, also die von der

1) Miller, Sitzungsber. d. kgl. bayr. Acad. d. Wiss. 1882. Hft. 4.

Bemerkung. Der Beisatz (1882, Hft. 4) im Text soll vorstehendes Citat in Zukunft ersetzen.

Zeit unabhängige Dehnung nannte, hin, deren weitere Untersuchung von Interesse ist.

Der erheblich verschiedene Einfluss, den die Wärme auf die elastische Dehnung und die elastische Nachwirkung ausübt, macht es nöthig, dass beide getrennt werden müssen, wenn man das elastische Verhalten der Materie erforschen und mit anderen physikalischen Erscheinungen der Substanz in Beziehung bringen will. Ich beabsichtige, dies zu thun. Vorher sind aber die Grundlagen der Methode noch etwas genauer zu untersuchen.

Die Resultate der früheren Arbeit (1882, Heft 4) wurden deshalb als erste Annäherung von mir bezeichnet, weil es nicht fest stand, welche Grösse die während der Dehnung auftretende, weiterhin vernachlässigte elastische Nachwirkung besitzt, die einen wenn auch verhältnissmässig kleinen, indess doch zu bestimmenden Theil der gemessenen Deformation des Körpers ausmacht. Es musste aber die Behandlung einer anderen Frage vorausgehen. Dies habe ich in der Arbeit: „Ueber den Einfluss der durch Dilatation erzeugten Temperaturänderung auf die Messung der ersteren“[1]) vorläufig rechnerisch gethan.

In der gegenwärtigen Abhandlung habe ich zunächst die quantitative Bestimmung des ebenbezeichneten Wärmeeinflusses auf die Messung vorgenommen. Ferner wird es sich darum handeln, welche physikalische Bedeutung die jeder Belastung und Entlastung des Drahtes entsprechende Längenänderung beizulegen ist, indem diese Aenderung zweifellos das Resultat zweier Kräfte, der Elasticität und der Nachwirkung ist. Das „Princip der Superposition“[2]) wird bei dem von mir eingeschlagenen Versuchsverfahren vermuthlich eine wichtige Rolle spielen, und weiter wird noch in Betracht zu ziehen sein, wie sich die Annahme Weber's, dass die Nachwirkung eine Folge der allmählichen Drehung der Elasticitätsaxen der Molecüle sei, zu den hier auftretenden Erscheinungen verhält.

---

1) Miller, Sitzungsber. d. kgl. bayr. Acad. d. Wiss. 1883. Hft. 1. Bemerkung. Hier gilt dasselbe wie bei vorigem Citat.

2) Kohlrausch, Pogg. Ann. **160.** p. 225. 1877.

Die in der zuletzt erwähnten Abhandlung (1883, Heft 1) angestellte Untersuchung führte unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit beim An- und Abspannen die gleiche und unveränderlich ist, zu den Ausdrücken für die v. Verlängerung:

$$(1)\quad \begin{cases} \lambda = (b_v - a_v) - {}^v l' \\ + \gamma . L \alpha_t' . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \cdot \left[2 - \frac{1}{e^{2 v h z_0}} (e^{h z_0} - 1) e^{h z_0} \right], \end{cases}$$

für die v. Verkürzung:

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda = (b_v - c_v) + {}^v l'' \\ + \gamma . L \alpha_t'' . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \cdot \left[2 + \frac{1}{e^{2 v h z_0}} (e^{h z_0} - 1) \right] \cdot \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gl. erhält man durch Subtraction:

$$(3)\quad \begin{cases} {}^v l' + {}^v l'' = (c_v - a_v) \\ - \gamma . L . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left[\frac{e^{h z_0} - 1}{e^{2 v h z_0}} (\alpha_t' e^{h z_0} + \alpha_t'') - 2(\alpha_t' - \alpha_v'') \right] \cdot \end{cases}$$

Darf man $\alpha_t' = \alpha_t'' = \alpha_t$ nehmen, so ist:

$$(4)\quad {}^v l' + {}^v l'' = (c_v - a_v) - \gamma . L \alpha_t . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} (e^{h z_0} - 1)^2 \cdot \frac{1}{e^{2 v h z_0}} .$$

Die Bedeutung der Grössenzeichen ist folgende (Längen in Scalentheilen — Zeiten in Secunden):

1) λ bedeutet die Grösse der Dehnung, welche unabhängig von der Zeit (z_0) entsteht und somit unter gleichen Umständen als constant betrachtet wird „die elastische Dehnung (e. D.)“.

2) ${}^v l'$ und ${}^v l''$ die von der Zeit (z_0) abhängigen Dehnungen (positiv oder negativ) während der Verlängerung (λ_0), resp. Verkürzung (λ_0) des Drahtes; nach W. Weber elastische Nachwirkung (e. N.) genannt.

3) a_v, b_v, c_v sind die bei der v. successiven Belastung und der unmittelbar darauffolgenden v. successiven Entlastung des Drahtes behufs Messung der Verlängerung (λ_0) und Verkürzung (λ_0) abgelesenen Scalentheile; ist Δp diese Zugkraft,

so wird b_v abgelesen, vor der Belastung a_v und, nachdem die Zugkraft succesive bis 0 abgenommen, c_v.

4) L ist die Länge des untersuchten Drahtes von einer Klemme bis zur anderen und

5) α_t' und α_t'' dessen thermische lineare Coëfficienten, abhängig von der Temperatur (t) und Spannung.

6) λ_0 die Längenzunahme bei der Belastung Δp.

7) z_0 die Zeit, in welcher die Verlängerung oder Verkürzung λ_0 entsteht.

8) und 9) h und k haben die frühere Bedeutung.

10) Endlich ist γ eine von der Einrichtung der Ablesungsvorrichtung abhängige Constante, die den Werth des dritten Gliedes in Scalentheilen ausdrückt.

Behufs Anwendung obiger Formeln auf Versuche sind vorerst die Constanten k, h und γ zu bestimmen, was nachstehend für Eisen geschehen soll.

§ 2. Da $k\lambda_0 = \Delta t$ ist, so lässt sich aus der Formel von Edlund[1]):

$$\Delta t = \frac{A(b+t)\,\alpha}{w\,c} \cdot \Delta p, \tag{5}$$

der Werth von $k\lambda_0$ berechnen. Hierin bedeutet A das mechanische, durch Edlund abgeänderte Wärmeäquivalent (es ist 1,5767 mal kleiner als das gewöhnliche), $b+t$ die absolute Temperatur, α den thermischen linearen Coëfficienten, c die specifische Wärme bei constantem Drucke und w das Gewicht der Längeneinheit (1 m) des Drahtes. Δp ist das angewendete Streckgewicht und Δt die Temperaturänderung. Die Grösse $b+t$ ist wegen der Kleinheit von Δt als constant betrachtet. — Hieraus folgt:

$$\Delta t = \frac{1}{1{,}5767} \cdot \frac{A_1(b+t)\,\alpha}{w\,c} \cdot \Delta p = k\lambda_0. \tag{6}$$

Um k selbst zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, dass:

$$E = \frac{L}{\lambda_0} \cdot \frac{\Delta p}{q}, \text{ also: } \Delta p = \frac{Eq}{L} \cdot \lambda_0,$$

worin E der Elasticitätsmodul, L die Länge, q der Querschnitt und λ_0 die dem Streckgewichte Δp entsprechende Verlängerung des Drahtes ist. Danach wird:

1) Edlund, Pogg. Ann. **126.** p. 589. 1865.

(7) $$\Delta t = \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 (b+t)\,\alpha}{wc} \cdot \frac{Eq}{L} \cdot \lambda_0, \quad \text{und:}$$

(8) $$k = \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 (b+t)\,\alpha}{wc} \cdot \frac{Eq}{L}.$$

Ich wandte zunächst die Formeln (1), (2) und (3) auf die Versuche an Eisen an, welche in der bereits mehrerwähnten Abhandlung (1882, Heft 4) von mir beschrieben worden sind.

In Gl. (6) setze ich das gefundene $\alpha = 0{,}000\,010\,88$, (1882, Heft 4, § 14), ferner mit Edlund $c = 0{,}1138$. Das stets am Hebelarm $p = 567$ mm angebrachte Streckgewicht betrug $P = 1{,}1992$ kg, während der Befestigungspunkt des Drahtes von der Unterstützungsschneide des Hebels (1882, Heft 4, Fig. 2) $r_2 = 70{,}8$ mm entfernt war. Hiernach ist die Belastung:

$$\Delta p = \frac{P.p}{r_2} = \frac{1{,}1992\,.\,567}{70{,}8} = 9{,}6038 \text{ kg}.$$

Das Gewicht w war $= 0{,}002\,282$ kg.

Um die Gl. (6) für Eisen bei verschiedenen Temperaturen und wechselnder Belastung leicht benutzen zu können, schreibe ich sie in der Form:

(9) $$\Delta t = \left(\frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 b \alpha}{wc}\right) \Delta p + \left(\frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 \alpha}{wc}\right) t\,.\,\Delta p.$$

Setzen wir:

$$\frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 b \alpha}{wc} = M, \qquad \frac{1}{1,5767} \cdot \frac{A_1 \alpha}{wc} = N, \qquad \text{so ist:}$$

(10) $$\Delta t = (M + N.t)\,.\,\Delta p.$$

Für unseren Eisendraht ist:

$$M = 0{,}01675, \quad N = 0{,}000\,061\,36,$$

somit für $t = 5^0$ C. und $\Delta p = 9{,}6038$ kg:

(11) $$\Delta t = (0{,}01675 + 0{,}000\,061\,36\,.\,t)\,\Delta p,$$

$$\Delta t = 0{,}01706\,.\,\Delta p = 0{,}1638^0 \text{ C.} = k\lambda_0 = 0{,}164^0 \text{ C.}$$

Für $t = 100^0$ C. und $\Delta p = 9{,}6038$ kg ist:

$$\Delta t = 0{,}02289\,.\,\Delta p = 0{,}2198^0 \text{ C.} = k\lambda_0 = 0{,}220^0 \text{ C.}$$

§ 3. Wie im § 1 bemerkt wurde, ist h eine Constante der Differentialgleichung:

(12) $$d\tau = -h\tau\,dz,$$

worin τ die Temperaturdifferenz zwischen einem sich abkühlenden Körper und seiner Umgebung, z die Zeit der Abkühlung bedeutet. Bestimmt man in:

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = -h \int dz + C \tag{13}$$

die Integrationsconstante, so dass für $z = 0$ der Werth $\tau = \tau_0$ ist, so ergibt sich:

$$\tau = \tau_0 e^{-hz}. \tag{14}$$

Sind nun τ_1 und z_1, sowie τ_2 und z_2 beobachtete, zusammengehörige Werthe, so erhält man aus Gl. (14):

$$h = \frac{\log \tau_1 - \log \tau_2}{(z_2 - z_1) \log e}, \tag{15}$$

wobei man zugleich vom Anfangstemperaturüberschusse τ_0 unabhängig wird.

Das Richtigste wäre nun, h unter den Umständen zu bestimmen, unter denen sich der Draht bei den Dehnungsversuchen abkühlt, ihn somit in die Dehnungsvorrichtung einzuspannen, und die Temperaturveränderungen aus den Spiegelablesungen nach vorhergegangener Ermittelung des thermischen Ausdehnungscoëfficienten mit Berücksichtigung des Temperatureinflusses auf denselben zu berechnen. Dies ist deshalb nicht thunlich, weil die gleichmässige Erwärmung des Drahtes dann kaum ausführbar ist, wenn andere Missstände vermieden werden sollen. Die Erwärmung des Drahtes durch den galvanischen Strom würde die Berechnung der Temperatur aus den Spiegelablesungen unzuverlässig machen, weil der galvanische Strom nach Edlund[1]) unabhängig von der Wärmeentwickelung den Draht dehnen soll. Ich habe die Constante h aus dem Emissionsvermögen des Drahtes berechnet, nachdem dieses durch besondere Versuche an ihm bestimmt worden war.

Ist ε das totale Emissionsvermögen des Drahtes, σ dessen Oberfläche, τ wie in Gl. (14) die Temperaturdifferenz zwischen Draht und Umgebung, sowie z die Abkühlungszeit, so geht in der Zeit dz die Wärmemenge:

$$dQ = \varepsilon . \sigma . \tau . dz \tag{16}$$

1) Edlund, Pogg. Ann. 129. p. 15. 1866.

verloren. Andererseits ist aber auch:

(17) $$dQ = -p_0 . c . d\tau,$$

wenn p_0 das absolute Gewicht des Drahtes und c dessen spec. Wärme ist. Daraus ergibt sich:

$$-\frac{d\tau}{dz} = \frac{\varepsilon . \sigma}{p_0 c}\tau = h\tau$$

(18) $$\text{und somit: } h = \frac{\varepsilon . \sigma}{p_0 c}.$$

Da p_0, c und σ genau angegeben werden können, und h unter den obwaltenden Umständen zunächst nur als von ε abhängig angesehen werden kann, indem Luftberührung und Gestalt des Körpers bei diesen niederen Temperaturdifferenzen ohne erheblichen Einfluss auf den Verlauf der Abkühlung sind, so war ε durch Versuche zu bestimmen.

Dann wurde ein Stück des bei den Dehnungsversuchen gebrauchten Drahtes vom Gewichte p_1 zu einer Rolle mit ganz genau anschliessenden Windungen, deren Zahl m, aufgewunden, jedoch so, dass in sie gerade das kleine cylindrische Gefäss eines sehr empfindlichen Quecksilberthermometers hineingesteckt werden konnte und von der Rolle genau bedeckt wurde. Das untere Ende wurde mit einem Korkplättchen verdeckt. Um nicht den Gang des Thermometers dadurch unrichtig zu machen, dass etwa die Drahtrolle infolge ungleich starker Zusammenziehung von Eisen und Glas einen Druck auf die Wand des Quecksilbergefässes ausübt, war zwischen beiden ein Spielraum von etwa 0,1 bis 0,2 mm gelassen. Die spec. Wärme c_2 der Quecksilbermenge p_2 des Thermometergefässes, sowie die dünne Glaswand des letzteren gestatten, anzunehmen, dass die Temperaturvertheilung in Draht, Quecksilber und Glas eine ziemlich gleichmässige sei. Das Gewicht des Glases sei p_3 und die spec. Wärme desselben c_3. Die ausstrahlende, also äussere Oberfläche des Drahtgewindes sei σ_1:

Gemäss Gl. (14) ist $\tau = \tau_0 e^{-h_1 z}$, worin:

(19) $$h_1 = \frac{\varepsilon . \sigma_1}{p_1 c + p_2 c_2 + p_3 c_3}$$

nach Gl. (18) ist. Aus Gl. (18) und (19) ergibt sich:

$$h = \frac{\sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{p_1 c + p_2 c_2 + p_3 c_3}{p_0 c} \cdot h_1 . \tag{20}$$

h bezieht sich auf den in den Dehnungsapparat eingespannten, h_1 auf den aufgewickelten Draht. Um h_1 zu ermitteln, wurde mit der oben beschriebenen Einrichtung eine Versuchsreihe angestellt, indem am Thermometer die Temperaturen τ und an einer Secundenuhr die zugehörigen Zeiten z beobachtet waren. Die Erwärmung des Eisendrahtes nebst Thermometer geschah in einem Sandbade. Behufs Abhaltung des Luftzuges erfolgte die Abkühlung innerhalb eines Glascylinders von etwa 15 cm Weite. Die Temperatur der Luft im Cylinder wurde vor dem Versuche zu 15,8° C., nach demselben zu 15,9° C. bestimmt. Die Beobachtung begann erst, nachdem eine Abkühlung um etwa 8° stattgefunden hatte. Da ich annehmen durfte, dass die Temperatur während des Versuches etwas höher war, setzte ich $\tau = 16{,}0°$ C.

In der Tabelle I sind die Ergebnisse dieser Beobachtung zusammengestellt. Daraus wurden nach Gleichung (15) die darauffolgenden Werthe von h_1 berechnet; dieselben enthält die Tabelle II.

Tabelle I.

Nr.	Min.	Sec.	τ	$\tau - \tau^0$	Nr.	Min.	Sec.	τ	$\tau - \tau_0$
1	0	0	30	14	7	1	19	24	8
2	0	10	29	13	8	1	39	23	7
3	0	21	28	12	9	2	1	22	6
4	0	34	27	11	10	2	30	21	5
5	0	48	26	10	11	3	5	20	4
6	1	2	25	9	12	3	51	19	3

Tabelle II.

Aus Nr.	h_1	Δ
1 und 6	0,007 126	+0,000 158
4 „ 8	0,006 954	−0,000 014
2 „ 7	0,007 036	+0,000 068
5 „ 10	0,006 796	−0,000 172
3 „ 9	0,006 931	−0,000 037
Mittel:	0,006 968	

Mit der Waage bestimmt, ergab sich $p_1 = 0{,}9812$ g, p_2 und p_3 könnten nur mittelbar durch Berechnung des äusseren

Volumens des Thermometergefässes und der Messung der Dicke δ der Glaswand desselben gefunden werden. Dazu wurde eine Nadelspitze auf das Quecksilbergefäss des Thermometers aufgesetzt und die Entfernung i_1 der Spitze und deren Spiegelbild mittelst einer Lupe von der Brennweite f geschätzt, wobei sich das beobachtende Auge von der Sehweite w unmittelbar hinter der Linse befand. Danach wäre, wenn die wirkliche Entfernung von Spitze und Bild i beträgt:

$$(21) \qquad \delta = \tfrac{1}{2} i = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{f}{w + f} i_1 .$$

Die Brennweite f wurde durch einen besonderen Versuch zu 14,2 cm gefunden, es konnte ferner $w = 25$ cm genommen werden und i_1 wurde durch mehrfache auf die verschiedenste Weise angestellte Beobachtungen auf 0,8 mm geschätzt. Danach ist $\delta = {}^1/_2 . [14{,}2/(25 + 14{,}2)] . 0{,}8 = 0{,}15$ mm. Da jedoch der Boden des Gefässes viel dicker als die cylindrische Fläche war, so nehme ich $\delta = 0{,}2$ mm und lasse den Boden um so mehr ausser acht, als dieser jedenfalls einen Theil seiner Wärme nicht durch die Drahtrolle, sondern das Korkplättchen abgegeben hat.

Ist ϱ der äussere Radius des Gefässes und η die Höhe desselben, s_0 das spec. Gew. des Quecksilbers bei 0° und β der therm. cub. Ausdehnungscoëfficient desselben, so ist:

$$(22) \qquad p_2 = (\varrho - \delta)^2 \pi . \eta . \frac{s_0}{1 + \beta t} .$$

Von der Temperatur des Glases wurde bei der Messung des ϱ abgesehen. Diese ergab als Mittel aus drei Ablesungen an verschiedenen Stellen (3,88; 3,91; 3,83) den Werth $2\varrho = 3{,}873$ mm, also $\varrho = 1{,}936$ mm. Es wurde ferner $\eta = 13{,}2$ mm gemessen. Da die mittlere Temperatur während der Beobachtung zu 25° C. angenommen werden konnte, so folgt:

$$p_2 = (0{,}194 - 0{,}02)^2 . 3{,}1416 . 1{,}32 . \frac{13{,}596}{1 + 0{,}000\,1815 . 25} = 1{,}6993 \text{ g}.$$

Wenn S_0 das spec. Gew. des Glases bei 0° ist, so erhält man:

$$p_3 = \pi \eta (\varrho^2 - \delta^2)\, S_0 = 3{,}1416 . 1{,}32\, (0{,}194^2 - 0{,}02^2) . 2{,}7 = 0{,}4169 \text{ g}.$$

Da die Länge des eingespannten Drahtes 1,076 m war und 1 m (nach § 2) 2,2823 g wog, so ist $p_0 = 2{,}2823 . 1{,}076 = 2{,}4556$ g. Nun sind noch die Werthe von σ und σ_1 zu berechnen. Ist der Radius des gespannten Drahtes ϱ_1 und seine Länge L, beide Grössen in Centimetern, so ist $\sigma = 2\pi\varrho_1 L = 2 . 3{,}1416 . 0{,}0297 . 107{,}6 = 20{,}0800$ qcm. Unter σ_1 haben wir die Grösse der emittirenden Oberfläche der Drahtrolle zu verstehen. Da die Windungen sich berührten, so strahlt von jeder derselben nur der zwischen den Berührungsstellen nach aussen liegende Theil aus; ist seine Oberfläche bei einer Windung u, so ist bei mm Windungen die ausstrahlende Fläche $\sigma_1 = u . m$. Ich berechne u nach der sog. Guldinsregel und sehe von der schraubenförmigen Gestalt der Windungen ab. Die Entfernung des Schwerpunktes der die äussere Wulsthälfte bei der Drehung um die Rollenaxe beschreibenden Halbkreislinie von der Mitte des Halbkreisbogens sei ξ und der äussere Halbmesser der Rolle R, so wird:

$$u = 2\varrho_1 \pi^2 \left[R - \varrho_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right] \quad \text{und folglich:}$$

$$\sigma_1 = 2\varrho_1 \pi^2 \left[R - \varrho_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\right] . m .$$

Nun war $\varrho_1 = 2{,}77$ mm, die Zahl der Windungen war $m = 26{,}5$, daher:

$$\sigma_1 = 2 . 3{,}1416^2 . 0{,}0297 \left[0{,}277 - 0{,}0297 \left(1 - \frac{2}{3{,}1456}\right)\right] . 26{,}5 = 4{,}1342 \text{ qcm.}$$

Nimmt man, wie in § 2 $c = 0{,}1138$; $c_3 = 0{,}0333$ und $c_3 = 0{,}19$, so wird nach Gl. (20):

$$h = \frac{20{,}080}{4{,}134} . \frac{0{,}9312 . 0{,}1138 + 1{,}699 . 0{,}0333 + 0{,}417 . 0{,}19}{2{,}4556 . 0{,}1138} . 0{,}00697$$

$$h = 0{,}0293.$$

Dass $h > h_1$ kann nicht überraschen, wenn man beachtet, dass der gerade gehaltene Draht nach allen Seiten Wärme abgibt.

§ 4. Der Werth des γ hängt von der Ablesungsvorrichtung ab. Die im nächsten Paragraph benutzten Versuchsresultate sind mit dem in § 6 (1882 Heft 4) beschriebenen Apparate gewonnen. Ich behalte die dortige Be-

zeichnung bei, wonach n_0 und n_1 die behufs Messung einer Dehnung abgelesenen Scalentheile, dann r_1 die Entfernung des Spiegels von der Scala, r_2 die des Befestigungspunktes des Drahtes von der Drehungsaxe des Hebels ist. Ferner sei l die wirkliche Verlängerung oder Verkürzung des Drahtes, sämmtliche Grössen in Scalentheilen gemessen. Nach § 8 (1882 Heft 4) ist:

$$(23) \qquad l = 2 r_2 \left[\frac{n_1 - n_0}{4 r_1} - \frac{11}{2} \cdot \frac{n_1^3 - n_0^3}{(4 r_1)^3} \right].$$

Da hier die verglichenen Ablesungen immer an derselben Strecke der Scala vorgenommen werden, so kann das zweite Glied vernachlässigt werden. Ist $n_1 - n_0 = d$, so ergibt sich:

$$(24) \qquad d = 2 \frac{r_1}{r_2} l.$$

Wird in den Gleichungen (1—4) L in Scalentheilen angegeben, so ist $\gamma = 2 r_1 / r_2 = 2 . 2806 / 35{,}4 = 158{,}530$, da l in Gl. (24) die wirkliche Verlängerung des Drahtes in Scalentheilen ist.

§ 5. Die Gleichungen (1) bis (4) gelten zunächst für den Fall, dass die Zeit z_0 der An- und Abspannung dieselbe ist. Dies ist im allgemeinen bei den Versuchen meiner Untersuchung (1882 Heft 4) der Fall. Ausnahmen sind dort bemerkt. Diese Versuchszahlen sollen hier benutzt werden. Die in den vorigen Paragraphen ermittelten Constanten k und h beziehen sich auch auf die in der obenerwähnten Arbeit benutzte Eisensorte.

Da es sich insbesondere um das letzte Glied der Relationen (1) bis (4) handelt, so mögen nachstehende Kürzungen zweckdienlich sein:

$$(25) \quad {}^{v}F'_{z_0} = \gamma . L . \alpha_t' . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left[2 - \frac{1}{(e^{h z_0})^{2v}} \cdot (e^{h z_0} - 1) e^{h z_0} \right].$$

$$(26) \quad {}^{v}F''_{z_0} = \gamma . L . \alpha_t'' . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left[2 + \frac{1}{(e^{h z_0})^{2v}} (e^{h z_0} - 1) \right].$$

$$(27) \quad {}^{v}F_{z_0} = \gamma . L . k \lambda_0 \cdot \frac{1}{h z_0} \cdot \frac{e^{h z_0} - 1}{e^{h z_0} + 1} \left\{ \frac{1}{(e^{h z_0})^{2v}} \cdot (e^{h z_0} - 1) \left[\alpha_t' e^{h z_0} + \alpha_t'' \right] - 2 (\alpha_t' - \alpha_t'') \right\}.$$

Die Gl. des § 1 nehmen danach die übersichtlichere Gestalt:

(28) $$\lambda + {}^v l' = (b_v - a_v) + {}^v F'_{z_0}$$

(29) $$\lambda - {}^v l'' = (b_v - c_v) + {}^v F''_z \text{ und:}$$

(30) $${}^v l' + {}^v l'' = (c_v - a_v) - ({}^v F''_{z_0} - {}^v F'_{z_0}) = (c_v - a_v) - {}^v F_{z_0} \text{ an.}$$

Dabei ist für die erwähnten Versuche (1882 Heft 4): $L = 538$ Scalenth., $hz_0 = 0{,}0293 . 24 = 0{,}7032$, $\gamma = 158{,}53$, $e^{hz_0} = 2{,}7183^{0{,}7032} = 2{,}0200$, $k\lambda_0 = \Delta t = 0{,}1638$ (bei 5^0 C.), $\alpha_5'' = 0{,}000\,010\,88$ (§ 14, 1882 Heft 4), $h = 0{,}0293$, $z_0 = 24$ Secunden (Mittelwerth).

Bei dem Coëfficienten α_5' berücksichtige ich vorerst dessen Aenderung infolge der Spannung.[1]) Danach ist, wenn E_0 und E_{10} die Elasticitätsmoduln bei den beigesetzten Temperaturen sind, und die übrigen Werthzeichen ihre bisherige Bedeutung haben:

(31) $$\alpha_5' = \alpha_5'' + \frac{\Delta p}{9\,(10-0)} \cdot \left(\frac{1}{E_{10}} - \frac{1}{E_0}\right) \cdot$$

Da Δp der Zug in der Flächeneinheit des Querschnittes, ist:

$$\alpha_5' = 0{,}000\,010\,88 + \frac{35{,}657}{10}\left(\frac{1}{20212} - \frac{1}{20310}\right) = 0{,}000\,011\,74.$$

Somit ist:

$${}^v F'_{24} = 158{,}53 . 538 . 0{,}000\,011\,74 . 0{,}1638 \cdot \frac{1}{0{,}7032} \cdot \frac{2{,}02 - 1}{2{,}02 + 1} \cdot$$
$$\cdot \left[2 - \frac{1}{2{,}02^{2v}} (2{,}02 - 1) . 2{,}02\right] \cdot$$

${}^v F'_{24} = 0{,}1575 - 0{,}1623 . 0{,}4951^{2v}$, also ${}^1 F'_{24} = 0{,}1178$, ${}^2 F'_{24} = 0{,}1477$, ${}^3 F' = 0{,}1551$, ${}^4 F'_{24} = 0{,}1569$, ${}^5 F'_{24} = 0{,}1574$ Scalentheile.

Ferner ist:

$${}^v F''_{24} = 158{,}53 . 538 . 0{,}000\,010\,88 . 0{,}1638$$
$$\cdot \frac{1}{0{,}7032} \cdot \frac{2{,}02 - 1}{2{,}02 + 1} \left[2 + \frac{1}{2{,}02^{2v}} (2{,}02 - 1)\right] \cdot$$

${}^v F''_{24} = 0{,}1460 + 0{,}0745 . 0{,}4951^{2v}$, ${}^1 F''_{24} = 0{,}1643$, ${}^2 F''_{24} = 0{,}1505$, ${}^3 F''_{24} = 0{,}1471$, ${}^4 F''_{24} = 0{,}1463$, ${}^5 F''_{24} = 0{,}1461$ Scalentheile.

Endlich ist:

${}^1 F_{24} = {}^1 F''_{24} - {}^1 F''_{24} = 0{,}0465$, ${}^2 F_{24} = 0{,}0028$, ${}^3 F_{24} = 0{,}0080$, ${}^4 F_{24} = -\,0{,}0106$, ${}^5 F_{24} = -\,0{,}0114$ Scalentheile.

---

1) Dahlander, Pogg. Ann. 145. p. 147. 1872.

Die Werthe sind auf vier Stellen nur behufs Gewinnung der Uebersicht über den Verlauf derselben angegeben.

Man sieht, dass das von v unabhängige Glied wegen α_t' und α_t'' bei der Verlängerung und Verkürzung verschieden ist. Die Differenz beträgt: 0,1575 − 0,1461 = 0,0114. Das von v abhängige Glied nimmt anfänglich rasch, dann langsam ab, sodass man schon nach den ersten An- und Abspannungen dem Grenzzustande genügend nahe ist. Auf die Messung von λ übt sonach die durch Dehnung erzeugte Temperaturveränderung im allgemeinen noch einen beim Ablesen merkbaren Einfluss aus, da Zehntel von Scalentheilen noch geschätzt werden können. Dagegen kann ein Einfluss auf die Messung der elastischen Nachwirkung nicht angenommen werden.

Bezeichnet man mit v_0 den Werth von v, für welchen man das von v abhängige Glied in den Ausdrücken (25), (26), (27) vernachlässigen darf (hier gewöhnlich $v_0 = 5$ genommen), so ist, wenn man noch:

$$\alpha_t' = \alpha_t'' = \alpha_t \quad \text{setzt:}$$

$$(32) \qquad {}^{v_0}F_{z_0}' = {}^{v_0}F_{z_0}'' = 2\gamma \,.\, L \,.\, \alpha_t \,.\, k\lambda_0 \cdot \frac{1}{hz_0} \cdot \frac{e^{hz_0} - 1}{e^{hz_0} + 1}\,.$$

Schon der Natur der Sache gemäss kann der Werth dieses Ausdruckes sich mit z_0 nur wenig ändern. In der That ist:

$$\left\{\frac{1}{hz_0} \cdot \frac{e^{hz_0} - 1}{e^{hz_0} + 1}\right\}_{z_0 = 0} = \tfrac{1}{2} \quad \text{und:} \quad \left\{\frac{1}{hz_0} \cdot \frac{e^{hz_0} - 1}{e^{hz_0} + 1}\right\}_{z_0 = \infty} = 0,$$

sodass einer Schwankung des z_0 von 0 bis ∞ nur eine von $\gamma \,.\, L \,.\, \alpha_t \,.\, k\lambda_0$ bis 0, also etwa 0,1640 entspricht. So berechnet sich für 5° C.:

$${}^{v_0}F_{10}' = 0{,}1628; \quad {}^{v_0}F_{24}' = 0{,}1575; \quad {}^{v_0}F_{100}' = 1266.$$

Für Versuche, welche bei höheren Temperaturen vorgenommen werden, gestalten sich die Werthe ${}^{v}F'$ und ${}^{v}F''$ wegen der Aenderung von α_t und $k\lambda_0$ etwas anders. So ist für Temperaturen zwischen 90 und 100° C. nach § 11 und 14 (1882 Heft 4):

$$\alpha_{90}^{100} = \frac{L_{100} - L_{90}}{L_{90}\,(100 - 90)} = \alpha' + \alpha''\,(t + T),$$

$$\alpha_{90}^{100} = 0{,}000\,010\,73 + 0{,}000\,000\,014\,8\,(100 + 90),$$

$$\alpha_{90}^{100} = 0{,}000\,013\,54.$$

Nach § 2 ist für diesen Fall $k\lambda_0 = 0{,}2198$ somit ${}^{v_0}F'_{24} = {}^{v_0}F''_{24} = 0{,}24$ Scalentheile.

Danach darf also für die hier in Betracht kommenden Versuchsverhältnisse mit Eisendraht für ${}^{v_0}F'_{24} = {}^{v_0}F''_{24}$ ein Werth angenommen werden, der entsprechend der Temperatur, bei welcher die Versuche angestellt worden sind, von 0 bis 100° C. von 0,15 auf 0,24 Scalentheile sich hebt und als Correctionswerth in Betracht gezogen werden muss.

IX. *Ueber die Zulässigkeit der Annahme eines electrischen Sonnenpotentials und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene; von Werner Siemens.*

(Vorgelegt d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin am 31. Mai 1883.)

Mein Bruder, Sir William Siemens, hat in seiner Schrift „On the conservation of solar energy" die Hypothese aufgestellt, dass die Sonne ein hohes electrisches Potential besässe, welches vielleicht die Lichterscheinung des Zodiakallichtes hervorbrächte. Er erklärt die Entstehung und Erhaltung dieses electrischen Potentials durch Reibung der nach seiner Theorie der Sonne in ihren Polarregionen aus dem Weltraum zuströmenden, durch die von ihr ausgehenden Licht- und Wärmestrahlen dissociirten Materie. Diese würde nach eingetretener Verdichtung wieder verbrennen und dann dem Sonnenäquator zuströmen. Hierbei würde sie durch Reibung mit dem rotirenden Sonnenkörper electrisirt werden und dann durch die Centrifugalkraft der Sonnenrotation im electrisirten Zustande von neuem im Weltraum verbreitet.

Nimmt man diese von anderen Seiten viel bestrittene Theorie meines Bruders als richtig an, so liegt in der That eine ähnliche Erscheinung vor, wie die von mir beschriebene[1]) Electrisirung der Spitze der Cheops-Pyramide durch den emporwirbelnden Wüstenstaub. Man könnte dann annehmen, dass der als leitend und von dem ihn umgebenden Flammen-

1) W. Siemens, Pogg. Ann. 109. p. 355. 1860.

meer, der Photosphäre, isolirt gedachte Sonnenkörper die eine der durch die Reibung getrennten Electricitäten festhielte, während die andere im Weltraum durch Convection verbreitet würde. Da man dann auch annehmen muss, dass diese Convection über die Bahnen der Planeten weit hinausgeht, so müsste der Sonnenkörper für diese ein electrisches Potential haben und vertheilend auf sie wirken.

Ich will auf den Streit über die Zulässigkeit der Theorie meines Bruders nicht näher eingehen, verkenne auch das Gewicht mancher der dagegen zur Geltung gebrachten Gründe nicht, bin aber der Ansicht, dass die durch diese Theorie gegebene Möglichkeit der Annahme eines electrischen Sonnenpotentials in hohem Maasse für sie spricht, da einige der bedeutendsten terrestrischen Naturerscheinungen durch dasselbe ihre bisher vergeblich gesuchte Erklärung finden würden, und da andererseits bei dem jetzigen Stande der naturwissenschaftlichen Kenntniss kaum eine andere Erklärung für das Vorhandensein eines electrischen Sonnenpotentials zu finden sein wird. Denn bisher ist uns kein Vorgang bekannt, bei welchem nur eine Electricität hervorgerufen wird. Wir kennen nur Scheidungen der beiden Electricitäten, und wenn auch solche Scheidungen bei den gewaltigen mechanischen und chemischen Actionen an der Oberfläche des Sonnenkörpers aller Voraussicht nach in sehr hohem Grade auftreten, so müssen sie sich durch Leitung doch innerhalb desselben wieder ausgleichen, und selbst wenn eine dauernde Trennung beider Electricitäten im Sonnenkörper fortbestände, würde doch keine Fernwirkung einer derselben eintreten können. Solange also nicht neue, noch gänzlich unbekannte Thatsachen auftreten, bleibt die Annahme eines electrischen Sonnenpotentials an die Convectionstheorie meines Bruders gebunden!

Ich mag aber nicht unterlassen, kurz auf den gewichtigsten Einwand gegen diese Theorie, der ihr von den Herren Faye und Hirn entgegengestellt ist, einzugehen. Derselbe besteht darin, dass die Unveränderlichkeit der Umlaufzeit der Planeten um die Sonne die Annahme eines mit Materie gefüllten Raumes principiell nicht zuliesse. Die

astronomischen Beobachtungen geböten unbedingt die Annahme einer absoluten Leere des Weltraumes, da bei der gewaltigen Geschwindigkeit der Fortbewegung der Planeten auch eine äusserst verdünnte Atmosphäre doch noch eine messbare Verminderung der planetarischen Geschwindigkeit, mithin eine Verkürzung ihrer Umlaufzeit hervorbringen müsste. Dies wäre auch richtig, wenn die Voraussetzung zuträfe, dass die Atmosphäre des Weltraumes in relativer Ruhe wäre. Das kann aber nicht der Fall sein, wenn der von meinem Bruder angenommene Kreislauf wirklich stattfindet. Man muss annehmen, dass die Sonnenatmosphäre nahe dieselbe Umlaufzeit hat, wie der Sonnenkörper. Eine etwa durch die gewaltigen auf- und niedergehenden Strömungen in der Sonnenatmosphäre, die durch die Verbrennung der durch Ausdehnung abgekühlten Sonnenbestandtheile und die Abkühlung der verbrannten äussersten Schichten der Photosphäre durch Ausstrahlung entstehen müssen, herbeigeführte Differenz in der Rotationsgeschwindigkeit wird durch Reibung der verschieden schnell rotirenden Theile der Sonnenatmosphäre gegeneinander fortwährend wieder ausgeglichen werden. Ueber die Höhe dieser mit dem Sonnenkörper gleichmässig rotirenden Atmosphäre ist noch nichts bekannt. Nach Ritter's[1]) Berechnungen nimmt zwar die Dichtigkeit der Sonnenatmosphäre nach der sprungförmigen Aenderung der adiabatischen Curve in der Region der Photosphäre, in welcher der Wärmezuschuss durch die Verbrennungswärme die der fortschreitenden Verdünnung entsprechende Temperaturabnahme bedeutend verlangsamt, sehr schnell ab — wir kennen aber die Grenze der Verdünnung noch nicht, bis zu welcher das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz in Geltung bleibt. Erreicht die Atmosphäre aber die Grenze, in welcher Anziehungskraft und Centrifugalkraft sich das Gleichgewicht halten, so muss jedes diese überschreitende materielle Molecül von nun ab wie ein Planet um die Sonne rotiren. Fände ein stetes Nachdringen von neuen diese Grenze erreichenden Massentheilchen statt, so müsste sich hier eine fortschreitende Ver-

---

1) Ritter, Wied. Ann. **5.** p. 405, 543. 1878 u. ff.

dichtung der Materie, mithin ein Ring bilden, der nach den Kepler'schen Gesetzen seine Rotation um die Sonne vollzöge. Diese Ringbildung kann aber bei der vorausgesetzten Continuität der Sonnenatmosphäre nicht eintreten, da die gegenseitige Reibung der Gasschichten auch über die Gleichgewichtsfläche hinaus fortdauert, mithin auch die bereits in planetarischer Bewegung befindlichen Gasschichten einer Beschleunigung unterliegen. Die Folge muss sein, dass sich mit der Zunahme der Geschwindigkeit auch der Abstand aller dieser Mikroplaneten von der Sonne fortwährend vergrössert, dass mithin der von meinem Bruder angenommene stetige Ausfluss von Sonnenatmosphäre in den Weltraum wirklich stattfinden muss. Derselbe kann nur in der Zone des Sonnenäquators stattfinden, da hier die Centrifugalkraft bei gleichem Abstande vom Sonnencentrum am grössten ist. Es muss auch angenommen werden, dass die Dichtigkeit dieser, überall in Uebereinstimmung mit den Kepler'schen Gesetzen rotirenden Atmosphäre in der Ebene des Sonnenäquators bis auf grosse Entfernungen von der Sonne hinaus constant bleibt, da die Schwerkraft der Sonne überall durch die Umlaufgeschwindigkeit äquilibrirt ist. In den senkrecht auf der Sonnenäquatorebene stehenden Richtungen muss die Dichtigkeit dagegen abnehmen, da die Sonnenanziehung sich mit der Entfernung von der Sonnenäquatorebene vermindert.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass ein mit der Erscheinung des Zodiakallichtes zusammenfallender, von der Sonne ausgehender materieller Strom überall die Umlaufzeit von Planeten haben muss, die sich in dem betreffenden Sonnenabstande befinden. Von einem Widerstande, den Planeten durch die mit ihnen nahe gleichmässig sich um die Sonne bewegenden materiellen Theile des interplanetarischen Raumes erführen, kann also keine Rede sein. Nur ein — hier zu vernachlässigender — Widerstand infolge der Neigung ihrer Ekliptik zur Ebene des Sonnenäquators muss stattfinden, auf den vielleicht die beobachtete Verminderung dieses Neigungswinkels zurückzuführen sein wird. Auch die Satelliten müssen bei der Rotation um ihre Planeten einen Wider-

stand durch die Atmosphäre des Weltraumes erfahren, wie auch die äusserste Grenzschicht der mit den Planeten rotirenden Atmosphäre derselben einen Reibungswiderstand erleiden muss. Vielleicht hat Hr. Hirn hinsichtlich des Mondes recht mit seiner Behauptung, dass bei der grossen Bewegungsgeschwindigkeit der Himmelskörper auch das verdünnteste widerstehende Medium die Atmosphäre derselben fortfegen müsste!

Viele Beobachtungen machen es sehr wahrscheinlich, dass der Weltraum wenigstens innerhalb der Region unseres Sonnensystems mit brennbarem Stoffe erfüllt ist. Es spricht dies indirect auch sehr entschieden für die Annahme meines Bruders, dass die Verbrennungsproducte im Zustande grösster Verdünnung und sehr niedriger Temperatur durch die Sonnenstrahlen wieder dissociirt werden. Der gemachte Einwand, dass die Dissociationsarbeit die Energie der Lichtstrahlen absorbiren würde und der Weltraum dadurch undurchsichtig werden müsse, liesse sich durch die Annahme beseitigen, dass es nur die unsichtbaren, chemisch wirkenden Strahlen sind, welche die Dissociationsarbeit verrichten. Man kann aber auch annehmen, dass die Dissociationsarbeit im Laufe der Zeiten bereits vollführt ist, und dass jetzt nur noch die von der Sonne fortdauernd ausgehende, noch chemisch verbundene Masse von ihren Lichtstrahlen zu dissociiren ist — wozu nur ein Theil der Lichtenergie verbraucht würde. Es wäre ohne die Annahme der Dissociation nicht recht erklärlich, warum der Weltraum nicht wie die Atmosphäre der Erde wesentlich mit Sauerstoff, Stickstoff und Wasserdampf erfüllt wäre. Es lässt sich doch nicht annehmen, dass die Zusammensetzung des Sonnenkörpers eine wesentlich verschiedene von der der Erde ist, wenn beide aus derselben rotirenden kosmischen Nebelmasse hervorgegangen sind, da eine Scheidung der Materie nach dem specifischen Gewichte bei gasförmigem Zustande nicht anzunehmen ist. Es müssen daher, wenigstens in unserem Sonnensystem, die electronegativen Stoffe überall vorherrschend sein, und es ist anzunehmen, dass auch die erkaltete ausgebrannte Sonne dereinst von einer Sauerstoff im Ueberschuss enthaltenden Atmosphäre

umgeben sein wird. Ist aber der Weltraum mit dissociirten Verbrennungsproducten in grosser Verdünnung erfüllt, so müssen dieselben der Sonnenattraction überall da anheim fallen, wo sie nicht, wie in der Nähe der Aequatorialebene der Sonne, ihrer Anziehung durch die planetarische Rotation entzogen sind. Es muss daher namentlich in den Polarregionen, wo die Centrifugalkraft ganz fehlt, ein steter Zustrom dissociirter Materie zur Sonne stattfinden, wie mein Bruder es annimmt. Bleibt die Sonnenmasse, wie wohl vorauszusetzen ist, unverändert dieselbe, so heisst das, dass ein Gleichgewichtszustand eingetreten ist, bei welchem ebenso viel verbrannte Materie von der Sonne in ihrer Aequatorialzone ausströmt, wie ihr durch Massenanziehung im dissociirten Zustande in den Polarregionen wieder zugeführt wird. Demnach würde denn auch die Strömung von den Polen zum Aequator, sowie auch die nachgewiesene geringere Winkelgeschwindigkeit der Rotation der gasförmigen Sonnenmasse in ihren höheren Breiten gegeben sein.

Wenn hierdurch aber auch die Möglichkeit der Entstehung eines electrischen Sonnenpotentials durch Friction und continuirliche Entfernung der mit der einen Electricität geladenen Körpertheile von der Sonne gegeben ist, so bleibt der Mechanismus dieser Electrisirung doch noch sehr dunkel. Das Licht der Sonne geht von einem Flammenmeere aus, welches nach Ritter's schönen Rechnungen eine Dicke von ca. 25 km haben muss. Ob eine Flamme verbrennender Gase von dieser Dicke noch viel Wärme und Lichtstrahlen einer heisseren Emissionsquelle durchlassen, wieviel sie von denselben absorbiren oder wie eine Wolkenschicht zurückwerfen wird, können wir nicht wissen. Ich habe kürzlich[1]) den Nachweis geführt, dass Gase, welche bis auf 1500 bis 2000° C. erhitzt sind, noch vollständig dunkel erscheinen, während sie die langsamer schwingenden Wärmestrahlen schon bei geringer Temperaturerhöhung emittiren. Ob Gase bei noch weit höherer Erhitzung selbstleuchtend werden, ist durch das Experiment bisher nicht festgestellt. Da eine

1) W. Siemens, Berl. Ber. 1882. p. 961. — Wied. Ann. 18. p. 311. 1883.

kleine Flamme aber im helleren Lichte schon einen Schatten wirft, so erscheint es unwahrscheinlich, dass viele der von tieferen und heisseren Sonnenschichten ausgehenden Licht- und Wärmestrahlen die mächtige Photosphäre zu durchdringen vermögen. Die beobachtete Sonnentemperatur und das Sonnenlicht sind dann Erscheinungen, die ihren Ursprung wesentlich in der chemischen Thätigkeit haben, die in der Sonnenatmosphäre verläuft. Diese bedingt, dass die im dissociirten Zustande aufsteigende und dabei durch Volumenvergrösserung sich abkühlende Sonnenatmosphäre zu verbrennen beginnt, wenn die Dissociationstemperaturgrenze für die betreffende Verbindung überschritten ist, und dass diese Verbrennung so lange fortdauert, bis der Wärmeverlust durch Ausdehnung gleich der freigewordenen Verbrennungswärme ist. Die scheinbare Sonnentemperatur wird daher annähernd die Dissociationstemperatur sein, und zwar die Dissociationstemperatur derjenigen Verbindungen, welche das grösste chemische Wärmeäquivalent haben, mithin des Wassers, dessen Bestandtheile in grösster Höhe verbrennen werden, während die schwereren und zugleich eine höhere Dissociationstemperatur besitzenden Massen schon in niedrigeren Regionen verbrennen. Um diesen Auftrieb der dissociirten Sonnenbestandtheile und ihre damit verbundene Verbrennung im Gange zu erhalten, müssen die endlichen Verbrennungsproducte zum Sonnenkörper zurückkehren. Wie Faye, Ritter, Reye und andere schon dargelegt haben, geschieht dies einmal deswegen, weil die Verbrennungsproducte ein grösseres specifisches Gewicht haben, als die unverbrannten Gase, und zweitens infolge der Abkühlung der höheren Schichten der Photosphäre durch Wärme- und Lichtstrahlung. Dadurch wird das adiabatische Gleichgewicht der über einander gelagerten Gasschichten gestört und die relativ schwerer gewordenen höheren müssen in niedergehenden Strömen zur Sonnentiefe zurückkehren. Dass diese niedergehenden Ströme nur in mittleren Sonnenbreiten als Sonnenflecken sichtbar werden, hat seinen Grund darin, dass nur hier die Bedingungen für eine rotirende Bewegung des niedergehenden Stromes vorhanden sind, wodurch demselben eine verticale Richtung gegeben wird. Die trichter-

förmige Verminderung des Durchmessers der Sonnenflecke ist die Folge der grossen Volumenverminderung durch den rasch zunehmenden Druck. Der innere Raum der Trichter muss relativ dunkel sein, da hier die leuchtende Flammenbildung fehlt, da die Temperatur um den Betrag der Dissociationswärme geringer sein muss, als die umgebende noch unverbrannte Sonnensubstanz, und da vielleicht schon Condensationsproducte auftreten, welche als Schirm die Strahlung der heller leuchtenden tieferen Sonnenschichten zurückhalten. Andererseits ist es nicht unwahrscheinlich, dass die hoch auflodernden Sonnenfackeln aus Blasen von richtig gemischtem Knallgas oder mit Sauerstoff im richtigen Verhältniss gemischtem Kohlengase bestehen, welche infolge geringeren specifischen Gewichtes und grösserer Wärmeentbindung bei der Verbrennung unter Durchbrechung der Penumbra und der Photosphäre hoch emporgetrieben werden und bei der Abwesenheit leuchtender Flammenbestandtheile die Strahlen der heisseren tieferen Sonnenschichten zum Theil durchlassen. Die mechanisch kaum zulässige colossale Geschwindigkeit des Aufleuchtens mancher Fackeln könnte dann in dieser Strahlung aus der Sonnentiefe ihre Erklärung finden. Mein Bruder nimmt in einem neuerdings publicirten Nachtrage zu seiner Sonnentheorie an, der Sonnenkörper selber könne nicht heisser wie etwa 3000° C. sein, da bei höherer Temperatur die chemischen Strahlen die überwiegenden würden, und bei sehr viel höherer Temperatur die Sonne sogar zu leuchten aufhören müsste. Es könnte das richtig sein, wenn die Photosphäre nicht als Schirm die heisseren Strahlen des Sonnenkörpers zurückhielte, wie es wahrscheinlich ist. In der That können wir aus Analogien der Beobachtungen keinen einigermassen sicheren Schluss ziehen, ob ein auf Hunderttausende oder gar Millionen von Graden erhitzter Körper noch leuchten wird. Es könnten von ihm sogar nur Strahlen so geringer Wellenlänge ausgehen, dass sie auch keine chemische Arbeit mehr leisteten! Dann wäre der scheinbar dunkle Kern der Sonnenflecke auch so zu erklären, dass die flammenlosen, durch eintretende Dissociation relativ abgekühlten, zur Sonne zurückkehrenden Verbrennungspro-

ducte durchsichtig blieben und den für die Lichtstrahlung zu hoch erhitzten tieferen Sonnenschichten die Durchstrahlung gestatteten! Dafür würde sogar die violette Farbe der Kerne der Sonnenflecke sprechen. Für darstellbare Temperaturen gilt allerdings das Gesetz, dass neben den der höheren Temperatur entsprechenden schnellen Aetherschwingungen auch die ganze Scala der langsameren auftritt, ob sich das aber bei so ungemein viel höheren Temperaturen nicht ändert, kann man nicht wissen.

Es war nöthig, auf die wahrscheinliche Beschaffenheit des Sonnenkörpers und seiner Licht und Wärme ausstrahlenden Umhüllung etwas näher einzugehen, um eine Grundlage für die Beantwortung der Frage zu gewinnen, ob bei dem jetzigen Umfange unseres Wissens die Annahme eines electrischen Sonnenpotentials als zulässig erscheint. Wie schon hervorgehoben, ist seine Entstehung nur denkbar, wenn ein Scheidungsvorgang beider Electricitäten an der Sonnenoberfläche stattfindet, und wenn gleichzeitig die eine der geschiedenen Electricitäten abgeleitet wird. Da die Flamme ein guter Leiter der Electricität ist, so kann man die ganze Photosphäre und die wahrscheinlich auch schon an dem Verbrennungsvorgange theilnehmende Penumbra als einen leitenden Mantel betrachten, welcher den heisseren Sonnenkörper umhüllt. Da Flammen ferner die Eigenschaft haben, in ähnlicher Weise, wie Spitzen, die Electricität an ihre Umgebung, hier also an ihre gasförmigen Verbrennungsproducte zu übertragen, so muss die Photosphäre durch eine theilweise Ausströmung der Verbrennungsproducte in den Weltraum continuirlich entladen werden. Wäre also die Photosphäre von dem noch nicht in der Verbrennung begriffenen tieferen Sonnenkörper isolirt und dieser als ein Leiter der Electricität zu betrachten, so könnte er electrisch geladen werden durch Reibungs- oder auch chemische Vorgänge, die zwischen dem leitenden Sonnenkörper und der Photosphäre stattfänden. Die Frage, ob heisse Gase Leiter der Electricität sind, auch wenn keine Flammenerscheinung in ihnen stattfindet, ist noch nicht durch directe Versuche entschieden. Dass die Gase, wie alle Körper, Leiter der

Electricität werden, wenn die dielectrische Polarisation ihrer Molecüle ihr Maximum erreicht hat, und dass dieses Polarisationsmaximum mit der Verdünnung der Gase — mithin auch mit ihrer Erwärmung vom absoluten Nullpunkt ab gerechnet — proportional abnimmt, habe ich bereits im Jahre 1857[1]) bei Beschreibung meines Ozonapparates nachgewiesen. Es unterscheiden sich danach Leiter von Nichtleitern nur dadurch, dass bei ersteren das Polarisationsmaximum verschwindend klein ist. Dass bei sehr hoch erhitzten Gasen das Polarisationsmaximum, wie bei den metallischen Leitern, verschwindend klein werden sollte, ist kaum anzunehmen. Directe Versuche über die dielectrischen Eigenschaften hocherhitzter flammenfreier Gase sind mir nicht bekannt, doch lassen sich die Erscheinungen des electrischen Funkens, sowie die Leuchterscheinung in dem Ozonapparat und den Geissler'schen Röhren, sowie auch die schönen Versuche von Hittorf[2]) auch ohne die Annahme, dass sehr hoch erhitzte Gase in anderer Weise leiten, wie kalte von gleicher

---

1) W. Siemens, Pogg. Ann. **102**. p. 66. 1857.

2) Hr. Hittorf sagt in einer Mittheilung in Wied. Ann. **19**. p. 73. 1883, dass meine der Academie am 9. Nov. 1882 gemachte Mittheilung, dass Gase bei Temperaturen von 1500 bis 2000° C. noch vollständig dunkel erscheinen, wenn sie vollkommen flammenfrei sind, und dass das Leuchten der Gase beim Durchgange eines electrischen Stromes ein ähnlicher Vorgang sei, wie das Leuchten einer Flamme, welche keine festen Bestandtheile ausscheidet, von ihm selbst und anderen schon früher bekannt gemacht sei. Ich gebe dies hinsichtlich des Nichtleuchtens heisser Gase gern zu, habe überhaupt keine Prioritätsansprüche an diese Mittheilung geknüpft, glaube jedoch, dass ich zuerst experimentell nachgewiesen habe, dass so hoch erhitzte Gase wirklich vollkommen dunkel erscheinen, wenn auch die heisse Luftschicht über einen Meter dick ist, und das Auge durch volle Dunkelheit den höchsten Grad von Empfindlichkeit angenommen hat. Die Hittorf'schen Versuche wiesen nur eine relative Dunkelheit heisser Gase nach. Die Leitungsfähigkeit der Gase anlangend, die Faraday für hohe Spannungen schon annahm, so habe ich in meinem oben angeführten, ca. 25 Jahre älteren Aufsatze bereits das allgemeine Gesetz aufgestellt, nach welchem die Leitungsfähigkeit der Gase beginnt. Hierauf möchte ich auch Hrn. E. Wiedemann hinweisen, welcher die Priorität für die Erklärung des Leuchtens der Gase beim Durchgange eines electrischen Stromes als Folge einer dielectrischen Polarisation in Anspruch nimmt.

Dichte, erklären. Die hohe Temperatur der Sonnengase scheint daher bisher kein Hinderniss zu sein, ihnen isolirende Eigenschaften zuzuschreiben. Ihr Polarisationsmaximum wird sogar, der Dichte der Sonnenatmosphäre entsprechend, trotz ihrer hohen Temperatur grösser sein, als das unserer kalten atmosphärischen Luft.

Ganz andere Verhältnisse können aber eintreten bei Eintritt des kritischen Zustandes in grösseren Sonnentiefen. Für die electrische Eigenschaft des kritischen Zustandes haben wir weder Versuche noch Analogien, können daher das Sonneninnere auch als eine metallisch, d. i. mit verschwindend kleinem Polarisationsmaximum, leitende Masse annehmen. Die Oberfläche dieser im kritischen Molecularzustande befindlichen Sonnenmasse könnte dann ein electrisches Potential haben. Es müsste hierbei aber die Frage in Betracht gezogen werden, ob die leitende Photosphäre nicht an ihrer dem Sonneninneren zugewandten Fläche durch Vertheilung electrisch werden könnte, so dass die Sonne mit ihrer sie umhüllenden Photosphäre selbst eine gewaltige Leydener Flasche bildete, wodurch eine Fernwirkung der Electricität des leitenden Sonnenkerns grösstentheils ausgeschlossen würde. Ohne weiteres liess sich dies nicht annehmen, da die Leitungsfähigkeit der Flamme offenbar ganz andere, direct mit dem Verbrennungsvorgange selbst zusammenhängende Ursachen hat, wie die der nicht in chemischer Action befindlichen leitenden Körper, so dass eine Analogie zwischen beiden hinsichtlich ihrer electrischen Vertheilungsfähigkeit kaum zu ziehen ist. Ich habe daher einige Versuche darüber angestellt, ob eine Flamme der Influenzwirkung in gleicher Weise unterliegt, wie andere Leiter, und diese Versuche haben die Voraussetzung bestätigt. Danach können zwei von einander isolirte Flammen in gleicher Weise als Belegungen einer geladenen Leydener Flasche auftreten, wie andere Leiter.[1]) Es muss hiernach angenommen werden,

1) Der Versuch wurde in der Weise angestellt, dass ein ringförmiger Gasbrenner isolirt wurde. Bei geöffnetem Gashahn erhob sich über demselben eine etwa 15 cm hohe cylindrische Flamme von ca. 2 cm Durchmesser. Die Flamme durchstrich einen isolirt angebrachten, sie concen-

dass der Sitz der Sonnenelectricität wesentlich in der Photosphäre zu suchen ist und nicht in dem Sonnenkörper selbst. Die electrischen Eigenschaften der Flamme sind — trotz aller bisher mit denselben angestellten Versuche — noch sehr unklar. Namentlich ist noch nicht entscheidend festgestellt, ob eine durch sie selbstthätig erzeugte Potentialdifferenz zwischen den verschiedenen Zonen der Flamme, besonders zwischen derjenigen, wo die Verbrennungserscheinung beginnt, und der, wo sie erlischt, besteht oder nicht. Wäre dies der Fall, wie aus einigen Versuchen von Riess und anderen wahrscheinlich erscheint, so könnte auch hierin bei den gewaltigen Dimensionen des die Sonne umgebenden Flammenmeeres und bei den ihnen entsprechenden grossen Differenzen in der Temperatur und der Dichtigkeit die Ursache der Sonnenelectricität gesucht werden, da die Electricität der äusseren Schichten der Photosphäre dann auf die Verbrennungsproducte überginge und mit ihnen nach der Theorie meines Bruders zum Theil in der Richtung der Rotationsebene der Sonne im Weltraum verbreitet würde.

---

trisch umgebenden Metallcylinder von ca. 8 cm Durchmesser. Zur Herstellung der leitenden Verbindung mit der Flamme wurde ein isolirter kreisförmig gebogener Platindraht in den unteren Theil der Flamme gelegt. Die zwischen diesem Platindraht und dem Metallcylinder durch eine galvanische Kette von 50 Daniells stattfindende Ladung wurde nun mit Hülfe meiner bekannten, schnell oscillirenden electro-magnetischen Wippe gemessen, und zwar abwechselnd bei fast ganz geschlossenem und bei geöffnetem Gashahn. Die Differenz der Ablenkungen des Spiegelgalvanometers war dann ein Maass der Capacität der aus Flamme und Metallcylinder gebildeten Leydener Flasche. Die erzielten Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Zahl der Oscillationen der Wippe pro Minute	Differenz der Scalenablenkung zwischen niedriger und hoher Flamme	Grösse einer Entladung
310	3	96
600	6	100
700	8	115
1000	12	120

Die wachsenden Zahlen der letzten Columne zeigen, dass bei langsamen Schwingungen ein Theil der Flaschenladung durch Leitung verloren ging.

Mag aber der Electrisirungsvorgang in der Sonnenverbrennung selbst, in der Reibung der aus dem Weltraum ihr zuströmenden Materie oder in anderen noch unbekannten Ursachen zu suchen sein — die Möglichkeit der Existenz eines electrischen Sonnenpotentials ist durch die äquatoriale Ausbreitung von Verbrennungsproducten der Sonne im Weltraum gegeben.

Diese Möglichkeit erhebt sich aber zum Range grosser Wahrscheinlichkeit, wenn man die Leichtigkeit betrachtet, mit welcher sich schwierige, bisher noch ungelöste Probleme terrestrischer Naturerscheinungen mit Hülfe eines electrischen Sonnenpotentials lösen lassen. Hat die Sonne ein electrisches Potential, so muss sie vertheilend auf alle Himmelskörper, also auch auf die Erde wirken. Eine Ansammlung entgegengesetzter Electricität auf ihrer ganzen Oberfläche kann aber auch bei dieser nur stattfinden, wenn die frei werdende entgegengesetzte Electricität abgeleitet wird. Diese Ableitung ist ebenfalls nur denkbar durch Verbreitung im Weltraum. Es ist ungefähr derselbe Vorgang, wie er stattfindet, wenn einem geladenen kugelförmigen Conductor eine kleinere isolirte Kugel gegenüber gestellt wird. Die Kugel nimmt dann allmählich eine entgegengesetzte Ladung an, während die gleiche Electricität sich durch Zerstreuung im Raume verliert. Bei der Erde wird diese Zerstreuung der durch Sonnenvertheilung entstandenen sogenannten freien Electricität noch durch die grosse Verdünnung der höheren Luftschichten und die auf- und niedersteigenden, mit Feuchtigkeit beladenen Luftströme wesentlich begünstigt, da durch diese den höheren Schichten sehr verdünnter Luft die freie Electricität zugeführt wird. Dass in diesen verdünnten höheren Luftschichten electrische Strömungen vor sich gehen, beweisen die Nord- und Südlichter. Man könnte dieselben als den an der Grenze der Erdatmosphäre stattfindenden electrischen Ausgleich zwischen der von der Sonne mit negativer Ladung ausströmenden Materie und der freigewordenen positiven Influenzelectricität der Erde betrachten. Dieser Ausgleich wird immer dann auftreten müssen, wenn durch Aenderung des Sonnenpotentials auch das der Erde

geändert wird. Zur Herstellung des Gleichgewichtes muss dann positive oder negative Electricität von der Erde ausströmen, es muss also entweder ein Ausgleich mit der von der Sonne ausströmenden negativen Electricität an der Grenze der Atmosphäre stattfinden, oder es muss diese der Erde zufliessen. Dass dieser Austausch vorzugsweise in den Polargegenden der Erde stattfindet, kann darin seinen Grund haben, dass die polare Luft stärker electrisch ist, da sie durch die äquatoriale Luftströmung in den oberen Regionen der Atmosphäre fortwährend durch diese stärker electrisirte Luft verdrängt wird, mithin in ihrer ganzen Masse die Electricität der höchsten Luftschichten niederer Breiten annehmen muss. Die mit den Nord- und Südlichtern in innigem Zusammenhang stehenden Erdströme sind dann als eine nothwendige Consequenz des vorzugsweise in den Polargegenden stattfindenden Ausgleiches der Intensitätsschwankungen der Sonnen- und Erdelectricität zu betrachten. Diese Ausgleichsströme müssen ihrerseits durch ihre electrodynamische Wirkung die Magnetnadel beeinflussen.

Es drängt sich hier aber die Frage auf, ob nicht der Erdmagnetismus selbst als eine electrodynamische Wirkung der electrischen Ladung der Erde aufzufassen ist. Nach der schönen Untersuchung, die Hr. Rowland im Helmholtz'schen Cabinet unter dessen Leitung angestellt hat[1]), ist es als nachgewiesen zu betrachten, dass mechanisch fortbewegte stationäre Electricität electrodynamische Wirkungen in ähnlicher Weise ausübt, wie ein electrischer Strom. Danach muss die Erde, wenn ihre Oberfläche mit Electricität von grosser Dichtigkeit geladen ist, infolge ihrer Rotation in gleicher Weise magnetische Erscheinungen zeigen, wie wenn electrische Ströme sie umkreisten, die während der Zeit einer Umdrehung in jeder Breite ebenso viel Electricität um sie herumführten, wie die statische Electricität beträgt, die auf dem betreffenden Oberflächenringe sich befindet. Wie gross die Dichtigkeit der Electricität auf der Erdoberfläche sein müsste, um durch ihre Rotation den Erdmagnetismus hervor-

---

1) Rowland, Berl. Ber. 1876. p. 211—216.

zubringen, wird geübten Mathematikern nicht schwer fallen zu berechnen. Da das magnetische Moment eines Kreisstromes im Verhältniss der umströmten Fläche steht, so wird sich dieselbe voraussichtlich bei den grossen Dimensionen der Erde nicht als unzulässig gross herausstellen. Ferner wird bei den colossalen Dimensionen der Sonne, deren Oberfläche 11483 Erdoberflächen enthält, während die Entfernung der Sonne nur 22934 Erdhalbmesser beträgt, die Dichtigkeit der Sonnenelectricität nur etwa doppelt so gross, wie die der Erde zu sein brauchen, um diese durch electrische Vertheilung hervorzurufen. Wäre die Erdoberfläche ganz gleichmässig mit Electricität beladen, so müssten die magnetischen Pole mit den Rotationspolen der Erde zusammenfallen. Da dem nicht so ist, und da überhaupt grosse Unregelmässigkeiten in der Vertheilung des Erdmagnetismus auf der Erdoberfläche stattfinden, so muss die Vertheilung der ruhenden Electricität auf der Erdoberfläche eine unregelmässige sein. Es erscheint dies auch wahrscheinlich, wenn man bedenkt, dass circa $^1/_3$ der Erdoberfläche aus Festland besteht, welches grossentheils Felsboden hat, der von schlecht leitendem Erdreich oft nur dünn bedeckt ist. Die Ansammlung der Influenzelectricität wird daher hier vorzugsweise auf der Oberfläche des glühenden, gut leitenden Erdinnern zu suchen sein, durch deren grösseren Abstand von der Erdoberfläche der überwiegende Einfluss der zunächst liegenden in convectiver Bewegung befindlichen Electricitätsmassen vermindert wird. Ob sich die bestehende Vertheilung des Erdmagnetismus, sowie die beobachteten periodischen und unregelmässigen Störungen desselben aus dieser Theorie über die Ursache der erdmagnetischen Erscheinung werden herleiten lassen, muss späterer eingehender Forschung anheimfallen. Die täglichen regelmässigen Störungen könnten darin ihre Erklärung finden, dass die Dichtigkeit der Influenzelectricität auf der der Sonne abgewendeten Seite etwas geringer sein muss, wie auf der ihr zugewendeten. Diese von der Stellung der Sonne abhängende ungleiche Dichtigkeit der Erdelectricität muss mit der Rotation der Erde fortschreiten, kann daher auch die Ursache der von Lamont erörterten

regelmässigen äquatorialen Erdströme sein. Ebenso können die magnetischen Störungen des Mondes in der Rückwirkung der Mondelectricität auf die Vertheilung der Influenzelectricität der Erde ihre Erklärung finden. Dagegen wird die säculare Aenderung der Lage der magnetischen Pole wohl nur auf kosmische, noch ganz unerkannte Ursachen zurückzuführen sein.

Mag diese Theorie aber auch noch vieles unerklärt lassen, so gewährt sie doch wenigstens die Möglichkeit, eine Erklärung für die Entstehung des Erdmagnetismus im Anschluss an unsere bisherigen Erfahrungen zu geben. Es ist dies bei keiner der bisherigen Theorien der Fall. Der Annahme eines Centralmagnets im Inneren der Erde widerspricht schon die allgemeine Erfahrung, dass die Glühhitze den Magnetismus aller Körper vernichtet. Ohne gänzlich von der Erfahrungsgrundlage abzusehen, kann man daher die Annahme eines Centralmagnets nicht aufrecht erhalten. Der Annahme einer Schicht magnetischer Erze in der Erdkruste als Sitz des Erdmagnetismus widerspricht einmal die Rechnung, da der Magnetismus einer solchen Schicht, auch wenn sie möglichst dick und zum Maximo magnetisirt angenommen wird, nicht ausreichen würde, um den vorhandenen Erdmagnetismus hervorzubringen; dann aber auch die Unmöglichkeit, einen Grund für die Entstehung der Magnetisirung dieser Erzschicht aufzufinden, da dieselbe doch nicht von Anfang an vorhanden gewesen sein kann, sondern erst nach der Erkaltung der Erde entstanden sein müsste. Dasselbe würde von der nach Faraday's Entdeckung der magnetischen Eigenschaften des Sauerstoffs der Luft aufgestellten Theorie, dass der Sauerstoff der Luft der Sitz des Erdmagnetismus wäre, geltend zu machen sein, wenn nicht die Rechnung schon ergäbe, dass der Sitz dieses Magnetismus sich nicht ausserhalb der Erdoberfläche befinden kann. Ebenso wenig können die aufgestellten Theorieen des Erdmagnetismus, welche auf thermoelectrischen Strömen oder, wie Zöllner es versuchte, auf Convectionsströmen im flüssigen Erdinneren beruhen, Beachtung finden, da in einem nach allen Seiten gleich gut leitenden Medium solche Ströme gar nicht zur Erscheinung kommen können.

Uebrigens ist auch für die Existenz fortdauernder regelmässiger Strömungen des flüssigen Erdinneren gar keine Ursache aufzufinden.

In ähnlicher Weise, wie ein electrisches Sonnenpotential die Möglichkeit der Erklärung des Erdmagnetismus mit den ihm verwandten Erscheinungen der Nord- und Südlichter und der Erdströme gewährt, gibt es auch eine Handhabe für die Erklärung der Luftelectricität und der Gewittererscheinungen. Dass die Erde negativ electrisch geladen sein müsste, nahm schon Lamont an zur Erklärung der so wechselnden und unsteten Luftelectricität. Seine Ansicht, dass diese electrische Ladung durch thermoelectrische Differenzen zu erklären sei, ist aber ebenso wenig haltbar, wie die Ansicht, dass Reibungsvorgänge ein electrisches Erdpotential erzeugen könnten. Ein solches kann nur durch kosmische Influenz und Ableitung der frei werdenden gleichen Electricität durch Verbreitung im Raume oder Neutralisirung mit der entgegengesetzt geladenen Materie, die von der Sonne in der Richtung der Ebene des Sonnenäquators ausfliesst, entstehen. Nimmt man aber an, dass dies der Fall sei, dass mithin die Erde mit der Sonne einen electrischen Ansammlungsapparat bildet, dessen trennendes Dielectricum die Atmosphäre der Sonne und der Erde und der mit äusserst verdünnter Materie erfüllte interplanetare Raum ist, so sind alle von Lamont und anderen aus der electrischen Ladung der Erde gezogenen Schlussfolgerungen berechtigt. Zur Erklärung der Gewitterelectricität scheint aber doch die geringfügige und wechselnde atmosphärische Electricität, auf die sie bisher zurückgeführt wird, nicht ausreichend zu sein. Das plötzliche Auftreten so gewaltiger Massen Electricität, wie sie namentlich bei tropischen Gewittern zur Erscheinung kommen, weist die Annahme zurück, dass dieselbe ihren Sitz in der schwachen electrischen Ladung der verhältnissmässig geringen Luftmenge, die den Träger der Gewitterwolken bildet, gehabt habe. Es müssen ergiebigere Quellen sein, denen sie entstammt. Eine solche Quelle von unerschöpflicher Mächtigkeit findet sich in der electrischen Ladung der Erde durch Sonneninfluenz. Wenn man einer grossen

electrisch geladenen Kugel einen leitenden Gegenstand nähert, so unterliegt derselbe der vertheilenden Wirkung der auf der Oberfläche der Kugel befindlichen Electricität. Findet die in dem Theile des Leiters, welcher der Kugel am entferntesten ist, angesammelte gleichartige Electricität eine Ableitung nach benachbarten, noch weiter entfernten Leitern, so wird der erstere Leiter dauernd mit Electricität geladen, deren Polarität der der Kugel entgegengesetzt ist. Ist die Erhebung des Leiters über die Oberfläche aber nur gering im Verhältniss zum Durchmesser der Kugel, so kann auch die Spannungsdifferenz zwischen der Kugelfläche und dem entferntesten Punkte der Erhebung nur gering sein. Aus diesem Grunde kann auch bei einer grossen Dichtigkeit der Electricität auf der Erdoberfläche auf derselben doch keine electrische Abstossung stattfinden, und selbst auı Bergspitzen kann sie noch nicht sehr bemerklich sein. Anders aber gestaltet sich das Verhältniss, wenn eine Kugel durch Influenz einer entfernten electrischen Kugel geladen ist. Die nach der Faraday'schen Molecularvertheilungstheorie von der ladenden zur geladenen und abgeleiteten Kugel gehenden Kraftlinien treffen die letztere überall fast senkrecht und bei grossem Abstande der influenzirend aufeinander wirkenden Kugeln im Verhältniss zu den Durchmessern der Kugeln in nahe gleicher Anzahl auf der der vertheilenden Kugel zugewandten, wie der abgewandten Seite. Nähert man nun einen isolirten, leitenden Schirm, der einen Theil der Oberfläche der influenzirten Kugel bedeckt, der letzteren, so wird er bei geringer Dicke nicht merklich electrisch. Sobald man jedoch den Schirm ableitend berührt, nimmt er die der Kugel entgegengesetzte Electricität an, während die gleiche abgeleitet wird. Entgegengesezt ist das Verhalten, wenn der Schirm mit der Kugel selbst leitend verbunden wird. Dann bildet der Schirm einen Theil der Kugeloberfläche und nimmt die electrische Ladung derselben an, wobei diese unter dem Schirm unelectrisch wird. Als solche Schirme treten nun auf der Erdoberfläche die Gewitterwolken auf. Denkt man sich einen solchen Wolkenschirm in der Bildung über einem Theile der Erdoberfläche begriffen, so wird derselbe unbe-

einflusst durch die Erdelectricität bleiben, solange die leitenden Wassertheilchen sich isolirt und in grösserem Abstande voneinander befinden. Nebel und leichte Wolken werden daher nicht electrisch werden. Sobald aber der Nebel sich so weit verdichtet hat, dass seine leitenden Theile in Berührung miteinander kommen, oder die Entfernung zwischen ihnen so klein wird, dass schon Electricität sehr geringer Spannung den Zwischenraum überspringen kann, so unterliegt die Wolke dem Vertheilungsvorgange. Dieser kann einmal dadurch eingeleitet werden, dass sie durch aufsteigende Wolkenwirbel bis in sehr hohe Regionen hinauf leitende Verbindung mit dort befindlichen Wolken erhält. Dann nimmt diese leitend zusammenhängende Wolke in ihren unteren Theilen die der Erdelectricität entgegengesetzte Electrisirung an, während die obere die ihr gleiche aufnimmt. Es kann eine dichte leitende Wolkenbank aber auch an einer oder mehreren Stellen mit der Erde selbst in leitende Verbindung kommen. Dann bildet sie einen Theil der leitenden Eroberfläche und nimmt die Electricität derselben an.[1]) Der

---

1) Bei einer Reise auf dem mittelländischen Meere hatte ich in der Nähe der spanischen Küste zwischen Carthagena und Almeria im Winter 1865 Gelegenheit, den Verlauf der Erscheinung einer Wasserhose zu beobachten, welcher mir entschieden für diese Auffassung zu sprechen scheint.

Zwischen dem Schiffe und der Küste in der Nähe von Almeria zeigte sich bei lebhaft bewegter, sogenannter todter See ohne wesentliche Luftbewegung eine schwarze, dichte, aber, wie es schien, nicht hohe Wolkenbank, unter welcher das Meer in wildester Bewegung zu sein schien. Es erschien dort als ein weisser, hoch aufschäumender, ziemlich runder Fleck, dessen Durchmesser die Seeleute auf 2 bis 3 Seemeilen schätzten, während seine Umgebung nur glatte Wellenzüge ohne alle Sturzwellen zeigte. Trotz der beträchtlichen Entfernung des Schiffes von der heftig bewegten Stelle, die mehrere Seemeilen betrug, konnte man doch deutlich durch das Fernrohr erkennen, dass die wilde Brandung der Meeresoberfläche sich mehrere Meter über die scharf abgegrenzte Oberfläche des relativ ruhigen Meeresspiegels erhob. Die Wolke senkte sich an einer Stelle trichterförmig nieder und bildete einen dem Rüssel eines Elephanten ähnlichen, gekrümmten Wolkenstreifen, der bis ziemlich nahe zu der schäumenden Meeresfläche hinabreichte und sich unten etwas verästelte. Eine vollständige Berührung mit der schäumigen Fläche war nicht zu erkennen, auch fand auffallender Weise unter dem Wolkenrüssel kein

letztere Vorgang wird am leichtesten eintreten am Abhange steiler Berge, an die die Wolkenschichten sich anlehnen. Gebirge sind daher häufig Gewitterbildner. Bei der Entstehung der die Träger der Gewitterelectricität bildenden Wolken scheint die Electricität keine wesentliche Rolle zu spielen. Die Ursache der Wolkenbildung ist der Regel nach in der auf- und niedergehenden Luftbewegung zu suchen, welcher nicht nur diese und der den Wolken entfallende Regen, sondern auch die Entfesselung der Stürme fast ausschliesslich zuzuschreiben ist. Die hierüber in der Meteorologie vielfach noch herrschenden Anschauungen bedürfen meiner Ansicht nach in einigen Punkten der Berichtigung. Würde das Gleichgewicht des Luftmeeres nicht stets durch die ungleiche Erwärmung und Abkühlung der Luft durch die Strahlung gestört, so müssten Temperatur und Dichtig-

---

stärkeres Schäumen des Meeres, als an den übrigen Stellen statt. Der Rüssel selbst rotirte langsam, wenn ich mich recht erinnere, im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers über dem weissen Fleck, und zwar nahm auch seine Verbindungsstelle mit der Wolke an dieser Bewegung Theil, wenn auch nicht in gleichem Umfange. Leider entzog uns die einbrechende Nacht und die wachsende Entfernung nach etwa halbstündiger Beobachtung, während welcher der Rüssel etwa anderthalb Umdrehungen gemacht hatte, wobei seine Spitze sich constant auf etwa $^1/_3$ des Radius des weissen Fleckes von dessen Rande erhielt, die weitere Betrachtung dieses interessanten Phänomens, welches mit mir mein Bruder William und seine Frau, sowie die zur Besatzung des französischen Kabelschiffes, auf welchem wir uns befanden, gehörigen Marineofficiere mit grösster Spannung verfolgten. Von einer Wirbelbewegung war bei demselben nichts zu bemerken. Es herrschte beinahe Windstille. Es konnte nur eine rein electrische Erscheinung sein, die in einer electrischen Strömung von der Erde zur Wolke bestehen musste. Nimmt man an, dass diese Strömung an einer Stelle so stark geworden war, dass sich hier durch electrische Fortführung der Flüssigkeit eine leitende Wasserstrasse zwischen Meer und Wolke bildete, so erklärt sich auch die Rotation des Rüssels unter dem Einflusse des Erdmagnetismus. Während der Nacht tobte an der spanischen Küste ein Gewitter, dessen Entstehung wir wahrscheinlich in der Trombe beobachtet hatten. Doch schien diese selbst ihren Lauf später von der spanischen nach der afrikanischen Küste gerichtet zu haben, denn gegen Ende der Nacht wurde unser Schiff nahe derselben von einem nur wenige Minuten andauernden, so furchtbaren Unwetter befallen, dass es dadurch in die grösste Gefahr gerieth, und die Seeleute der festen Ansicht waren, die Trombe sei über das Schiff fortgegangen.

keit der Atmosphäre bis zur grössten Höhe im sogenannten indifferenten Gleichgewicht sein, und zwar in der Weise, dass der Temperaturverlust bei zunehmender Höhe der Ausdehnungsarbeit des Gases überall äquivalent wäre. Die höhere Lufttemperatur der niederen Breiten würde sich durch langsam verlaufende Wirbel mit horizontaler Rotationsaxe, wie die Passatwinde sie in grossem Maassstabe darstellen, ausgleichen, und schliesslich würde das ganze Luftmeer in gleichen Höhen gleiche Temperatur haben. Dieses indifferente oder auch adiabatische Gleichgewicht wird nun durch vorzugsweise Erwärmung der Erdoberfläche und der unteren Luftschichten durch die Sonnenstrahlung, durch die Absorption derselben beim Durchgang durch die Atmosphäre und die vorzugsweise Abkühlung der höheren Schichten durch Ausstrahlung fortwährend gestört. Es werden dadurch die unteren Schichten leichter und die oberen schwerer, wie es das adiabatische Gleichgewicht bedingt, und diese Störung muss sich durch auf- und niedergehende Strömungen in der Atmosphäre ausgleichen. Da aufsteigende Luft, welche am Erdboden wärmer geworden ist, wie es der adiabatischen Temperaturcurve entspricht, diesen Wärmeüberschuss beim Emporsteigen beibehält, der Auftrieb aber mit der wachsenden Höhe des aufgehenden Luftstromes zunimmt, weil die am Erdboden nachströmenden Luftschichten immer denselben Temperaturüberschuss haben, so muss der Aufstrom an den Stellen, wo er einmal durch besonders günstige locale Verhältnisse entstanden ist, solange fortdauern, bis der Temperaturunterschied ausgeglichen ist. Die durch den Aufstrom der relativ leichteren Luft und den Niedergang der durch Strahlung abgekühlten, relativ schwereren an anderen Stellen geleistete Arbeit muss sich in lebendige Kraft umsetzen, indem sie die Luft in lebhaftere Bewegung versetzt. Es wird dies wesentlich durch die Volumenvergrösserung der aufsteigenden Luft durch Druckverminderung bewirkt. Da bei dem grossen Durchmesser der Erdkugel der Luftraum mit der Höhe nur unmerklich grösser wird, so muss die Geschwindigkeit der aufsteigenden Luft schon aus diesem Grunde nahe proportional der Druckverminderung zunehmen. In den

höchsten Luftregionen, bis zu denen jeder sich bildende Aufstrom gelangen wird, muss daher die Luftgeschwindigkeit eine sehr bedeutende sein, und mit der gleichen Geschwindigkeit muss hier die umgebende ruhige Luft zur Seite gedrängt werden, um Platz für die angekommene zu schaffen. Diese Verdrängung wird namentlich nach der Richtung hin stattfinden, wo ein niedergehender Luftstrom sich gebildet hat zum Ersatz der auf der Erdoberfläche zur Stelle des Aufstromes nachströmenden überhitzten Luft. Diese niederströmende Luft verdichtet sich nun zwar beim Niedergange wieder der jeweiligen Höhe entsprechend, sie behält aber dabei die in den oberen Regionen erhaltene Geschwindigkeit bei. Es ist ersichtlich, dass das Endresultat eine sehr grosse Luftgeschwindigkeit auf der Erdoberfläche sein kann, wenn die Störung des adiabatischen Gleichgewichtes eine qualitativ und quantitativ beträchtliche war. Diese localen Stürme, deren Richtung durch die Rotation der Erde nach dem Dove'schen Drehungsgesetze modificirt wird, müssen besonders heftig werden, wenn der Aufstrom selbst ein engbegrenzter ist, da dann der Ausgleichungsprocess, d. i. die Umwandlung der in der Gleichgewichtsstörung angesammelten Energie in Luftgeschwindigkeit, auf eine verhältnissmässig geringe Luftmenge beschränkt ist. Doch auch starke, über ganze Continente fortgehende Stürme können durch aufsteigende Luftströme von grosser räumlicher Ausdehnung erzeugt werden. Dass der niedergehende Luftstrom eine Druckvermehrung auf dem Erdboden, der aufgehende eine Verminderung des Luftdruckes bedingt, folgt aus den mechanischen Bewegungsgesetzen. Doch muss auch schon die Bewegung der Luft an sich stets ein Sinken des Barometerstandes verursachen, da die bewegte Luft die ruhende an der Berührungsgrenze mit fortreisst, mithin eine Verdünnung der ruhenden bewirkt. Das Endresultat des Störungsausgleichs wird daher ein Ueberführen immer grösserer Luftmassen in wirbelnde Bewegung und schliesslich eine Rückbildung der lebendigen Kraft durch Reibung in Wärme sein.

Es folgt aus dieser Betrachtung, dass der Wasserdampf

in der Luft nicht die grosse Rolle bei der Luftbewegung spielt, die ihm gewöhnlich beigelegt wird, da sich Luftbewegungs- und Luftdruckserscheinungen auch ohne den Wassergehalt der Luft erklären lassen. Man muss nur den Sitz der Stürme, d. i. hier den Ort der Beschleunigung der Luftmassen, nicht an der Erdoberfläche, sondern wesentlich in den höchsten Luftregionen suchen. Bestände die Atmosphäre nur aus Wasserdampf, so würden die Erscheinungen ganz ähnliche sein. Der Wasserdampf unterliegt dem adiabatischen Ausdehnungsgesetze ebenso, wie die Luft, nur vermindern sich bei ihm Dichtigkeit und Temperatur mit wachsender Höhe weit weniger, als bei den permanenten Gasen der Atmosphäre. Nach Ritter würde eine Dampfatmosphäre ca. dreizehnmal höher sein, als eine Luftatmosphäre. Es findet zwar nach Clausius und Sir William Thomson bei der adiabatischen Ausdehnung des Dampfes eine fortwährende Condensation statt, doch muss dieselbe in den Höhen, in denen erfahrungsmässig die Wolkenbildung eintritt, noch zu gering sein, um die beobachteten Niederschläge hervorzubringen. Der Grund der bei aufgehenden Luftströmen eintretenden Condensation liegt wesentlich darin, dass der Wasserdampf mit der Luft innig gemischt ist und dass derselbe im aufgehenden Strome nicht die ihm zukommende adiabatische Temperatur annimmt, sondern die der weit überwiegenden Luftmasse, mit welcher er gemischt ist. Da die Luft sich nun mit steigender Höhe weit schneller abkühlt, wie der Dampf, so wird dieser unter die ihm angehörige adiabatische Temperatur abgekühlt, und diese Temperaturverminderung verursacht seine Condensation, wenn der Sättigungspunkt des Dampfes überschritten wird.

Gegen diese Auffassung spricht scheinbar der Umstand, dass durch Luftfahrer wiederholt constatirt ist, dass Schichten wärmerer Luft häufig über kälteren gelagert sind, während das adiabatische Ausdehnungsgesetz eine stetige Abnahme des Druckes und der Temperatur verlangt. Es erklärt sich dies aber leicht durch die ungleiche Beschaffenheit der Erdoberfläche, welche bedingt, dass der aufsteigende Luftstrom zu manchen Zeiten und an manchen Orten eine viel höhere

Temperatur und einen weit grösseren Wasserdampfgehalt hat, als an anderen Orten. Ist der Wassergehalt einer solchen heissen aufsteigenden Luftmasse so gross, dass das Wasser zum Theil während des Aufganges ausgeschieden wird und als Regen niederfällt, so wird die in den oberen Schichten der Atmosphäre eingetroffene Luft durch die von ihr aufgenommene latente Wärme des Wasserdampfes noch weiter erwärmt und dadurch ihr Volumen und Auftrieb vergrössert, und das Endresultat muss eine relativ warme, verhältnissmässig wasserarme Luftschicht sein, die dann durch Ausdehnungsströmung über kältere, aber mehr Wasserdampf enthaltende und dadurch leichtere fortgeschoben wird.[1]) Es sind dies leicht erklärliche Abweichungen von der Regel, dass Temperatur und Dichtigkeit der Atmosphäre mit steigender Höhe abnehmen, der Wassergehalt dagegen zunehmen muss. Letzteres muss wenigstens für höhere Breiten die Regel sein, da die in den Calmen continuirlich aufsteigenden warmen Luftmassen mit relativ grossem Wassergehalte zwar zum grossen Theile auf ihrem Wege zu höheren Breiten nach Verlust ihrer grösseren Wärme durch Ausstrahlung als niedergehende Ströme wieder zum Erdboden niedersinken, zum Theil jedoch als oberer Aequatorialstrom auch die hohen Breiten erreichen müssen. In diesem grösseren Wassergehalte der höheren Schichten der Atmosphäre ist der Grund zu suchen, warum auch bei niedergehenden Luftströmen Regenfälle eintreten können. Ist die Temperatur einer sehr wasserhaltigen oberen Strömung durch Strahlung bis unter den Sättigungspunkt des Dampfes abgekühlt, so bilden sich die Cirruswolken, die wahrscheinlich aus Eisnadeln bestehen.[2]) Die dadurch frei werdende latente Dampf-

1) Krönig hat bereits den Nachweis geführt, dass der mit einem aufsteigenden Strome gemischte Wasserdampf durch seine Condensation keine Volumenverminderung, sondern eine Volumenvergrösserung herbeiführt, da die latente Wärme des Dampfes das Volumen der Luft weit mehr vergrössert, als das Volumen des condensirten Dampfes beträgt. Fortschr. d. Phys. **20.** p. 626.

2) Es ist jedoch höchst wahrscheinlich, dass sowohl Wasser wie Dampf in den hohen Luftregionen ihren Aggregatzustand bis weit unter die Temperatur ihres Gefrier-, resp. Condensationspunktes beibehalten.

und Wasserwärme wird diese Luftschichten wieder erwärmen und den Process der Bildung schwererer Schneewolken längere Zeit hinausziehen, ist er aber durch fortdauernden Wärmeverlust durch Ausstrahlung vollendet, so muss das Gewicht des keinen in Betracht kommenden Raum mehr ausfüllenden Eises das adiabatische Gleichgewicht stören, und ein Niedersinken der Wolkenmasse eintreten. Bei der dabei eintretenden Verdichtung und Erwärmung wird der Schnee wieder geschmolzen und die dazu nöthige latente Wärme der Luft entzogen. Das adiabatische Gleichgewicht wird daher progressiv in noch höherem Maasse gestört, und das Endresultat wird ein kalter niedergehender Luftstrom mit Regen sein. Die Dichtigkeit dieser langsam niedersinkenden Regenwolken wird aber nicht gross genug sein, um die Wolke electrisch leitend zu machen, es wird mithin keine Electricitätsbildung durch Vertheilung eintreten. Anders aber wird sich der Verlauf gestalten, wenn durch locale Ueberhitzung der dem Erdboden benachbarten Luftschichten ein localer Aufstrom mit Regenfall entsteht. Dann kann der Aufstrom eine Geschwindigkeit annehmen, die grösser ist, als die Fallgeschwindigkeit der gebildeten Wassertropfen in der widerstehenden Luft; diese werden daher in die höheren Regionen, deren Temperatur weit unter dem Eispunkte liegt, mit in die Höhe gewirbelt und werden zu Hagelkörnern gefrieren. Durch die schnelle Volumenvergrösserung und die

---

Dass das Wasser ohne Gegenwart von die Krystallisation einleitenden festen Körpern und ohne heftige Erschütterungen bis weit unter —20° abgekühlt werden kann, ohne zu gefrieren, steht fest. Dass Dampf in gleicher Weise die Dampfform unter seinem Condensationspunkte noch beibehalten kann, steht experimentell noch nicht fest. Wir kennen nur die Verzögerung des Siedepunktes, die so häufig zu Dampfkesselexplosionen Veranlassung gibt. Es ist jedenfalls nicht unwahrscheinlich, dass dieser Verzögerung des Siedens auch eine Verzögerung der Condensation gegenübersteht. Durch Versuche lässt sich dies nur schwer constatiren, da die Mittel fehlen, eine Dampfmasse ausser Berührung mit festen oder flüssigen Körpern abzukühlen. Es ist ohne diese Annahme nicht gut zu erklären, warum der Himmel nicht immer ganz mit Cirruswolken bedeckt ist — es müsste denn angenommen werden, dass flüssig gewordene Wassertheilchen in der grossen Verdünnung der höheren Luftschichten nicht als Wolken erscheinen.

ihr entsprechende seitliche Ausbreitung des beschleunigten Luftstromes werden die benachbarten relativ feuchten und kalten höheren Luftschichten in Wirbel mit horizontaler Drehaxe versetzt, die sich mit dem um eine senkrechte Axe rotirenden aufsteigenden Wirbel combiniren. Die heftige Wirbelbewegung, in welche das bisher ruhige, überkühlte Luftmeer hierdurch versetzt wird, wird in demselben nun eine plötzliche Wasser- und Eisbildung herbeiführen. Die Wirbel mit horizontaler Drehaxe können dabei einen grossen Durchmesser annehmen und die Eiskörner wiederholt in die Eisregion hinaufschleudern, bis sie zu schwer geworden sind und als Hagelkörner oder nach Durchlaufung tieferer warmer Luftschichten als kalte Regentropfen zu Boden fallen. Durch diese in kurzer Zeit eintretende starke Regenbildung werden die Wassertheile der Wolkenstrasse bis zu den höchsten Luftschichten hin nun so dicht aneinander geführt, dass sie ein Leiter der Electricität wird, mithin auch der electrischen Vertheilung unterworfen ist. Ist sie an irgend einer Stelle in leitender Verbindung mit der Erde, so muss die Erdelectricität in sie einströmen, und sie erhält dann die gleiche Electricität; ist sie es nicht, so wird sie in der Nähe der Erde ihr entgegengesetzt geladen, während die gleiche Electricität durch die leitende Wirbelwolke in die höheren Regionen entweicht. Wo die Leitung der Wolke unvollständig ist, wird sie durch Blitze, welche zwischen den von einander isolirten Wolkenschichten oder zwischen Wolke und Erde überspringen, vorübergehend hergestellt, und schliesslich wird beim Vorübergehen des Wirbelsturmes und der Auflösung der durch ihn gebildeten Wolke die ganze Electricität durch Blitze sich mit der Erdelectricität wieder ausgleichen oder zum Theil zur Luft als Luftelectricität übergehen.

Manche Beobachtungen von Gewitterbildung sind von hohen Bergspitzen oder vom Luftballon aus gemacht, welche fast alle von mehrfachen Wolkenschichten übereinander sprachen, die in Verbindung miteinander standen, oder zwischen denen Blitze übersprangen. Die lehrreichste Beschreibung ist die des Hrn. Wite[1]), der von einem Luftballon

1) Wite, Fortschr. d. Phys. 1852. p. 762.

aus die Entstehung eines starken Gewitters beobachtete. „Er sah zwei Wolkenschichten etwa 2000 Fuss übereinander, von denen die obere Schnee, Regen und Hagel der unteren zusandte. Zwischen beiden bewegten sich geräuschlos gelbliche wellenähnliche Lichtmassen. Electrische Entladungen mit Blitz und Donner ereigneten sich immer in der unteren Schicht, doch war das Gewitter über beiden Schichten weit stärker, als unter denselben. Die obere Schicht war durch Westwind in starker Bewegung.“ Dass der Beobachter nur zwei über einander befindliche Wolken beobachten konnte, ist erklärlich, da sein Ballon sich in der Höhe des Zwischenraumes beider befand. Es ist anzunehmen, dass noch mehrere solcher Wolkenschichten bis zu den höchsten Luftregionen hinauf vorhanden gewesen sind, zwischen denen der beobachtete Niederschlag und der electrische Leitungsvorgang stattfand. Durch den namentlich aus der Mitte der oberen Wolkenschicht niederströmenden starken Regen wurden die Wolkenschichten leitend miteinander verbunden und unterlagen dadurch dem electrischen Leitungs- und Vertheilungsvorgange.

Es könnte der Theorie des electrischen Sonnenpotentials noch der Einwand entgegengestellt werden, dass die electrische Anziehung zwischen der Sonne und den Planeten und die Abstossung, welche letztere auf einander und auf ihre Trabanten ausüben müssten, die Grundlage der astronomischen Rechnungen modificiren würde, da neben der Gravitation dann noch eine weitere Kraft, die electrische, in Rechnung zu ziehen sei.

Dieser Einwand ist vollkommen berechtigt. Da aber die electrische Kraft ebenso, wie die Gravitation, im Verhältniss der Quadrate des Abstandes der Mittelpunkte steht, so würden die Bahnen der Planeten unverändert bleiben, wenn ein Theil der Gravitationsanziehung durch eine electrische ersetzt wird. Nur das berechnete Verhältniss der Massen der Sonne und der Planeten zu der der Erde würde sich ändern. Diese Aenderungen müssten namentlich bei den kleinen Planeten und den Trabanten bemerklich werden, da die electrische Kraft eine Oberflächenfunction ist. Da-

gegen müssen die störenden Einflüsse, welche die Planeten und deren Trabanten gegenseitig auf ihre Bahnen ausüben, sich ändern, wenn die Gravitation durch electrische Abstossung vermindert wird.

Vielleicht ist es der Astronomie vorbehalten, aus den Störungen der Bahnen des Merkurs, der Asteroiden und der Trabanten den Beweis der Existenz oder Nichtexistenz eines electrischen Sonnenpotentials zu führen.

Ich bin nach Lesung dieser Abhandlung von befreundeter Seite darauf aufmerksam gemacht worden, dass ich versäumt habe, auf den merkwürdigen Zusammenhang der Sonnenfleckenperiode mit der der magnetischen Störungen der Erdströme und der Nord- und Südlichter näher einzugehen. In der That bildet dieser Zusammenhang einen gewichtigen Beweis der Existenz des electrischen Sonnenpotentials. Sind die Sonnenflecken, wie ich auseinandergesetzt habe, als zum Sonnenkörper zurückkehrende Strömungen der in der leuchtenden Sonnenatmosphäre verbrannten Sonnenbestandtheile anzusehen, die deswegen in mittleren Sonnenbreiten als Sonnenflecken sichtbar werden, weil dort die Bedingungen für die Wirbelbildung vorhanden sind, so muss die Zahl der Sonnenflecken auch ein Maass der Grösse der Verbrennungsthätigkeit sein. Die zehn- bis elfjährige Periode der Sonnenflecke würde demnach besagen, dass die Verbrennungsthätigkeit der Sonne alle zehn bis elf Jahre eine Steigerung erführe, die darauf allmählich auf ihr früheres Maass zurückginge. Da mit der Steigerung der Verbrennungsthätigkeit auch ein verstärkter Abfluss electrisirter Materie von der Sonne und dadurch indirect eine Vergrösserung des electrischen Sonnenpotentials eintreten müsste, so ist der Zusammmenhang der Sonnenflecke mit der Erscheinung der Nord- und Südlichter, der Erdströme und der magnetischen Störungen gegeben. Der Grund dieser zehn- bis elfjährigen Sonnenfleckenperiode lässt sich nur in Strömungen oder partiellen Revolutionen des gasförmigen Sonnenkörpers selbst suchen. In der That müssen solche Revolutionen mit Nothwendigkeit von Zeit zu Zeit eintreten, da durch Wärme- und

Lichtstrahlung die oberen Schichten des Sonnenkörpers abgekühlt werden. Diese Abkühlung wird durch die niedergehenden Strömungen der Verbrennungsproducte vermittelt, welche bis zu einer beträchtlichen Tiefe in die noch dissociirte Gasmasse der Sonne eindringen und durch Mischung mit dieser den durch Dissociation erlittenen Wärmeverlust zum Theil wieder ersetzen. Die Folge wird sein, dass die äusseren Sonnenschichten unter die ihnen zukommende adiabatische Temperatur abgekühlt werden, dass also aus dem indifferenten ein labiles Gleichgewicht entsteht, welches sich längere Zeit in ähnlicher Weise erhalten kann, wie überhitzte Luft über Erdstrecken, die durch Sonnenstrahlung stark erwärmt sind. Hat diese Störung des adiabatischen Gleichgewichtes aber eine gewisse Grenze überschritten, so muss ein Umschwung in der Sonnenmasse eintreten. Die relativ kälter gewordenen äusseren Sonnenschichten müssen in die Sonnentiefe hinabsinken und die relativ heisseren, und leichteren tieferen Schichten müssen ihre Stelle einnehmen. Erfahrungsmässig findet ein solcher Umschwung alle zehn bis elf Jahre statt. Mit ihm gelangt wieder unabgekühlte heissere Sonnenmasse zur Verbrennung; diese wird mithin verstärkt, was eine Vermehrung der sichtbaren wirbelnden Rückströmungen, der Sonnenflecke, und indirect Schwankungen in der Grösse des electrischen Sonnenpotentials zur Folge hat.

Ich muss schliesslich noch bemerken, dass viele der in meiner Abhandlung enthaltenen Anschauungen bereits anderweitig publicirt sind und von mir nicht als die meinigen beansprucht werden. Ich nenne hier namentlich die Schriften von Ritter über die Constitution gasförmiger Weltkörper und das Buch von Reye über Wirbelstürme. Es war mir aber unmöglich, in dem beschränkten Raume dieser Mittheilung die Autorschaft jedes von mir benutzten Gedankens auf seine Urquelle zurückzuführen.

X. *Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper;*
von A. Ritter in Aachen.

Sechszehnte Abtheilung.

---

§ 64. **Wärmeausstrahlung einer adiabatischen Gaskugel.**

Der adiabatischen Zustandslinie einer idealen Gaskugel entspricht ein Wachsen der Temperatur mit zunehmender Tiefe unter der Oberfläche, und in unmittelbarer Nähe der letzteren kann (nach § 12) die der Tiefenzunahme dz entsprechende Temperaturzunahme dT berechnet werden aus der Gleichung:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{T_0}{\alpha r}, \tag{597}$$

in welcher r den Halbmesser der Gaskugel, T_0 die Mittelpunktstemperatur derselben und α eine von dem Werthe der Verhältnisszahl $k = c_p/c_v$ abhängige Constante bedeutet. Die letztere kann, wie in § 31 (Fig. 7) gezeigt wurde, durch die von der Gravitationscurve begrenzte Fläche F geometrisch dargestellt werden. Für $k = 1{,}41$ nimmt (nach § 12 und § 31) diese Constante den Werth $\alpha = 2{,}4$ an, und allgemein kann dieselbe berechnet werden mittelst der empirischen Annäherungsformel:

$$\alpha = 0{,}5 + \frac{0{,}4}{k - 1{,}2}. \tag{598}$$

Für kleine Werthe der Verhältnisszahl z/r kann also die Temperatur in der Tiefe z unter der Oberfläche berechnet werden aus der Gleichung:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{z}{\alpha r}, \tag{599}$$

und da bei adiabatischer Zustandslinie die Temperaturen sich verhalten wie die $(k-1)$-ten Potenzen der Dichtigkeiten (Gleichung 309), so ergibt sich hieraus für das Verhältniss der zugehörigen Dichtigkeiten der Werth:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \left(\frac{z}{\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{k-1}\right)}. \tag{600}$$

Die Masse der Oberflächenschicht von der Dicke z hat pro Flächeneinheit der Oberfläche die Grösse:

$$\mu = \int_0^z \gamma \, dz, \tag{601}$$

und wenn man nach Substitution des aus der vorhergehenden Gleichung für γ zu entnehmenden Ausdruckes die angedeutete Integration ausführt, so erhält man für die Massenstärke dieser Oberflächenschicht den Werth:

$$\mu = \left(\frac{k-1}{k}\right) \gamma_0 (\alpha r)^{-\left(\frac{1}{k-1}\right)} \cdot z^{\left(\frac{k}{k-1}\right)}. \tag{602}$$

Die obigen Gleichungen gelten nicht nur für den gegebenen, sondern auch für jeden beliebigen anderen adiabatischen Gleichgewichtszustand, in welchen man sich die Gaskugel übergeführt denken kann, und bei gegebenem Werthe der Grösse μ wird man für die Dicke einer Oberflächenschicht von dieser Massenstärke einen um so kleineren Werth erhalten, je grösser die Dichtigkeit der Gaskugel angenommen wird. Wenn der Halbmesser bis auf die Grösse r/n abnähme, so würde die Mittelpunktsdichtigkeit den Werth $n^3 \gamma_0$, und die Mittelpunktstemperatur (nach § 8) den Werth $n T_0$ annehmen. Bei diesem neuen adiabatischen Gleichgewichtszustande würde also für die Oberflächenschicht diejenige Tiefe z_1, bei welcher die Massenstärke derselben wiederum den Werth μ annehmen würde, zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$\mu = \left(\frac{k-1}{k}\right) n^3 \gamma_0 \left(\frac{\alpha r}{n}\right)^{-\left(\frac{1}{k-1}\right)} z_1^{\left(\frac{k}{k-1}\right)}. \tag{603}$$

Durch Gleichsetzung der obigen beiden für die Grösse μ gefundenen Ausdrücke erhält man für das Verhältniss der beiden Grössen z_1 und z den Werth:

$$\frac{z_1}{z} = n^{\left(\frac{2-3k}{k}\right)}. \tag{604}$$

Die dem Werthe z_1 entsprechende Temperatur T_1 kann man nach Gleichung (599) berechnen, indem man dieselbe auf den neuen Gleichgewichtszustand anwendet; man erhält dann die Gleichung:

$$\frac{T_1}{n T_0} = \frac{z_1}{a\left(\frac{r}{n}\right)}. \tag{605}$$

Das Verhältniss der beiden Temperaturen T_1 und T hat also die Grösse:

$$\frac{T_1}{T} = n^2 \cdot \frac{z_1}{z}, \tag{606}$$

und nach Substitution des oben für das Tiefenverhältniss z_1/z gefundenen Ausdruckes erhält man für das Verhältniss dieser beiden Temperaturen den Werth:

$$\frac{T_1}{T} = n^{\left(\frac{2-k}{k}\right)}. \tag{607}$$

Da das Gesetz, nach welchem die Temperatur und die Dichtigkeit mit wachsender Tiefe unter der Oberfläche zunehmen, während des Ueberganges in den neuen Gleichgewichtszustand unverändert blieb, so gibt der hier für das Verhältniss der beiden Maximaltemperaturen T_1 und T gefundene Werth zugleich an, in welchem Verhältniss die mittlere Temperatur der Oberflächenschicht von der Massenstärke μ während des Ueberganges der Gaskugel in den dichteren heisseren Zustand zugenommen hat.

Unter Voraussetzung einer hinreichend grossen Dichtigkeit der Gaskugel darf man annehmen, dass die Dicke derjenigen Oberflächenschicht, von deren Massentheilen Wärmestrahlen direct in den leeren Raum ausgesendet werden, einen verhältnissmässig kleinen Bruchtheil vom ganzen Halbmesser der Gaskugel bildet. Wenn man ferner, unter Vorbehalt einer später auszuführenden Correction, die provisorische Annahme macht, dass die Massenstärke dieser Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht unabhängig ist von der mittleren Temperatur derselben, und dass diese Massenstärke für alle Zustände der Gaskugel eine und dieselbe Grösse μ besitzt, so kann der obige Zahlenwerth zugleich gedeutet werden als das Verhältniss, in welchem die mittlere Temperatur der Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht während der Verdichtung zugenommen hat, oder, kürzer ausgedrückt, als das Verhältniss, in welchem die Oberflächentemperatur der Gaskugel zugenommen hat.

Nach **Stefan's** Untersuchungen verhalten sich die Intensitäten der Wärmeausstrahlungen annäherungsweise wie die vierten Potenzen der (absoluten) Oberflächentemperaturen.[1]) Hiernach ergibt sich für das Verhältniss der pro Flächeneinheit der Oberfläche ausgestrahlten Wärmequantitäten der Werth:

$$(608) \qquad \frac{q_1}{q} = \left(\frac{T_1}{T}\right)^4 = n^{\left(\frac{8-4k}{k}\right)},$$

und da die Oberflächen sich verhalten wie die Quadrate der Halbmesser, so hat das Verhältniss der ganzen pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärmequantitäten die Grösse:

$$(609) \qquad \frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{q_1}{q} = n^{\left(\frac{8-6k}{k}\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $Q_1 = Q$ wird, wenn $k = \frac{4}{3}$ ist, und dass immer Q_1 kleiner als Q ist, wenn k grösser als $\frac{4}{3}$ ist. Da der adiabatische Gleichgewichtszustand einer Gaskugel, wie in § 33 gezeigt wurde, auf die Dauer überhaupt nur dann bestehen kann, wenn k grösser als $\frac{4}{3}$ ist, so kommt hier nur dieser letztere Fall in Betracht. Für eine ideale Wasserstoffkugel würde $k = 1{,}41$ zu setzen sein, und für diesen Fall ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$n =$	1	2	10	100
$T_1/T =$	1	1,336	2,621	6,868
$q_1/q =$	1	3,2	47	2226
$Q_1/Q =$	1	0,8	0,47	0,22

Wenn man ein anderes mal $k = \frac{5}{3}$ setzt, so erhält man die folgenden Werthe:

$n =$	1	2	10	100
$T_1/T =$	1	1,15	1,585	2,512
$q_1/q =$	1	1,74	6,3	39,8
$Q_1/Q =$	1	0,436	0,063	0,00398

Diese Zahlenwerthe entsprechen der ungenauen Voraussetzung: dass die Massenstärke der Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht während des Ueberganges der Gaskugel in den heisseren dichteren Zustand unverändert blieb. Da

---

1) Stefan, Wien. Ber. 20. März 1879.

das Absorptionsvermögen einer Gasschicht höchst wahrscheinlich mit wachsender Temperatur zunimmt, so hätten in Berücksichtigung dieses Umstandes bei dem heisseren dichteren Zustande der Gaskugel für die Massenstärke — und demgemäss auch für die mittlere Temperatur — der ausstrahlenden Oberflächenschicht kleinere Werthe als die oben angenommenen in Rechnung gebracht werden müssen. In Wirklichkeit wird daher die bei allmählich fortschreitender Verdichtung der Gaskugel stattfindende Abnahme der pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärmequantität noch rascher erfolgen, als oben gefunden wurde.

Da man annehmen darf, dass mit der Quantität der ausgestrahlten Wärme zugleich die Quantität des ausgesendeten Lichtes abnehmen wird, so folgt hieraus, dass mit dem Wachsen der inneren Wärme und der Oberflächentemperatur eines Fixsterns eine Abnahme seiner Lichtstärke verbunden sein kann. Die Lichtabnahme setzt also keineswegs eine bereits eingetretene Temperaturabnahme als nothwendige Vorbedingung voraus. Eine Abnahme der Lichtstärke eines Fixsterns kann vielmehr schon stattfinden, während die innere Wärme und die Oberflächentemperatur desselben noch im Zunehmen begriffen sind.

Die Sonne befindet sich gegenwärtig in einem Zustande, bei welchem die Frage: ob die mittlere Temperatur derselben noch im Zunehmen oder bereits im Abnehmen begriffen ist, einstweilen noch der Beantwortung sich entzieht. Jedenfalls aber hat die Sonne bereits einen Dichtigkeitszustand erreicht, bei welchem das Erfülltsein der oben gemachten Voraussetzung einer verhältnissmässig geringen Tiefe der ausstrahlenden Oberflächenschicht kaum angezweifelt werden kann. Aus den Resultaten der obigen Untersuchung darf daher mit grosser Wahrscheinlichkeit gefolgert werden, dass unter allen Umständen — mag die Temperatur der Sonne gegenwärtig noch im Zunehmen oder bereits im Abnehmen begriffen sein — die gesammte jährlich von der Sonne ausgestrahlte Wärmequantität gegenwärtig schon im Abnehmen begriffen ist, dass also die Sonne als ein im allmählichen Verschwinden begriffener Fixstern zu be-

trachten ist, oder als ein Fixstern, welcher bereits in das das Stadium der abnehmenden Lichtstärke eingetreten ist.

Die Untersuchungen des § 11 mussten zu dem entgegengesetzten Resultate führen, weil dort die Voraussetzung gemacht wurde, dass bei dem Wachsen der inneren Wärme eines gasförmigen Weltkörpers die Ausstrahlungstemperatur desselben — oder die mittlere Temperatur derjenigen Massentheile, von denen Wärmestrahlen direct in den leeren Raum ausgesendet werden — in demselben Verhältniss zunimmt wie die mittlere Temperatur des ganzen Weltkörpers. Die vorstehende Untersuchung zeigt, dass jene Annahme und die aus derselben gezogenen Schlussfolgerungen, soweit dieselben die Sonne betreffen, bei dem gegenwärtigen Dichtigkeitszustande derselben als unzulässig erachtet werden müssen.

§ 65. Hypothesen über das Contractionsgesetz der Sonne.

Das Potential einer im adiabatischen Gleichgewichtszustande befindlichen idealen Gaskugel von der Masse S kann (nach § 32) berechnet werden aus der Gleichung:

$$\mathfrak{A} = \left(\frac{3k-3}{5k-6}\right) N r S, \tag{610}$$

in welcher N die Gravitationskraft pro Masseneinheit an der Oberfläche der Gaskugel bedeutet; und das mechanische Aequivalent ihrer inneren Wärme hat (nach § 20) die Grösse:

$$U = \frac{\mathfrak{A}}{3k-3}. \tag{611}$$

Das Potential $\mathfrak{A}$ kann aufgefasst werden als die mechanische Arbeit, welche die Gravitationskräfte verrichten würden, wenn der Halbmesser von der Grösse ∞ bis auf die Grösse r abnähme. Diese mechanische Arbeit kann man sich in die beiden Theile U und $\mathfrak{A} - U$ zerlegt denken, von denen der erstere zur Erzeugung der inneren Wärme, und der andere zur Erzeugung derjenigen Wärmequantität verwendet wurde, welche während der Contraction nach aussen abgegeben wurde. Die letztere Wärmequantität hat also die Grösse:

$$W = A(\mathfrak{A} - U) = A\left(\frac{3k-4}{3k-3}\right)\mathfrak{A}, \quad \text{oder:} \tag{612}$$

$$W = \left(\frac{3k-4}{5k-6}\right) A N r S. \tag{613}$$

Wenn $N = N_0$ der Werth ist, welcher dem Werthe $r = r_0$ entspricht, so ist nach dem Gravitationsgesetze:

$$Nr^2 = N_0 r_0^2 \tag{614}$$

zu setzen, und nach Substitution des hieraus für N zu entnehmenden Werthes nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$W = \left(\frac{3k-4}{5k-6}\right) \frac{A N_0 r_0^2 S}{r}. \tag{615}$$

Indem man diese Gleichung nach der Zeit t differenziirt, erhält man für die von der ganzen Gaskugel in jeder Zeiteinheit nach aussen abgegebene Wärmequantität den Werth:

$$\frac{dW}{dt} = -\left(\frac{3k-4}{5k-6}\right) \frac{A N_0 r_0^2 S}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}. \tag{616}$$

Die durchschnittlich von jedem einzelnen Massenkilogramm pro Zeiteinheit abgegebene Wärmequantität hat also die Grösse:

$$w = -\left(\frac{3k-4}{5k-6}\right) \frac{A N_0 r_0^2}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt}. \tag{617}$$

Wenn mit σ die Grösse bezeichnet wird, um welche der Halbmesser pro Zeiteinheit, z. B. während eines Jahres, abnimmt, so ist:

$$\sigma = -\frac{dr}{dt} \tag{618}$$

zu setzen, und nach Substitution dieses Ausdruckes erhält man aus der obigen Gleichung die Werthe:

$$\sigma = \left(\frac{5k-6}{3k-4}\right) \frac{w r^2}{A N_0 r_0^2}, \tag{619}$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{5k-6}{3k-4}\right) \frac{w_0}{A N_0}. \tag{620}$$

Indem man diese Gleichungen auf die **Sonne** anwendet (wobei die mit dem Index Null bezeichneten Werthe als für den gegenwärtigen Zustand derselben geltend betrachtet werden sollen) und demgemäss $N_0 = 27,4$, $w_0 = \frac{4}{3}$ setzt, findet man zunächst für die Grössen σ_0 und k die folgenden zusammengehörigen Werthe:

$k = 1,41$ $\quad\quad \frac{5}{3}$

$\sigma_0 = 94,075$ m $\quad\quad 48,083$ m.

Für das Verhältniss der beiden Grössen σ und σ_0 erhält man aus den obigen Gleichungen den Werth:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{w r^2}{w_0 r_0^2}. \tag{621}$$

Da die pro Masseneinheit abgegebenen Wärmequantitäten sich verhalten wie die **ganzen** ausgestrahlten Wärmequantitäten, so ist (nach Gleichung (609)) hierin:

$$(622) \qquad \frac{w}{w_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\left(\frac{6k-8}{k}\right)}$$

zu setzen, und wenn man zugleich für die Grösse σ wieder ihren, in Gleichung (618) angegebenen Werth einsetzt, so erhält man eine Gleichung, welcher man die folgende Form geben kann:

$$(623) \qquad dt = -\frac{dr}{\sigma_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\left(\frac{8-8k}{k}\right)}.$$

Die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse r bis auf die Grösse r_0 abnahm, ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$(624) \qquad t = -\frac{r_0}{\sigma_0}^{\left(\frac{8k-8}{k}\right)} \int_r^{r_0} r^{\left(\frac{8-8k}{k}\right)} dr, \text{ oder:}$$

$$(625) \qquad t = \frac{k r_0}{(7k-8)\sigma_0}\left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\left(\frac{7k-8}{k}\right)}\right\}.$$

Wenn man hierin zunächst $k = 1{,}41$ und demgemäss $\sigma_0 = 94{,}075$ m setzt, so nimmt diese Gleichung nach Substitution des Werthes $r_0 = 688\,000\,000$ m die folgende Form an:

$$(626) \qquad t = 5\,514\,312\left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1{,}326}\right\}.$$

Für die beiden Grössen r_0/r und t ergeben sich hieraus die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$r_0/r =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{215}$
$t =$	0	3 315 060	5 254 154	5 502 036	5 509 864

Da der Erdbahnhalbmesser etwa 215-mal so gross ist als der gegenwärtige Sonnenhalbmesser, so würde demnach aus den hier gemachten Voraussetzungen sich ergeben, dass vor etwa 5,5 Millionen Jahren der Sonnenhalbmesser so gross wie der Erdbahnhalbmesser war.

Der obigen Untersuchung wurde die Voraussetzung zu Grunde gelegt: dass die Tiefe der Wärme ausstrahlenden Oberflächenschicht stets klein war im Verhältniss zum Halbmesser der Gaskugel. Es bleibt daher noch übrig, zu unter-

suchen, ob auch bei 215-facher Vergrösserung des Sonnenhalbmessers jene Bedingung wenigstens annäherungsweise noch als erfüllt betrachtet werden dürfte.

Wenn man $\mu = 1\,000\,000$ kg setzt — entsprechend der Hypothese, dass eine Gasschicht, deren Massenstärke mehr als eine Million Kilogramm pro Quadratmeter beträgt, als nahezu vollkommen undurchlässig für Wärmestrahlen betrachtet werden darf — so erhält man aus Gleichung (602), indem man zugleich die dem oben angenommenen Werthe $k = 1{,}41$ entsprechenden Werthe $\alpha = 2{,}4$ und $\gamma = 31416$ kg substituirt, für die Grössen r_0/r und z/r die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$r_0/r =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{215}$
$z/r =$	0,019 625	0,029 365	0,074 88	0,285 74	0,445 88

Diese Tabelle zeigt, dass allerdings für die grösseren Werthe von r, insbesondere für den Werth $r = 215\,r_0$, die obige Bedingung nicht mehr als genügend erfüllt anzusehen ist, und dass aus diesem Grunde die oben für t gefundenen Werthe theilweise noch einer Correction bedürfen. Diese Correction wird zu Werthen von t führen müssen, welche grösser sind als die oben gefundenen. Denn die letzteren entsprechen der Annahme: dass der Radius der ausstrahlenden Kugelfläche, oder der mittlere Radius der ausstrahlenden Oberflächenschicht stets nahezu so gross war wie der ganze Halbmesser r, während in Wirklichkeit zu der Zeit, als $r = 215\,r_0$ war, jener Radius eine beträchtlich geringere Grösse hatte.

Die Gleichung (626) und die nach derselben berechnete Tabelle zeigen jedoch, dass die mit dem Wachsen von r verbundene Zunahme des Werthes von t um so langsamer erfolgt, je grösser der Halbmesser r ist, und da die oben erwähnte Correction vorwiegend die den grösseren Werthen von r entsprechenden Werthe von t betrifft, so werden — wenn auch die Differenzen der Werthe von t verhältnissmässig grosse Aenderungen durch jene Correction erleiden mögen — doch die absoluten Werthe dieser Grösse verhältnissmässig nur wenig dadurch beeinflusst werden, weil

die Correction immer nur verhältnissmässig kleine Bruchtheile des ganzen absoluten Werthes betreffen wird.

Nach der obigen Tabelle würde aus der Annahme: dass der Radius der ausstrahlenden Kugelfläche stets so gross war wie der Halbmesser der ganzen Kugelfläche, z. B. sich ergeben, dass in 255 710 Jahren der Sonnenhalbmesser von der Grösse $215\,r_0$ bis auf die Grösse $10\,r_0$ abnahm. Wenn man statt dessen die Annahme machen wollte, dass die ausstrahlende Kugelfläche während dieses Zeitraumes stets nur halb so gross war als die ganze Oberfläche — eine Annahme, aus welcher jedenfalls ein zu grosser Werth für diesen Zeitraum sich ergeben würde, nämlich 511 420 Jahre, oder das Doppelte des obigen Werthes — so würde man für den ganzen Zeitraum, in welchem der Sonnenhalbmesser von der Grösse $215\,r_0$ bis auf die gegenwärtige Grösse abnahm, den Werth erhalten:

$t = 5\,765\,578$ Jahre (statt $t = 5\,509\,864$ Jahre).

Also selbst in diesem Falle würde man einen Werth erhalten, welcher nur um etwa 4,6 Proc. grösser ist als der ursprünglich gefundene. Man überzeugt sich auf diese Weise leicht, dass trotz ungenügenden Erfülltseins der oben gemachten Voraussetzung die ursprünglich gefundenen Werthe von t ihrer absoluten Grösse nach immer noch als hinreichend genaue Annäherungswerthe betrachtet werden dürfen.

Wenn man statt des Werthes $k = 1{,}41$ den Werth $k = \frac{5}{3}$ annähme (welchem die Werthe $\alpha = 1{,}35$, $\sigma_0 = 48{,}083$ m, $\gamma_0 = 8568$ k entsprechen), so würde man nach Gleichung (625) den Werth:

$$t = 6\,504\,000\left\{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2,2}\right\} \qquad (627)$$

erhalten, und wenn man unter Zugrundelegung der obigen Zahlenwerthe die Rechnung wiederholte, so würde man zu den in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthen gelangen:

$r_0/r =$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{215}$
$t =$	0	5 088 730	6 462 955	6 503 741	6 503 952
$z/r =$	0,003 38	0,005 877	0,021 339	0,134 637	0,248 384

Die Zahlenwerthe der dritten Horizontalreihe zeigen, dass auch in diesem Falle die nach Gleichung (627) direct

berechneten Werthe von t ohne Bedenken als hinreichend genaue Annäherungswerthe betrachtet werden dürfen. Da nach der mechanischen Wärmetheorie der Werth $k = \frac{5}{3}$ der grösste ist, welchen das Verhältniss c_p/c_v annehmen kann, so würde aus der obigen Tabelle sich ergeben, dass die Zeit, während welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse $215\,r_0$ bis auf die gegenwärtige Grösse abnahm, höchstens etwa 6,5 Millionen Jahre betrug.

Zu noch kleineren Werthen würde man gelangen, wenn man Rücksicht darauf nehmen wollte, dass nach übereinstimmenden Angaben neuerer Beobachter die gegenwärtig von der Sonne jährlich ausgestrahlte Wärmequantität mindestens um etwa 50 Proc. grösser ist als die von Pouillet angegebene (dem oben angenommenen Werthe $w_0 = \frac{4}{3}$ entsprechende) Wärmequantität.[1]) Wenn man demgemäss $w_0 = 2$ setzt, so erhält man — je nachdem $k = 1{,}41$ oder $k = \frac{5}{3}$ angenommen wird — für jenen Zeitraum die folgenden Werthe:

$k =$	1,41	$\frac{5}{3}$
$t =$	3 673 241	4 335 968

Die obigen Zahlenwerthe wurden aus der Voraussetzung abgeleitet, dass die Sonne während der ganzen Zeit t stets die Form einer Kugel hatte, und dass die ganze Masse derselben stets in rein gasförmigem Aggregatzustande sich befand. Diese Voraussetzung darf für den letzteren Theil dieses Zeitraumes, z. B. für die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse $2\,r_0$ bis auf die Grösse r_0 abnahm, vielleicht annäherungsweise als erfüllt betrachtet werden. Jedoch ist anzunehmen, dass in früheren Zeiten, insbesondere zu der Zeit, als die Sonnenmasse bis zur Erdbahn sich erstreckte, beträchtliche Abweichungen von dem hier vorausgesetzten Zustande stattfanden.

Um einen genaueren Werth für t zu erhalten, würde man einerseits zu berücksichtigen haben, dass die Rotationsbewegung der Sonne in früheren Zeiten eine beträchtliche Abweichung von der Kugelgestalt bedingen musste; andererseits, dass zu jener Zeit die Massenstärke und die mittlere

1) Langley, The Mount Whitney Expedition. Nature, 3. Aug. 1882. Wied. Ann. **19.** p. 384. 1883.

Temperatur der wärmeausstrahlenden Oberflächenschicht durch die in derselben stattfindenden Condensationsprocesse möglicherweise erheblich modifizirt werden konnten.

Wenn zwar anzunehmen ist, dass die wegen dieser Abweichungen erforderliche Correction — ebenso wie die oben in Bezug auf die Werthe von z ausgeführte Correction — wahrscheinlich nur auf einen verhältnissmässig kleinen Theil des ganzen Zeitraumes sich erstrecken würde — insofern z. B. die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse $215\,r_0$ bis auf die Grösse $2\,r_0$ abnahm, nach der letzteren Tabelle nur etwa 22 Proc. des ganzen Werthes von t betragen würde —, so erscheint doch die Möglichkeit keineswegs von vornherein ausgeschlossen, dass durch Ausführung jener Correction auch der ganze Werth von t eine verhältnissmässig grosse Aenderung erleiden könnte.

Aus diesen Gründen kann für den oben gefundenen Maximalwerth: $t = 4\,336\,000$ Jahre
die Bedeutung eines oberen Grenzwerthes für das Alter der Erde allerdings nicht in Anspruch genommen werden — um so weniger als auch die sonstigen gemachten Voraussetzungen theilweise noch als ungenügend begründete Hypothesen bezeichnet werden müssen. Indessen scheint doch aus den Resultaten der vorstehenden Untersuchung gefolgert werden zu dürfen, dass das wirkliche Alter der Erde bei weitem nicht so gross sein kann, wie von einigen Geologen angenommen wird, welche dasselbe auf Hunderte von Millionen Jahren schätzen.

§ 66. Hypothesen über die Constitution der weissen Fixsterne.

Nach Substitution des aus Gleichung (602) für die Grösse z zu entnehmenden Werthes erhält man aus Gleichung (599) für die Maximaltemperatur der ausstrahlenden Oberflächenschicht, oder für die Temperatur an der inneren Grenzfläche derselben den Werth:

$$(628) \qquad T = T_0 \left\{ \frac{\mu k}{\gamma_0 (k-1) a r} \right\}^{\frac{k-1}{k}}.$$

Indem man ein anderes Mal dieselbe Gleichung auf eine andere Gaskugel von derselben Beschaffenheit anwendet —

entsprechend der nur annäherungsweise richtigen Voraussetzung, dass die Massenstärke der wärmeausstrahlenden Oberflächenschicht unabhängig ist von der Temperatur derselben —, findet man für das Verhältniss jener beiden Grenztemperaturen den Werth:

$$(629) \qquad \frac{T}{T'} = \frac{T_0}{T_0'}\left(\frac{\gamma_0' r'}{\gamma_0 r}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Wenn mit S und S', resp. die Massen der beiden Gaskugeln bezeichnet werden, so hat das Verhältniss ihrer beiden Mittelpunktstemperaturen (nach § 12 und § 31) die Grösse:

$$(630) \qquad \frac{T_0}{T_0'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{r'}{r},$$

und da das Verhältniss der Grenztemperaturen der ausstrahlenden Oberflächenschichten übereinstimmt mit dem Verhältniss ihrer mittleren Temperaturen, so erhält man für das letztere Verhältniss, welches in abgekürzter Redeform auch das Verhältniss der Oberflächentemperaturen genannt werden kann, den Werth:

$$(631) \qquad \frac{\tau}{\tau'} = \frac{S}{S'} \cdot \frac{r'}{r}\left(\frac{\gamma_0' r'}{\gamma_0 r}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Wenn ferner mit δ und δ' die mittleren Dichtigkeiten der beiden Gaskugeln bezeichnet werden, so kann:

$$(632) \qquad \frac{\gamma_0}{\gamma_0'} = \frac{\delta}{\delta'} \qquad \text{und:} \qquad (633) \qquad \frac{S}{S'} = \left(\frac{r}{r'}\right)^3 \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)$$

gesetzt werden. Mit Benutzung dieser Gleichungen kann man dem oben für das Verhältniss der Oberflächentemperaturen gefundenen Ausdrucke die folgende Form geben:

$$(634) \qquad \frac{\tau}{\tau'} = \left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{k+1}{3k}} \cdot \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)^{\frac{2-k}{3k}}.$$

Unter Voraussetzung gleicher physikalischer und chemischer Eigenschaften der Stoffe, aus welchen die Sonne und die Fixsterne zusammengesetzt sind, würde man diese Gleichung zur Beantwortung der Frage benutzen können: unter welchen Umständen die Oberflächentemperatur eines Fixsterns grösser sein kann als die gegenwärtige Oberflächentemperatur der Sonne, wobei der Ausdruck „Oberflächentemperatur" stets in dem oben erklärten Sinne aufzufassen ist.

Für die beiden Exponenten der obigen Gleichung ergeben sich die folgenden Zahlenwerthe:

$k =$	$\frac{4}{3}$	1,41	$\frac{5}{3}$
$(k+1)/3k =$	$\frac{7}{12}$	0,57	$\frac{8}{15}$
$(2-k)/3k =$	$\frac{1}{6}$	0,14	$\frac{1}{15}$

Diese Tabelle zeigt, dass der Exponent des Massenverhältnisses nahezu unabhängig ist von dem Werthe des Quotienten k, und dass derselbe stets nur wenig grösser als 0,5 ist. Da die oben gemachte Voraussetzung der Unabhängigkeit der Absorption von der Temperatur ohnehin zu grosse Werthe für diesen Exponenten ergeben musste, so darf man annäherungsweise diesen Exponenten gleich 0,5 setzen, woraus der folgende Satz sich ergibt:

„Die Oberflächentemperaturen zweier Fixsterne von gleichen Dichtigkeiten verhalten sich annähernd wie die Quadratwurzeln aus ihren Massen."

Wenn man $S = S'$ setzt, so erhält man für das Verhältniss der Oberflächentemperaturen den Werth:

(635) $$\frac{\tau}{\tau'} = \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)^{\frac{2-k}{3k}}.$$

Die in obiger Tabelle für den Exponenten des Dichtigkeitsverhältnisses angegebenen Werthe zeigen, dass in den hier hauptsächlich in Betracht kommenden Fällen der grösseren Werthe von k die Oberflächentemperatur nahezu als unabhängig von der Dichtigkeit betrachtet werden kann, insofern eine erhebliche Zunahme der Oberflächentemperatur erst bei sehr grosser Dichtigkeitszunahme eintreten würde.

So z. B. würden dem Werthe $\tau/\tau' = 2$ die folgenden Werthe des Verhältnisses der Dichtigkeitszunahme entsprechen:

$k =$	$\frac{4}{3}$	1,41	$\frac{5}{3}$
$\delta/\delta' =$	64	144	32768

Für die gegenwärtige Mittelpunktsdichtigkeit der Sonne würde man nach § 31 die folgenden Werthe erhalten:

$k =$	$\frac{4}{3}$	1,41	$\frac{5}{3}$
$\delta_0' =$	81400	31416	8568

Die Vergleichung dieser beiden Tabellen zeigt, dass die Annahme einer verhältnissmässig geringen Steigerungsfähigkeit

der Oberflächentemperatur der Sonne schon die Voraussetzung einer die Grenzen der Wahrscheinlichkeit weit überschreitenden Steigerungsfähigkeit ihrer Mittelpunktsdichtigkeit bedingen würde — welcher Werth auch immer für das Verhältniss der beiden specifischen Wärme angenommen werden möge. Dass die Oberflächentemperatur der Sonne in Zukunft noch erheblich wachsen werde, ist hiernach als durchaus unwahrscheinlich zu betrachten. Mit grösserer Wahrscheinlichkeit darf vielleicht angenommen werden, dass dieselbe gegenwärtig bereits in langsamem Abnehmen begriffen ist.

Die oben für die gegenwärtige Mittelpunktsdichtigkeit der Sonne angegebenen Werthe wurden aus der Voraussetzung einer unbeschränkten Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes abgeleitet, und jene Werthe können im Gegensatze zur „wirklichen" Mittelpunktsdichtigkeit die „theoretischen" Werthe derselben genannt werden. Die wirkliche Mittelpunktsdichtigkeit ist höchst wahrscheinlich kleiner als die theoretische, insofern man annehmen darf, dass die Sonne diejenige Entwickelungsphase, bei welcher infolge des allmählichen Wachsens der Dichtigkeit die annähernde Gültigkeit des Mariotte'schen Gesetzes aufhörte, schon in längst vergangener Zeit überschritten hatte.

Wenn aber die wirkliche Mittelpunktsdichtigkeit kleiner ist als die theoretische, so muss die wirkliche Dichtigkeit der Oberflächenschicht grösser sein als die theoretische, und infolge dessen muss die wirkliche Oberflächentemperatur kleiner sein als die theoretische, weil die Tiefe, bis zu welcher die directe Wärmeausstrahlung in den leeren Raum sich erstreckt, um so kleiner sein wird, je grösser die Dichtigkeit der Oberflächenschicht ist.

Da die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze mit wachsender Dichtigkeit zunehmen, so musste in früherer Zeit, als wegen geringerer Dichtigkeit jene Abweichungen gleichfalls geringer waren, die Differenz zwischen der wirklichen und der theoretischen Oberflächentemperatur kleiner gewesen sein als jetzt, und hiernach wäre die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die wirkliche Oberflächentemperatur in früheren Zeiten grösser war als jetzt. Jedenfalls aber

ist die etwaige Differenz zwischen der gegenwärtigen Oberflächentemperatur und jenem vielleicht in früherer Zeit erreichten Maximalwerthe derselben in enge Grenzen eingeschlossen. Denn zu keiner Zeit konnte die wirkliche Oberflächentemperatur grösser gewesen sein als die theoretische. Für die letztere aber erhält man nach der Tabelle des § 64 um so kleinere Werthe, je weiter man die Zustandsänderung der Sonne nach rückwärts verfolgt. Als Resultat dieser Untersuchung ergibt sich hiernach der folgende Satz:

„Die Oberflächentemperatur der Sonne war niemals erheblich grösser, und kann auch in Zukunft niemals erheblich grösser werden, als dieselbe gegenwärtig ist."

Aus den oben gefundenen beiden Sätzen folgt, dass die Oberflächentemperatur eines Fixsterns nur dann erheblich grösser sein kann als die gegenwärtige Oberflächentemperatur der Sonne, wenn die Masse des Fixsterns grösser ist als die Masse der Sonne. Bei geringer Temperaturdifferenz würde die höhere Oberflächentemperatur eines Fixsterns allerdings auch erklärt werden können durch die Annahme, dass die Sonne den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur gegenwärtig bereits überschritten hat, und dass der betreffende Fixstern den gegenwärtigen Dichtigkeitszustand der Sonne noch nicht erreicht hat. Jedenfalls aber darf man behaupten, dass eine solche Temperaturdifferenz auf eine viel ungezwungenere Weise sich erklären lässt durch Annahme einer grösseren Masse des Fixsterns, und dass diese letztere Annahme für die Erklärung hoher Oberflächentemperaturen einen bei weitem grösseren Spielraum bietet als die Annahme einer geringeren Dichtigkeit des Fixsterns, insofern nach dem ersten der obigen beiden Sätze z. B. der vierfachen Masse schon die doppelte Oberflächentemperatur entsprechen würde.

Da das Wachsen der Oberflächentemperatur eines weissglühenden Körpers ein zunehmendes Vorherrschen der blauen und violetten Strahlen im Spectrum des von demselben ausgesendeten Lichtes bedingt, so darf man annehmen, dass diejenigen Fixsterne, deren Licht im Gegensatze zu dem gelb-

lichtweissen Lichte der Sonne infolge vorherrschender Intensität der stärker brechbaren Strahlen weiss oder bläulichweiss erscheint (Sirius, Wega) eine höhere Oberflächentemperatur besitzen als die Sonne.[1]) Aus den hier aufgestellten Hypothesen würde demnach der folgende Satz sich ergeben:

„Die Massen der weissen Fixsterne sind grösser als die Masse der Sonne."

§ 67. Hypothesen über die Constitution der rothen Fixsterne.

Eine im adiabatischen Gleichgewichtszustande befindliche Gaskugel, deren Masse so gross ist wie die Masse der Sonne, und deren Halbmesser das Hunderttausendfache des Sonnenhalbmessers beträgt, würde eine so geringe mittlere Dichtigkeit besitzen, dass selbst die vom Mittelpunkte ausgesendeten Strahlen nur eine verschwindend geringe Absorption erleiden würden, insofern die Gesammtstärke der Massenschicht, welche ein solcher Strahl zu durchdringen hätte, nur wenige hundert Kilogramm pro Quadratmeter betragen würde.

Die pro Zeiteinheit von der Gaskugel ausgestrahlte Wärmequantität wird bei diesem Dichtigkeitszustande nur von der Temperatur abhängen können, und mit wachsender Temperatur wird dieselbe zunehmen müssen. Da bei der durch Wärmeabgabe bedingten Contraction die innere Wärme der Gaskugel dem Halbmesser umgekehrt proportional zunimmt, so wird während der Contraction die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmequantität jedenfalls zunehmen müssen, solange noch die mittlere Dichtigkeit so klein ist, dass die obige Bedingung annäherungsweise als erfüllt betrachtet werden kann.

Wenn später die mittlere Dichtigkeit so gross geworden ist, dass die directe Ausstrahlung in den leeren Raum gerade bis zum Mittelpunkte sich erstreckt, so beginnt mit diesem Zeitpunkte die Bildung eines centralen Kernes, dessen Massentheile keine Wärmestrahlen mehr direct in den leeren Raum aussenden können. Bei weiterem Fortschreiten der Contraction wird der Radius dieses vor directer Ausstrahlung

---

1) Vgl. H. C. Vogel. Resultate spectralphotometrischer Untersuchungen. Berl. Ber. Sitzung vom 21. Oct. 1880.

geschützten Kernes anfangs zunehmen; später aber, wenn die Differenz zwischen dem Radius des Kernes und dem ganzen Halbmesser, oder die Tiefe der ausstrahlenden Oberflächenschicht, nur noch einen kleinen Bruchtheil vom ganzen Halbmesser bildet, wird der Radius des Kernes wieder abnehmen müssen, weil der ganze Halbmesser fortwährend abnimmt.

In Bezug auf diese letztere Entwickelungsperiode wurde in § 64 gezeigt, dass während derselben eine stetige Abnahme der pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärmequantität stattfindet, und da während jener ersten Entwickelungsperiode die Ausstrahlung anfangs jedenfalls zunahm, so musste bei irgend einem Zwischenzustande die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Wärmequantität ein Maximum erreichen.

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, dass während dieser letzteren Periode zwar die theoretische Oberflächentemperatur beständig zunehmen würde, dass aber infolge der Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetze die wirkliche Oberflächentemperatur nach Ueberschreitung eines gewissen Culminationspunktes anfangen muss wieder abzunehmen.

Zugleich ergibt sich aus den Untersuchungen des § 65, dass ein Fixstern den Culminationspunkt der Wärmeausstrahlung stets früher erreicht als den Culminationspunkt der Oberflächentemperatur. Der erstere entspricht dem Zeitpunkte der grössten Helligkeit oder Lichtstärke des Sterns, die letztere dem Zeitpunkte, in welchem die den Gesammteindruck des ausgesendeten Lichtes repräsentirende Farbe dem violetten Ende des Spectrums am nächsten rückt, und in welchem bei hinreichend grosser Masse des Sterns das Licht desselben bläulichweiss erscheint. Den ersteren Culminationspunkt überschritt die Sonne vielleicht zu einer Zeit, als ihr Halbmesser noch ungefähr so gross wie der Erdbahnhalbmesser war, während der letztere Culminationspunkt einem Zustande entspricht, welcher höchst wahrscheinlich nur wenig von dem gegenwärtigen Zustande verschieden ist.

Nach dem Ueberschreiten des ersteren Culminationspunktes nimmt die Lichtstärke schon ab, während die Oberflächentemperatur noch zunimmt. Mit dem Ueber-

schreiten des letzteren beginnt die Oberflächentemperatur gleichfalls abzunehmen, und die Lichtfarbe fängt an, dem rothen Ende des Spectrums wieder näher zu rücken. Ein Fixstern, welcher zur Zeit des Culminationspunktes seiner Oberflächentemperatur bläulich weisses Licht aussendet, musste in früherer Zeit, als seine Oberflächentemperatur noch sehr weit von dem Maximalwerthe derselben entfernt war, roth erscheinen, und ebenso wird derselbe später wieder roth erscheinen müssen, wenn nach dem Ueberschreiten des Culminationspunktes die Oberflächentemperatur wieder beträchtlich abgenommen hat.

Wenn man die Fixsterne nach ihren Oberflächentemperaturen in drei Classen eintheilt, indem man nach Vogel[1]) zur ersten Classe die weissen Sterne, zur zweiten die gelben, zur dritten Classe die rothen Sterne rechnet, so würde man nach der hier aufgestellten Theorie innerhalb der dritten Fixsternclasse zwei Gruppen oder Unterabtheilungen zu unterscheiden haben. Zur ersteren würden diejenigen rothen Fixsterne zu rechnen sein, deren Oberflächentemperaturen ihren Culminationspunkt noch nicht erreicht haben; zur letzteren alle diejenigen, deren Oberflächentemperaturen ihren Culminationspunkt bereits überschritten haben. Da nach § 65 angenommen werden darf, dass ein Fixstern den Culminationspunkt seiner Lichtstärke stets viel früher erreicht als den Culminationspunkt seiner Oberflächentemperatur, so werden die der ersteren Unterabtheilung angehörenden Fixsterne vorwiegend geringe Dichtigkeit und grosse Lichtstärke, die der letzteren angehörenden dagegen vorwiegend grosse Dichtigkeit und geringe Lichtstärke besitzen müssen.

Wenn man ferner annehmen darf, dass grössere Dichtigkeit in Verbindung mit relativ niedriger Temperatur die Entstehung chemischer Verbindungen begünstigt, so würde vorwiegend im Spectrum der zur letzteren Unterabtheilung gehörigen älteren dichteren Sterne das Auftreten von denjenigen Absorptions-Streifen oder -Banden zu erwarten sein,

1) H. C. Vogel, „Spectralanlyt. Mitth." Astron. Nachr. Nr. 2000.

welche auf die Anwesenheit chemischer Verbindungen in der Oberflächenschicht hindeuten.

Hiernach könnte die Frage aufgeworfen werden: ob die von Vogel mit III_a und III_b bezeichneten beiden Unterabtheilungen der dritten Fixsternclasse (Typus III und Typus IV nach Secchi) vielleicht identisch sind mit den hier auf Grund theoretischer Erwägungen aufgestellten beiden Unterabtheilungen, und ob aus dem eigenartigen Bandenspectrum der Abtheilung III_b — sowie aus dem Umstande, dass unter den bisher beobachteten Sternen dieser Abtheilung keiner die fünfte Grösse überschreitet — vielleicht geschlossen werden darf, dass die Sterne dieser Abtheilung zu denjenigen älteren dichteren lichtschwächeren Sternen gehören, welche den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur bereits überschritten haben. Die Beantwortung dieser Fragen muss den weiteren Forschungen der Spectralanalyse überlassen werden.

Wie bei den Sternen der dritten Classe, so würde man vielleicht auch bei den Sternen der zweiten und ersten Classe je zwei Unterabtheilungen unterscheiden können: nämlich die der relativ jüngeren Sterne, welche den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur noch nicht erreicht haben, und die der älteren Sterne, welche denselben bereits überschritten haben. Jedenfalls wird man annehmen dürfen, dass die Beschaffenheit des Spectrums eines Fixsternes nicht allein von der Temperatur, sondern auch von der mit dem Alter zunehmenden Dichtigkeit seiner Oberflächenschicht abhängt, und dass die Spectra zweier Fixsterne von gleichen Oberflächentemperaturen verschieden sein können, wenn ihre Oberflächenschichten ungleiche Dichtigkeiten besitzen. Da nach § 65 die Oberflächentemperatur eines Fixsternes zugleich von der Massengrösse desselben abhängt, so wird das Spectrum desselben gleichzeitig von der Masse und dem relativen Alter des Fixsternes abhängen müssen. Die Beantwortung der Frage: ob für eine befriedigende theoretische Erklärung der bisher beobachteten verschiedenen Spectra die Annahme von Massendifferenzen und Altersdifferenzen allein schon ausreichen würde, muss ebenfalls den weiteren Forschungen der Spectralanalyse überlassen werden.

§ 68. Muthmassliche Ursachen der geringeren Häufigkeit der rothen Fixsterne.

Wenn man in Gleichung (624) die beiden Integrationsgrenzen miteinander vertauscht, so erhält man für die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser von der Grösse r_0 bis auf die Grösse r abnehmen würde, die Gleichung:

$$(636) \qquad t = \frac{k r_0}{(7k-8)\sigma_0}\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{7k-8}{k}} - 1\right\},$$

welche nach Substitution der Werthe $k = {}^5/_3$ und $\sigma_0 = 48$ m die folgende Form annimmt:

$$(637) \qquad t = 6\,504\,000\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2,2} - 1\right\}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man z. B. für die Zeit, in welcher der Sonnenhalbmesser bis auf die Hälfte der gegenwärtigen Grösse abnehmen würde, der Werth $t = 23,4$ Millionen Jahre. Nach Gleichung (627) würde unter denselben Voraussetzungen der Zeitraum, in welchem der Sonnenhalbmesser von der Grösse $2r_0$ bis auf die Grösse r_0 abnahm, etwa 5,1 Millionen Jahre betragen. Hiernach würde die ganze Dauer der Abnahme des Sonnenhalbmessers von der Grösse $2r_0$ bis auf die Grösse ${}^1/_2 r_0$ etwa 28,5 Millionen Jahre betragen, also etwa das Zwanzigfache von demjenigen Zeitraume, in welchem der Sonnenhalbmesser von der Grösse $215r_0$ bis auf die Grösse $2r_0$ abnahm, insofern dieser letztere Zeitraum nach Gleichung (627) nur etwa 1,4 Millionen Jahre betragen würde.

Wenn auch aus den bereits in § 66 angeführten Gründen die auf solche Weise berechneten theoretischen Werthe als rohe Annäherungswerthe betrachtet werden müssen, welche nur einen äusserst geringen Grad von Zuverlässigkeit beanspruchen können und von den wirklichen Werthen sehr weit abweichen mögen, so scheint doch aus den obigen Resultaten gefolgert werden zu dürfen, dass in früheren Zeiten, z. B. zu der Zeit, als der Sonnenhalbmesser noch das Hundertfache der gegenwärtigen Grösse hatte, die Zustandsänderung und die Volumenabnahme der Sonnenmasse ausserordentlich viel rascher erfolgte als bei dem gegenwärtigen

Zustande, welcher, mit jenem früheren verglichen, als nahezu stationär gelten kann.

Hieraus darf zugleich geschlossen werden, dass die Dauer derjenigen Periode, in welcher die Sonne als Fixstern eine grössere Helligkeit als gegenwärtig besass, sehr klein war im Verhältniss zu derjenigen Periode, in welcher dieselbe eine von der gegenwärtigen nur wenig abweichende Helligkeit besass und besitzen wird. Dem Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung eines Fixsterns entspricht immer ein verhältnissmässig rasch vorübergehender Zustand; dem Culminationspunkte der Oberflächentemperatur dagegen ein Zustand, in welchem der Fixstern verhältnissmässig lange verweilt.

Aus Gleichung (636) würde man für $r = 0$ den Werth $t = \infty$ erhalten, d. h. wenn die Sonnenmasse die Eigenschaften eines idealen Gases besässe, so würde das Volumen derselben erst nach unendlich langer Zeit die Grösse Null erreichen, und das Leuchten der Sonne würde ewig fortdauern müssen. Da jedoch von einer unbegrenzten Steigerungsfähigkeit ihrer Dichtigkeit in Wirklichkeit nicht die Rede sein kann, so muss angenommen werden, dass die Sonne schon nach einem bestimmten endlichen — wenn auch wahrscheinlich sehr langen — Zeitraume einen Grenzzustand erreichen wird, bei welchem das Leuchten derselben ganz aufhört, und die gleiche Annahme muss in Bezug auf jeden anderen Fixstern gemacht werden. In diesem Sinne kann — wie bei einem Cometen oder Meteoriten — so auch bei einem Fixsterne von einer bestimmten Erscheinungsdauer desselben die Rede sein, wenn auch der Zeitraum, welcher zwischen dem ersten Aufleuchten und dem nachherigen Erlöschen verstreicht, vielleicht mehrere hundert Millionen Jahre betragen mag.

Die ganze Erscheinungsdauer eines Fixsterns wird (nach der im vorigen Paragraphen aufgestellten Theorie) durch den Culminationspunkt der Wärmeausstrahlung und den Culminationspunkt der Oberflächentemperatur in drei Zeitabschnitte zerlegt. Während des ersten Zeitabschnittes war die Quantität der pro Zeiteinheit ausgestrahlten Wärme in beständigem Zunehmen begriffen. Die Zustandsänderung

erfolgte zu Anfang dieses Zeitsabschnittes — zu der Zeit, als der Stern noch im Zustande eines Nebenfleckes sich befand — sehr langsam, weil zu dieser Zeit die Wärmeausstrahlung noch sehr gering war, und später als der Stern bei zunehmender Verdichtung dem Maximum seiner Helligkeit sich näherte, sehr rasch. Während des zweiten Zeitababschnittes ist die Wärmeausstrahlung in beständigem Abnehmen begriffen; die Geschwindigkeit der Zustandsänderung ist anfangs gross und wird später, wenn die Oberflächentemperatur ihrem Maximalwerthe sich nähert, allmählich kleiner. Während des dritten Zeitabschnittes sind Wärmeausstrahlung und Oberflächentemperatur beide in beständigem Abnehmen begriffen, und während dieses ganzen Zeitraumes ändert sich der Zustand sehr langsam.

Auf die sehr lange Periode des langsamen Entstehens folgt also eine sehr kurze mittlere Periode, in welcher die Zustandsänderung mit sehr grosser Geschwindigkeit stattfindet, und auf diese folgt die wiederum sehr lange Periode des langsamen Erlöschens. Wenn man demgemäss die Fixsterne nach ihrem Alter in drei Classen eintheilt, welche den obigen drei Entwickelungsphasen entsprechen, so würde man zur ersten Altersclasse *A* diejenigen Sterne zu rechnen haben, welche noch in der Entwickelungsphase der Nebelflecken sich befinden; zur zweiten Altersclasse *B* diejenigen, welche sich in der rasch vorübergehenden Periode des grössten Glanzes befinden; zur dritten Altersclasse *C* diejenigen Sterne, welche bereits in die sehr lange Periode des langsamen Erlöschens eingetreten sind. Bei dieser Eintheilung würde jedoch zu berücksichtigen sein, dass der Ausdruck „Altersclasse“ nicht auf das absolute, sondern auf das relative Alter der Sterne sich bezieht, insofern ein Fixstern von geringer Masse die aufeinander folgenden Phasen seiner Entwickelung rascher durchläuft als ein Fixstern von grosser Masse.

Da die Altersperiode, in welcher die zur Altersclasse *B* gehörigen Sterne sich befinden, eine Entwickelungsphase von verhältnissmässig sehr kurzer Dauer repräsentirt, so ist nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit zu erwarten, dass die Anzahl derjenigen Sterne, welche gleichzeitig in dieser

Altersperiode sich befinden, stets klein ist im Verhältniss zur Gesammtzahl der Sterne und auch im Verhältniss zu der Anzahl derjenigen Sterne, welche der Altersclasse *C* angehören.

Nach den hier aufgestellten Hypothesen würden zur Altersclasse *B* die jüngeren Sterne der dritten Fixsternclasse gehören, nämlich diejenigen rothen Sterne, welche den Culminationspunkt ihrer Oberflächentemperatur noch nicht erreicht haben; zur Altersclasse *C* dagegen ausser den Sternen der ersten und zweiten Classe auch noch die älteren Sterne der dritten Classe, nämlich diejenigen rothen Sterne, welche nach Ueberschreitung des Culminationspunktes ihrer Oberflächentemperatur bereits einen dem völligen Erlöschen sich nähernden Zustand erreicht haben.

In Bezug auf diese letzteren Sterne ist jedoch nicht mit Sicherheit zu erwarten, dass dieselben auch unter den gegenwärtig wirklich sichtbaren Sternen in grosser Anzahl vertreten sein müssten, einerseits aus dem Grunde weil dieselben infolge ihrer Lichtschwäche vielleicht grossentheils der Beobachtung sich entziehen, andererseits, weil es recht wohl möglich wäre, dass das ganze Fixsternsystem noch in einer Periode des relativen Jugendalters sich befindet, und dass infolge dessen nur erst einige wenige Fixsterne von geringer Massengrösse denjenigen Zustand bereits erreicht haben, welcher dem Erlöschen unmittelbar vorausgeht.

Hiernach scheinen die Resultate der Spectralbeobachtungen den oben aufgestellten Hypothesen günstig gedeutet werden zu dürfen, insofern unter 3702 einer bestimmten Zone angehörigen von Vogel[1]) untersuchten Sternen 2165 zur ersten Classe, 1240 zur zweiten Classe, 288 zur Classe III_a und 9 zur Classe III_b gehörten.

---

1) H. C. Vogel, „Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums“ zu Potsdam Nr. 11 Jahrg. 1883.

XI. *Die Reduction der mechanischen Grundeinheiten auf eine einzige Dimension; von E. Budde.*

Eine Zeit heisse T, ein Länge L, Masse M, Geschwindigkeit V, Potentialfunction P; Dimensionen werden durch Einklammerung dieser Symbole bezeichnet, z. B. $(V) = (L/T)$; die Einheiten der Grössen werden T_1 L_1 M_1 u. s. w. geschrieben. Betrachtet man die Grössen Zeit, Länge und Masse als unmittelbar durch die Anschauung gegeben, so sollen sie gemeine Zeit, gemeine Masse u. s. w. heissen; die willkürlichen Einheiten derselben heissen dann gemeine Einheiten, und die in diesen Einheiten dargestellten Grössen V, P und ähnliche erhalten gleichfalls die Bezeichnung „gemein."

Gauss hat gezeigt, wie man mit Hülfe des Newton'schen Gesetzes die gemeine Masse eliminiren und die Masse durch einen Ausdruck (L^3/T^2) definiren kann. Er benutzt dabei die Umlaufsgeschwindigkeit eines Satelliten, der sich nach dem Newton'schen Gesetz in kreisförmiger Bahn vom Radius L um den Massenpunkt M dreht. Man kann ebensowohl irgend eine andere mechanische Function (z. B. die Beschleunigung) von M verwenden, da sich ja aus ihr jene Umlaufsgeschwindigkeit ohne neuen Recurs auf die Masse berechnen lässt. Wir wählen, um spätere Betrachtungen zu vereinfachen, die einfachste von allen, die Potentialfunction. Nach dem Newton'schen Gesetz ist, wenn ε eine Constante, die Potentialfunction von M in der Entfernung L:

$$P = \varepsilon \frac{M}{L}. \tag{1}$$

Daraus folgt, wenn man die disponiblen Einheiten so bestimmt, dass $\varepsilon = 1$ wird:

$$P = \frac{M}{L}, \quad \text{also:} \tag{2}$$

$$M = PL. \tag{3}$$

Die Masse M lässt sich also definiren als „Potentialfunction in der Entfernung 1"; denn das ist ja PL. Die Potentialfunction selbst ist dabei zu definiren als das längs dem Radius vector L genommene Integral $\int_{\infty}^{L} \varphi \, dL$, in welchem φ die von M ausgeübte Beschleunigung darstellt; φ ergibt sich aus der

Betrachtung der Geschwindigkeiten, welche eine zweite Masse unter der Einwirkung von M annimmt. Es ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass die geometrische Ausdehnung von M der Anwendung des Grundgesetzes in der einfachen Form Gl. (1) nicht im Wege stehe; diese Voraussetzung soll in allem folgenden, auch für das später auftretende Weber'sche Gesetz, beibehalten werden.

Geht man nun von dem Begriff der gemeinen Masse aus, so hat ε eine ganz bestimmte Dimension. Wie aus (1) zu ersehen, ist:

$$(4) \qquad \varepsilon = \frac{P_1 L_1}{M_1},$$

und da P die Dimensionen eines Geschwindigkeitsquadrates besitzt, ist:

$$(5) \qquad (\varepsilon) = \frac{(L^3)}{(T^2 M)},$$

und wenn man $\varepsilon = 1$ setzt, so ist diese 1 zunächst als eine Einheit von der vorstehenden Dimension zu denken.

Die drei Grössen L, M und T, aus denen sich die Dimension von ε zusammensetzt, sind für die unmittelbare Anschauung durchaus incohärent, aber die Natur stellt einen Zusammenhang zwischen ihnen her, indem sie uns die Thatsache liefert: „eine bestimmte Masse (M) übt in der Entfernung (L) eine bestimmte Beschleunigung $\left(\varepsilon\,(L^2/T^2)\right)$. Hat man erst dem ε in diesem Zusammenhang einen bestimmten Grössenwerth beigelegt, so genügt das Product PL, um ein gegebenes M und seine Wirkungen festzustellen; die Dimension von ε spielt in dieser Bestimmung keine Rolle, sondern nur sein Zahlenwerth; darauf beruht die Berechtigung, ε als reine Zahl zu behandeln.

Besässen wir eine Theorie, welche die Wirkung der in der Natur gegebenen Massen auf anschauliche Verhältnisse zurückführte, so würde sich in ihr auch die Erklärung für den in Gl. (3) ausgedrückten Zusammenhang finden müssen.

Ganz dieselben Betrachtungen finden auf die Constante des electrostatischen Anziehungsgesetzes Anwendung; sie lehren dort nichts neues, weil die Beziehungen mit den vorstehend behandelten identisch sind.

Die Natur liefert uns nun ausser der Newton'schen

und der Coulomb'schen Constante noch eine dritte Grösse, welche sich von allen Besonderheiten des Stoffes und des gegebenen Falles unabhängig zeigt, und die deshalb, wie jene, als Ausdruck einer fundamentalen Naturbeziehung aufgefasst werden darf. Das ist die Constante k der electrodynamischen Grundgesetze. Diese hat, wie ε, in gemeinen Einheiten eine ganz bestimmte Dimension, die aber blos die Grössen L und T enthält; und wie jenes ε benutzt werden konnte, um von den gemeinen Grössen M, L und T die erste wegzuschaffen, so kann k dazu dienen, um aus den beiden übrig bleibenden L und T noch eine zu eliminiren. Es ist dazu nicht einmal erforderlich, dass eines der vorhandenen electrodynamischen Grundgesetze das richtige sei; es genügt, eines auszuwählen, welches irgend einen Satz von Beobachtungen so darstellt, dass sich aus ihnen die Grösse k jederzeit in gemeinen Einheiten berechnen lässt. Man kann dann auf Grund der Beobachtung die Verhältnisse eines willkürlich fingirten Falles (ein solcher ist ja auch, genau genommen, der Gauss'sche Satellit) mathematisch darstellen, und an ihnen die erforderlichen Definitionen entwickeln.

Wir fingiren also eine ruhende Masse M, welche andere Massen μ nach dem Weber'schen Gesetz anzieht. (Man wird leicht ersehen, dass das Riemann'sche Gesetz ganz analoge Ergebnisse liefert, das Clausius'sche gleichfalls, wenn man dem M eine absolute Geschwindigkeit ertheilt.) Eine angezogene Masse μ bewege sich auf einer durch M gehenden Geraden mit der Geschwindigkeit V. M hat dann eine Potentialfunction:

$$P = \varepsilon \frac{M}{L}(1 - kV^2), \tag{6}$$

und wenn M in gemeinen Masseneinheiten gegeben ist, so reichen die Beobachtungsdaten vollständig aus, um den Werth von P für jedes L und V zu berechnen. Wir finden zunächst einen Werth von P für $V = 0$:

$$P_0 = \varepsilon \frac{M}{L}, \tag{7}$$

setzen darin $\varepsilon = 1$ und haben damit die Gauss'sche Massenbestimmung, in welcher L_1 und T_1 noch willkürlich sind. Vermöge derselben vereinfacht sich (7) zu:

(8) $$P = \frac{M}{L}(1 - kV^2).$$

Hierin hat nun die Constante k in gemeinen Einheiten eine ganz bestimmte Dimension; denn damit die Formel homogen sei, muss k ein reciprokes Geschwindigkeitsquadrat, also:

(9) $$(k) = \left(\frac{T^2}{L^2}\right)$$

sein. Zähler und Nenner des Bruches T^2/L^2 sind, ganz wie bei ε, für unsere Anschauung incohärent. Wir sind zwar so an den Umgang mit Geschwindigkeiten gewöhnt, dass wir leicht zu dem Glauben gelangen könnten, eine Geschwindigkeit, also ein Quotient L/T, sei direct vorstellbar; aber das ist nicht der Fall; was wir bei Betrachtung einer Geschwindigkeit anschauen, das sind einerseits die consecutiven Orte des bewegten Punktes und ihre Distanzen L, andererseits die entsprechenden Zeiträume, aber nicht das Verhältniss beider; dies ist eine transcendente Beziehung.

Ganz wie Gl. (1) können wir nun (8) umkehren und als Bestimmungsgleichung für die Grösse V benutzen. Wir finden:

(10) $$V^2 = \frac{M - PL}{kM}$$

und durch diese Gleichung wird der Grössenwerth von V wieder unabhängig von den Dimensionen der Constante; er hängt nur vom Zahlenwerth von k ab, und wenn wir den willkürlich festsetzen, ist V vollkommen bestimmt. Wir setzen also, mit demselben Recht wie bei ε, fest:

k soll die Zahl 1 sein. Dann ist:

(11) $$V^2 = \frac{M - PL}{M}.$$

PL ist die Masse eines Körpers, der nach dem Newton'schen Gesetz in der Entfernung L die gleiche Beschleunigung üben würde, welche M nach dem Weber'schen ausübt. Nennen wir PL die „scheinbare Masse" des anziehenden Körpers M, so besagt Gl. (11): Das Quadrat der Geschwindigkeit des angezogenen Körpers μ ist die Differenz zwischen der wahren und der scheinbaren Masse des anziehenden Körpers M, dividirt durch dessen wahre Masse. Man sieht leicht, dass die Daten auf der rechten Seite der Gleichung für ein gegebenes M aus der Beobachtung jederzeit herstellbar sind.

Dadurch wird nun V^2, wie man ohne weiteres sieht, eine reine Zahl, also auch V, und da $(V) = (L/T)$, wird:

(12) $$(L) = (T),$$

und wenn man dies in die Gauss'sche Bestimmung:

(13) $$(M) = \left(\frac{L^3}{T^2}\right)$$ einsetzt, wird:

(14) $$(M) = (T),$$

zwei bemerkenswerth einfache Beziehungen. Es ist hiernach mit Hülfe des Weber'schen Gesetzes möglich, Längen und Massen durch reine Zeiten zu definiren. Das geschieht am bequemsten mit Hülfe der von Weber eingeführten, von Helmholtz benannten Begriffe „kritische Geschwindigkeit $c = \sqrt{1/k}$“ und „kritische Entfernung λ“. Erstere ist in gemeinen Einheiten unabhängig von aller Besonderheit des Falles gegeben; letztere lässt sich für jede gegebene Masse M in gemeinen Längeneinheiten bestimmen unter der fictiven Voraussetzung, dass die Masse dem Gesetz (6) gehorcht. Weber[1]) bestimmt die kritische Entfernung an zwei electrischen Theilchen, deren Quantitäten e und e', deren Massen (Trägheitscoëfficienten) q und q' seien, durch die Gleichung:

(15) $$\lambda = 2\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'}\right)\frac{e e'}{c^2}.$$

Bei den von uns vorausgesetzten Körpern M und μ ist Quantität und Masse identisch; setzen wir $\mu = M$, so wird:

(16) $$q = q' = e = e' = M,$$

und Gl. (15) reducirt sich auf:

(17) $$\lambda = \frac{4M}{c^2}.$$

Dieses λ, die kritische Entfernung zweier gleichen Massen M, nennen wir kurzweg „die kritische Entfernung der Masse M.“ Setzen wir $k = 1/c^2 = 1$, so ist:

(18) $$\lambda = 4M,$$ also auch umgekehrt:

(19) $$M = \tfrac{1}{4}\lambda.$$

Damit erhalten wir folgende Bestimmungen für die Fundamentalgrössen:

---

1) W. Weber, Electrodynam Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie, Leipzig 1871, id. über die Energie der Wechselwirkung, Leipzig 1878.

1. Die Zeit ist die gemeine Zeit.

2. Die Geschwindigkeit eines Punktes ist der Quotient aus seiner gemeinen Geschwindigkeit und der gemeinen Geschwindigkeit c, wenn beide in denselben willkürlichen Einheiten ausgedrückt sind.

3) Die Länge einer Strecke ist die Zeit, in welcher sie mit der Geschwindigkeit eins durchlaufen wird.

4) Die Masse eines Körpers ist ein Viertel seiner als Zeit ausgedrückten kritischen Entfernung.

Damit ist die Reduction des Längen- und Massenmaasses auf Zeitmaass ausgeführt. Wir bemerken, dass Weber in den Maassbestimmungen von 1878 schon eine Grösse u eingeführt hat, die unserer „Geschwindigkeit" entspricht. Die Einheiten des obigen Maasssystems ergeben sich unmittelbar aus den Festsetzungen $\varepsilon = 1$ $k = 1$, aus denen es hervorgegangen ist:

1. Die Zeiteinheit ist gemeine Secunde.

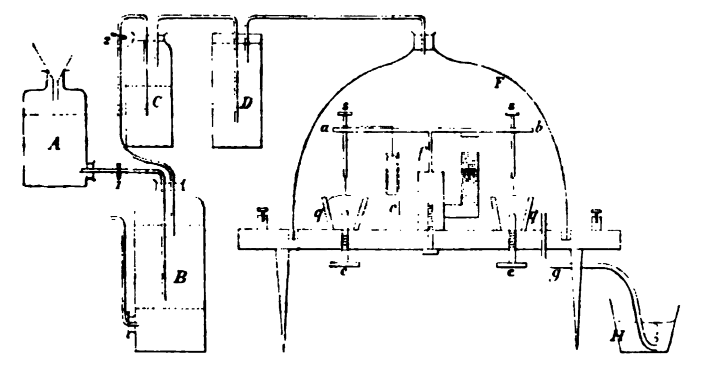
2. Die Längeneinheit (1 Sec. Länge) ist die Länge, welche mit der kritischen Geschwindigkeit in einer Secunde durchlaufen wird; ihr Zahlenwerth in gemeinen-Einheiten ist gleich dem von c, wenn c in m/sec ausgedrückt wird.

3. Die Masseneinheit (1 Sec. Masse) ist die astronomische Einheit von Gauss, wohlverstanden mit Zugrundelegung der sub (2) definirten Längeneinheit, also diejenige Masse, welche einer anderen Masse in der Entfernung von c gemeinen Längeneinheiten die gemeine Beschleunigung c m/sec^2 ertheilt. Setzt man $c = 300\,000\,000$, die Beschleunigung der Erdschwere $= 9{,}81$, den Erdradius $= 6\,370\,000$, so wird $M_1 = 67\,700\,000\,000$ Erdmassen.

Man erhält mit dem vorstehenden System eine Art von Erklärung für die Cohärenz der Gauss'schen Beziehung $(M) = (L^3/T^2)$, da diese in unseren Einheiten lautet $(T) = (T^3/T^2)$, also sichtlich identisch wird. Es ist nur consequent, zu behaupten, dass die Theorie der electrodynamischen Wirkungen dermaleinst eine Erklärung der Gleichung $L = T$ liefern muss, so dass die vorstehenden Betrachtungen einmal einen heuristischen Werth erhalten könnten.

XII. *Notiz über eine unter Wasserstoff arbeitende Wippe; von E. Budde.*

Bekanntlich ist es schwierig, eine electrische Selbstunterbrechung längere Zeit in geregelter Thätigkeit zu halten, weil die Oxydationsproducte, deren Bildung der Funke veranlasst, immer wieder die Unterbrechungsstelle verschmieren. Bedarf man eines Apparates, der mehrere Stunden ganz sicher arbeiten soll, so weiss ich bis jetzt kaum ein anderes Mittel, als fliessendes Wasser über die Unterbrechung zu leiten, welches die oxydirten Theile fortschwemmt; das ist meist umständlich und manchmal nicht ausführbar. Ich habe deshalb versuchsweise einen Quecksilberunterbrecher herstellen lassen, der unter Wasserstoff geht, und glaube, ihn, nachdem ich die Probe gemacht, empfehlen zu können. Die kleine Mühe, einen Wasserstoffentwickler herzustellen, wird reichlich dadurch aufgewogen, dass man den einmal in Gang gesetzten Apparat stundenlang ohne Aufsicht lassen kann.



Den Aufriss der ganzen Vorrichtung zeigt beifolgende Figur, wobei die chemischen Geräthschaften der Raumersparniss wegen unverhältnissmässig verkleinert sind.

A. Unten tubulirte Flasche für verdünnte Schwefelsäure.

1. Quetschhahn; die bequemste Form ist die von Dittmar, eine in der Ruhelage geöffnete Feder, welche durch eine Schraubenmutter zusammengedrückt wird.

B. Entwicklungsflasche; unten eine Schicht Coaks, darüber das granulirte Zink; unten seitlicher Tubulus zum Ablassen der Sulfatlösung.

2. Quetschhahn.

C und *D* Waschflasche (concentrirte Schwefelsäure) und Trockencylinder (Natronkalk) nach Bedürfniss zu vermehren.

F. Glocke, unter der der Unterbrecher steht. Dieselbe steht in einer Rinne des Tischchens, welches den Unterbrecher trägt; sie wird mit Quecksilber oder (bequemer) mit Fett gedichtet. Die Oberseite dieses Tischchens und die Wände der Rinne sind, nachdem die Apparattheile fest geschroben worden, mit Wachs überzogen. Bei

G führt ein Glasröhrchen durch den Boden des Tischchens nach aussen, sodass das durchströmende Gas in ein Wassergefäss *H* geleitet werden kann. In diesem bleibt das Ende des Gummischlauches während der Versuchsdauer liegen.

Unter der Glocke ist

m der Electromagnet,

f die Feder des Wacklers,

ab dessen Querbalken,

ss Stifte von Messing, in *ab* verstellbar eingeschraubt, unten mit Platinspitzen. Diese tauchen in

q die Quecksilbernäpfe. Dieselben sind aus Eisen gedreht, ihre Anzahl beliebig; bei grösserer Anzahl werden sie in zwei Reihen rechtwinklig zur Ebene der Zeichnung angeordnet. Durch den Boden jedes Napfes geht eine Schwanzschraube *e*, mittelst deren das Quecksilberniveau verstellt werden kann, ohne dass man die Glocke abhebt. Sind die Näpfe conisch, so kann die Oberfläche des Quecksilbers so regulirt werden, dass sie eine regelmässige stehende Schwingungsfigur bildet.

c sind oben ausgehöhlte und mit Quecksilber gefüllte Säulen, deren eine zu jedem der Schraubenstifte *s* gehört (nur eine gezeichnet); ein von *s* kommender, isolirt über den Balken *ab* geführter Draht taucht so tief in das Quecksilber, dass er nicht herausgehoben wird, wenn der Wackler in Thätigkeit ist. Die *c* stehen seitlich von der Axe des Wacklers. Die Isolirung des Drahtes erlaubt Disjunctionsversuche.

Alle c, q und die Umspinnung des Magnets sind mittelst Drähten, welche durch das Holz des Tischchens geleitet und dann unter demselben hergeführt sind, mit ausserhalb der Glocke stehenden Klemmschrauben in Verbindung; letztere sind nicht gezeichnet.

Beim Gebrauch öffnet man erst beide Hähne 1 und 2 und lässt einen kräftigen Wasserstoffstrom durchgehen. Die in H aufsteigenden Blasen fängt man nach zehn Minuten in einem Probirgläschen auf und zündet sie an; wenn die Flamme ruhig in das Glas hinabbrennt, ist keine Explosionsgefahr mehr vorhanden; man schraubt dann den Hahn 1 soweit zu, dass nur noch ein schwacher Gasstrom erzeugt wird; unter diesem arbeitet man.

Ist der Gasstrom gut gewaschen und getrocknet, so ist das Quecksilber nach vierstündiger Arbeit noch blank. Unterbrechende Stimmgabeln können leicht analog behandelt werden. Es genügt, eine Schwanzschraube im Quecksilbergefäss und die Wasserstoffglocke anzubringen.

XIII. *Ueber eine neue Flüssigkeit von hohem specifischen Gewicht, hohem Brechungsexponenten und grosser Dispersion; von Carl Rohrbach.*

Nachdem zuerst im Jahre 1862 Graf F. Schaffgotsch[1]) eine Methode angegeben hatte, das spec. Gewicht fester Körper durch Schwebenlassen in einer Flüssigkeit zu bestimmen, und auch bereits auf die durch schwere Lösungen (er empfahl eine solche von saurem salpetersauren Quecksilberoxyd) ermöglichte Trennung verschiedener Mineralien[2]) hingewiesen hatte, schlugen Church[3]) und Thoulet[4]) an Stelle der durch ihren nothwendigen Gehalt an freier Salpetersäure in ihrer Anwendung beschränkten Schaffgotsch'schen Lösung eine solche von Kaliumquecksilberjodid vor; sie wiesen auch namentlich auf deren Verwendbarkeit zur

1) Schaffgotsch, Pogg. Ann. **116.** p. 279 ff. 1862.
2) Schaffgotsch, l. c. p. 282.
3) Church, Min. Mag. 1877. p. 237.
4) Thoulet, Bull. de la Soc. Min. de France. p. 17—23. 1879.

mechanischen Trennung der Gesteinsgemengtheile hin, und Thoulet gab zu letzterem Zweck einen eigenen Apparat an.

V. Goldschmidt[1]) hat diese Lösung zum Gegenstand einer sehr eingehenden Untersuchung gemacht und als äusserste Grenze für deren spec. Gew. G = 3,196 (Church 3,01, Thoulet 2,77) gefunden; gewöhnlich erreichte er jedoch nur 3,17.

Es folgte dann 1881 D. Klein[2]) mit seiner Lösung des Cadmiumborowolframates $9 WoO_3 Bo_2O_3 2 CdO 2 H_2O + 16 aq$, welche ein Gewicht von 3,28 (im Sommer auch 3,3) erreicht. Bei 75° in ihrem Krystallwasser schmelzend, sollen die sorgfältig vorher getrockneten Krystalle dieser Verbindung eine Lösung von G = 3,3—3,6 liefern, doch bietet hier offenbar die Anwendung einer so hohen Temperatur grosse Schwierigkeiten; ausserdem wird diese Lösung durch Carbonate und Sulfide zersetzt, gestattet also auch in dieser Hinsicht nur eine beschränkte Verwendung.

Bei der grossen Aehnlichkeit der Doppelsalze, welche das Quecksilberjodid mit den Jodiden der Alkalien einerseits und mit denen der alkalischen Erden andererseits bildet, untereinander schien mir der Versuch lohnend, auch das Bariumquecksilberjodid zur Herstellung schwerer Lösungen heranzuziehen, für welche sich dann, für beide Salze gleiche Löslichkeit vorausgesetzt, ein noch höheres Gewicht als das der Thoulet'schen erwarten liess, entsprechend dem höheren Atomgewicht des Bariums gegenüber dem Kalium. Nachdem ein Vorversuch im hiesigen mineralogischen Institut ein sehr günstiges Resultat (G = 3,39) geliefert hatte, stellte ich mit der bereitwilligst gewährten Erlaubniss meines verehrten Lehrers, des Hrn. Prof. G. Wiedemann, im physikalisch-chemischen Institut eine grössere Reihe von Versuchen über diesen Gegenstand an, deren Resultate ich mir im Folgenden mitzutheilen erlaube.

Bei der Darstellung der Lösung ist es nothwendig, bis zur vollständigen Bildung des Doppelsalzes sehr rasch zu verfahren, da das Jodbarium als solches sehr hygroskopisch ist und in Lösung sich überaus schnell an der Luft zersetzt. Ich habe folgende Methode am zweckmässigsten gefunden:

1) Goldschmidt, Neues Jahrb. f. Min. 1881, Beilagebd. 1. p. 179. auch als besondere Schrift erschienen.

2) Klein, Compt. rend. 93. p. 318. 1881 und Bull. de la Soc. Min. de France 4. p. 149. 1881.

100 Theile Jodbarium[1]) und ca. 130 Theile Jodquecksilber (Hydrargyrum bijodatum rubrum des Handels) werden rasch abgewogen und in einem trocknen Kochfläschchen gut durcheinandergeschüttelt, dann setzt man ca. 20 ccm destillirtes Wasser zu und bringt das Ganze in ein schon vorher auf ca. 150—200° erhitztes Oelbad; dabei wird die rasche Auflösung der Materialien und Bildung des Doppelsalzes durch fortgesetztes Umrühren mit einem krückenförmig gebogenen Glasstab, dessen oberes Ende man zwischen zwei Fingern dreht, möglichst beschleunigt. Wenn alles gelöst ist, lässt man noch kurze Zeit sieden, giesst die Flüssigkeit in eine Porzellanschaale und dampft auf dem Wasserbade weiter ein, bis ein als Indicator eingelegter Epidotkrystall vom Sulzbachthale eben auf der Lösung zu schwimmen beginnt. Beim Erkalten scheidet sich eine kleine Quantität eines gelben Doppelsalzes aus, trotzdem aber nimmt das spec. Gewicht der Lösung infolge der Contraction bedeutend zu, sodass auf der kalten Flüssigkeit Topas schwimmt. Von dem ausgeschiedenen Doppelsalz trennt man dieselbe am besten, indem man sie mehrere Tage in einer verschlossenen Flasche stehen lässt und decantirt, oder man filtrirt mittelst Saugfilter und Platinconus. Doch erscheint dies, namentlich wo es sich um grössere Quantitäten handelt, wenig zweckmässig, da das Filtrirpapier durch die Lösung eine lederähnliche Beschaffenheit erhält und sich dann nicht mehr dicht an das Glas des Trichters anlegt; sehr gut filtrirt sich die Lösung dagegen durch Glaswolle.

Die so erhaltene Lösung von Bariumquecksilberjodid erreicht bei gewöhnlicher Temperatur ohne Schwierigkeit ein spec. Gewicht von 3,575—3,588; sie stellt eine vollkommen klare, sehr stark lichtbrechende Flüssigkeit von gelber Farbe dar, welche sich beim Erhitzen beträchtlich dunkler färbt (wohl infolge einer eintretenden Dissociation), bei ca. 145° siedet und mit den Wasserdämpfen rothes Quecksilberjodid abgibt, das sie übrigens heiss auch im Ueberschuss zu lösen vermag. Ihr Ausdehnungscoëfficient ist (nach dem Verhalten des spec. Gew. zu schliessen) ein ziemlich grosser.

Die Brechungsexponenten für verschiedene Fraunhofer'sche Linien wurden bei einer Temperatur von ca. 23° aus

1) Als Bezugsquelle kann ich die chemische Fabrik von H. Trommsdorff in Erfurt sehr empfehlen.

den Minimalablenkungen bestimmt, und zwar einmal (*a*) in einem Steinheil'schen Hohlprisma vom brechenden Winkel 60°, ein zweites mal (*b*) an einem anderen Tage in einem solchen von 10° (H_α, Na, H_β); es ergaben sich folgende Resultate, denen ich zur Vergleichung die entsprechenden Constanten einiger anderer Körper gegenüberstelle.

	C	*D*	*E*	*F*	$n_F - n_C$	$\frac{n_F - n_C}{n_C}$
Wasser 18,75°	1,3320	1,3336	1,3357	1,3380	0,0060	0,0045
Schwefelkohlenstoff 15,65°	1,6219	1,6308	1,6439	1,6555	0,0336	0,0207
Cassiaöl	1,5979	1,6073	1,6207	1,6358	0,0379	0,0236
Faraday's Borsaures Bleiglas $G = 4{,}728$ . . .	1,7077	1,7148	1,7242	1,7325	0,0248	0,0145
Thoulet's Kaliumquecksilberjodid $G = 3{,}112$ . .	1,7014	1,7167	1,7391	1,7621	0,0607	0,0357
Dieselbe $G = 3{,}2$ . . .	—	1,733	—	—	—	0,0369
Bariumquecksilberjodid $G = 3{,}564$ a)	1,7755	1,7932	1,8265	—	—	—
b)	1,7752	1,7928	—	1,8488	0,0736	0,0409

G und die folgenden Fraunhofer'schen Linien konnten wegen der im Violett bereits sehr starken Absorption nicht mehr gemessen werden, doch ergibt sich bereits aus der Tabelle, um wieviel die Dispersion dieser Lösung die der anderen aufgeführten Körper übertrifft, welche doch ihrerseits zu den am stärksten zerstreuenden und, was die Flüssigkeiten anbetrifft, zu den am stärksten brechenden gehören; wenigstens ist es mir ebensowenig wie Goldschmidt[1]) gelungen, Angaben über Flüssigkeiten von noch höherem Brechungsindex zu finden.

Die Stärke der Dispersion zeigt sich namentlich deutlich in der ausnehmend scharfen Trennung beider *D*-Linien:

$$n_{D_1} = 1{,}7931, \qquad n_{D_2} = 1{,}7933.$$

Die Differenz beider Ablenkungswinkel beträgt bei einem Prisma von 60° fast volle 2′.

Der hohe Brechungsexponent, welcher selbst den des Arsenbromürs (1,78) übertrifft, dürfte die Lösung des Bariumquecksilberjodides in noch höherem Grade als die Thoulet'sche zur Bestimmung von Brechungsexponenten mittelst Totalreflexion geeignet erscheinen lassen.[2])

1) Goldschmidt, l. c. p. 236.

2) Ich darf mir wohl an dieser Stelle erlauben, Hrn. Prof. E. Wiede-

Der Umstand, dass Jodbarium bereits durch den Kohlensäuregehalt der Atmosphäre rasch zersetzt wird, forderte eine genaue Prüfung des Verhaltens der Lösung gegen freie Kohlensäure, sowie gegen Carbonate. Ein während zwei Stunden durch dieselbe geleiteter Strom Kohlensäure brachte nicht die mindeste Veränderung in derselben hervor; ein Spaltungsstück von Calcit wurde zehn Tage in der Lösung gelassen, ohne dass seine Flächen im geringsten von derselben angegriffen worden wären, ebensowenig erlitt Kreidepulver in der gleichen Zeit irgend welche Veränderung. Dagegen zieht die concentrirte Lösung an der Luft ziemlich begierig Wasser an und wird daher zweckmässig in gut verschlossenen Gefässen aufbewahrt.

Ihre Hauptanwendung dürfte die Lösung in der specifischen Gewichtsbestimmung von Mineralien, sowie in deren Trennung finden; die wichtigsten derselben, welche im Gegensatz zu den anderen augenblicklich im Gebrauch stehenden schweren Flüssigkeiten durch dieselbe noch in den Kreis der Behandlung bei gewöhnlicher Temperatur gezogen werden, sind etwa folgende:

Axinit,
Cyanit z. Th.,
Epidot,
die schwereren Glimmer,
einige Granate,
fast alle Hornblenden,
Jade,
Olivin,
Orthit, excl. Allanit,
Ottrelith,
fast sämmtliche Glieder der Pyroxengruppe,
Saussurit,
einige Spinelle,
Staurolith z. Th.,
die meisten Titanite,
Topas und Pyknit,
die schwereren Turmaline,
Vesuvian,
Zoisit.
Unter den Gesteinen namentlich die Basalte.

Für mineralogische und petrographische Zwecke ist es natürlich nothwendig, dass die Lösung auf eine bestimmte Dichtigkeit eingestellt werden kann; dabei ist auf folgendes Rücksicht zu nehmen. Beim Vermischen mit Wasser bei

---

mann meinen besten Dank auszusprechen für das stets hülfsbereite Interesse, welches derselbe meiner Arbeit zuwendete, und seine mir namentlich beim optischen Theile derselben geleistete thätige Hülfe.

gewöhnlicher Temperatur scheidet die Lösung Krystalle von rothem Quecksilberjodid aus, die kalt nicht wieder gelöst werden, die Einstellung muss daher durch langsamen Zusatz einer verdünnteren Lösung geschehen, welche letztere man sich herstellt, indem man zu der fast bis zum Sieden erhitzten Lösung unter Umrühren tropfenweise Wasser zusetzt, oder besser, indem man in einem Glase über die concentrirte Lösung vorsichtig eine Schicht Wasser bringt, worauf in einigen Stunden die Vermischung durch Diffusion ohne Ausscheidung vor sich geht.

Die leichte Zersetzbarkeit der Lösung durch Wasser macht es nothwendig, dass man das Gesteinspulver stets vollkommen trocken in dieselbe eintrage, sowie, dass man beim Auswaschen desselben nach der Trennung zuerst einige Tropfen Jodkaliumlösung anwende, welche etwa ausfallendes Jodquecksilber in Lösung bringt. Ueberhaupt wird es zweckmässig sein, die leichteren (eisenfreien) Gemengtheile eines Gesteines von den schwereren und unter sich zunächst mittelst Thoulet'scher Lösung zu trennen (etwa bis $G = 2{,}9$) und dann erst die schwereren einer Behandlung mit der Bariumquecksilberjodidlösung, und zwar möglichst in geschlossenen Apparaten (z. B. dem Thoulet'schen oder Harada'schen[1]) zu unterziehen, da in offenen Gefässen die Lösung Wasser aus der Luft anzieht. Man vermeidet damit die Herstellung sehr verdünnter Bariumquecksilberjodidlösungen, die immer einige Schwierigkeiten bietet, und erspart das weite Eindampfen, bei welchem stets etwas Quecksilberjodid weggeht, welches dann, um die höchsten Dichtigkeiten wieder zu erreichen, wieder zugefügt werden muss.

Ich werde die Versuche mit dieser Lösung fortsetzen und eventuell gelegentlich darauf zurückkommen. Hoffentlich bewährt sich dieselbe in den Händen anderer als ein brauchbares Hülfsmittel physikalischer und petrographischer Forschung.

Leipzig, 11. Juli 1883.

1) Vgl. K. Oebbeke, 1. Beilageband z. Neuen Jahrb. für Min. 1881. p. 455.

XIV. *Ueber die Rechtschreibung einiger aus dem Arabischen stammenden Ausdrücke der Vermessungskunde*[1]; *von K. Zöppritz.*

(Aus der Zeitschr. für Vermessungskunde 1883, Bd. 12, mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Zur Beförderung einer gleichförmigen und etymologisch richtigen Rechtschreibung scheint es mir zweckmässig, folgende Mittheilungen zu machen, deren drei erste ich vorzugsweise dem Arabisten, Hrn. Oberbibliothekar Dr. Rödiger verdanke.

Azimut ist das arabische *as-samt*, die Gegend oder der Punkt des Horizontes, sowie auch der vom Scheitelpunkt nach ihm gezogene Kreis.

Zenit ist dasselbe Wort ohne den Artikel, heisst aber vollständig *samt-ar-râs*, die Gegend des Kopfes, d. h. der Scheitelpunkt am Himmel. Das *h* am Ende, welches den beiden Worten vielfach zugefügt wird, entstammt wahrscheinlich dem Französischen und sollte andeuten, dass das *t* auch wirklich gehört werden muss. D'Abbadie jedoch, der selbst ein gründlicher Kenner der orientalischen Sprachen ist, schreibt in seiner Géodésie d'Éthiopie beide Worte stets ohne *h*. Im Deutschen vollends ist gar kein Grund vorhanden, diesen Buchstaben zuzusetzen. Er ist offenbar nur beibehalten worden, um den beiden Wörtern ein exotischeres Aussehen zu verleihen.

Alidade. Ueber dieses vielumstrittene Wort findet sich Folgendes in Dozy und Engelmann, Glossaire des mots espagnols et portugais dérivés de l'Arabe; Leyde 1869:

Alidada (*alhidada* dans les Libros de Astronomia d'Alphonse X, passim, chez Victor); *alhadida* (règle mobile dans l'astrolabe) est en arabe *al-'idâda.* Les lexiques ne donnent à ce mot que les ens de „postis januae" mais dans un traité arabe sur la construction de l'astrolabe (man. 193a, fol. 3) je l'ai trouvé dans sa signification technique, car on lit que c'est une espèce de „*mastara*" ou règle.

Hiernach kann also kein Zweifel mehr bestehen, dass *Alidade* zu schreiben ist, denn der arabische Kehllaut *'ain*, der oben durch den Apostroph ' ausgedrückt ist, pflegt im Deutschen gewöhnlich ganz weggelassen und nur ganz ausnahmsweise durch *h* wiedergegeben zu werden. Die Versuche einer Ableitung des Wortes von *hadâ* führen, leiten, beruhen demnach auf einer irrigen Voraussetzung.

---

1) Vgl. hierzu Zeitschr. f. Verm. 1880, p. 55, und 1883, p. 119.

Theodolit. Ueber dieses Wort finden sich in einem früheren Jahrgange dieser Annalen[1]) neben verschiedenen Proben etymologischer Equilibristik eine Reihe interessanter historischer Notizen bezüglich seines ersten Auftauchens. Diese Angaben fasst Weigand in seinem Deutschen Wörterbuch (2. Aufl. 1876) nach einer etwas misslungenen begrifflichen Erklärung des Wortes folgendermassen zusammen: „Instrument und Namen kommen zuerst im 16. Jahrhundert vor, und zwar in England, wo Leonard Digges in seinem von seinem Sohne Thomas Digges beendigten Werke „geometrical practice named Pantometria“ (London 1571 in 4°, neue Aufl. 1591) Cap. 27 von „the composition of the instrument called *Theodelitus*“ handelt und William Bourne in seinem Buche „treasure for travailers“ (1578) dasselbe Instrument, nämlich einen getheilten Kreis mit einem drehbaren Durchmesser, versehen mit Sehspalten (Dioptern) und horizontal gestellt, anfangs *alydeday*, dann aber mit Versetzung der Buchstaben stets *athelida* nennt, als wenn er jene mit lateinischer Endung versehene Benennung *theodelitus* oder engl. *theodelite* gar nicht kennte. Aber jene *athelida* und *alydeday*, welches letztere englisch geformt ist, gingen hervor aus dem geläufigen französischen *alidade*, ursprünglicher *alhidade* (nun folgt die bisher gebräuchliche Ableitung von *hadâ* führen). Ob nun jenes *theodelitus, theodelite* sich vielleicht mit Verschmelzung des vorgesetzten Artikels *the* bildete, ähnlich wie anscheinend das engl. *tother* der, die, das andere, aus *the other* entstanden ist? Denn gr. *θεᾶσθαι* = sehen, schauen, scheint im Anfange des Wortes nicht zu stecken, dessen ungeregelte Bildung zweifellos ist. Die Franzosen scheinen es in *théodolite* ungeformt zu haben, woher dann das Wort bei den Deutschen, welche *Theodolit*, latinisirt *theodolitus*, erst sehr spät gebrauchten, zumal da es weder 1716 bei Christian Wolff mathemat. Lex., noch bei Joh. Tobias Mayer in seinem 1777 erschienenen ausführlichen Unterricht zur praktischen Geometrie vorkommt.“ Die glückliche Vermuthung, dass das Wort durch Verschmelzung mit dem englischen Artikel entstanden sei, hat der treffliche, leider schon vor mehreren Jahren verstorbene Germanist mir mündlich noch mit viel mehr Sicherheit und Nachdruck ausgesprochen, als in seinem Wörterbuche, sodass an deren Richtigkeit kaum zu zweifeln ist. — Es sei noch hinzuzufügen gestattet, dass der Genitiv des Wortes *Theodolits* lautet und nicht etwa *Theodoliten*, wie man noch hier und da liest.

1) Poggendorff, Pogg. Ann. **133.** p. 192, 349. 1868.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 10.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XX.

I. *Ueber Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen;*

von L. Sohncke und A. Wangerin.

Als Anhang zu unseren „neuen Untersuchungen über die Newton'schen Ringe"[1]) hatten wir die Theorie der Interferenzerscheinungen eines keilförmigen Blättchens mit kleinem Winkel im reflectirten Lichte kurz entwickelt und waren dabei zu Ergebnissen gelangt, die mit den schon früher von Hrn. W. Feussner[2]) gewonnenen theoretischen Ergebnissen nicht übereinstimmten. Da wir aber den Gegenstand nur nebenbei berührten, und besonders, da Hr. Feussner für seine Ergebnisse damals noch keine Messungen beigebracht hatte, so gingen wir auf die experimentelle Bestätigung unserer theoretischen Folgerungen nicht ein. Erst als Hr. Feussner einige Messungen veröffentlichte[3]), durch welche seine Theorie völlig bestätigt zu sein schien, und daraus Veranlassung nahm, unsere Theorie der Newton'schen Ringe als unhaltbar hinzustellen, entschlossen wir uns, diesem Gegenstande ein eingehenderes Studium sowohl von experimenteller als von theoretischer Seite zu widmen. Die Resultate dieser Untersuchung, von der, wie früher, Sohncke den experimentellen, Wangerin den theoretischen Theil übernahm, wollen wir im Folgenden mittheilen. Obgleich die Reflexion an einem Keil die einfachste Art der Hervorrufung von Interferenzstreifen zu sein scheint, so gestalteten sich die Erscheinungen doch, je nach den besonderen Ver-

1) L. Sohncke u. A. Wangerin, Wied. Ann. 12. p. 1—40 und p. 201—249. 1881.

2) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1880. Nr. 1. p. 1—22.

3) Feussner, l. c. Nr. 1 p. 1—24, März 1881; auch Wied. Ann. 14. p. 545—571. 1881.

suchsanordnungen, mannichfaltiger, als wir erwartet hatten. Nichtsdestoweniger glauben wir, die verschiedenen Erscheinungen in ihren Grundzügen richtig deuten zu können.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Entwickelung der Theorie der Interferenzerscheinungen dünner Blättchen. Durch eine neue Fundamentalbetrachtung ist es uns gelungen, die Theorie ohne die früher zu Grunde gelegte, nicht ganz selbstverständliche Hypothese der übereinstimmenden Wegdifferenz der beiden Hauptstrahlenpaare zu entwickeln. Die früher in Bezug auf die Newton'schen Ringe abgeleiteten, (übrigens auch durch die Erfahrung bestätigten) Resultate dürften nunmehr einwurfsfrei begründet sein. Wir erörtern hierbei zugleich, weshalb wir die gegen einzelne Resultate unserer Arbeit von Hrn. Feussner erhobenen Einwände nicht für stichhaltig ansehen können. In Bezug auf die an einem Keil im reflectirten Lichte auftretenden Interferenzerscheinungen führt die jetzige allgemeine Betrachtung ebenfalls zu den früheren Schlüssen, solange man die Mitte des Gesichtsfeldes des Beobachtungsinstrumentes ins Auge fasst. Die seitlich im Gesichtsfeld liegenden Punkte erfordern eine besondere Betrachtung, da diejenigen Strahlen, die hier die Interferenzerscheinung hervorbringen, andere Richtungen haben, als die für die Mitte des Gesichtsfeldes massgebenden Strahlen. Hierbei ergibt sich, dass die von Hrn. Feussner für die Drehung der Streifen aufgestellte Formel unter gewissen Umständen zutrifft, dass jedoch diese Drehung mit der Frage nach dem Orte der grössten Deutlichkeit der Interferenzstreifen nichts zu thun hat, auch nicht durch den Durchgang der Strahlen durch eine Linse veranlasst wird.

Die in Rede stehenden Untersuchungen waren im Auszug schon der physikalischen Gesellschaft zu Berlin mitgetheilt.[1]) Hier sollen dieselben ausführlicher entwickelt, namentlich aber auch die Fernrohrbeobachtungen über die Richtung der Interferenzstreifen vollständig mitgetheilt werden. Diejenigen von diesen Beobachtungen, die bereits in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft mitgetheilt

1) L. Sokncke u. A. Wangerin, Verhandl. der phys. Ges. in Berlin, 1882. Nr. 1, p. 12—17, Nr. 4, p. 10—15.

waren, hat Hr. Feussner durch den Umstand zu erklären versucht[1]), dass dieselben unter Anwendung einer punktförmigen Lichtquelle angestellt seien. Diese Erklärung und die daraus abgeleitete Formel ergibt sich als nicht zutreffend.

Zum Schlusse beschäftigen wir uns mit den Ergebnissen mikroskopischer Beobachtungen der Interferenzstreifen bei einer speciellen Lage des keilförmigen Blättchens. Diese Erscheinungen folgen nicht unmittelbar aus der oben erwähnten Theorie, lassen sich aber mit Rücksicht auf die veränderte Versuchsanordnung durch dieselben Grundbetrachtungen erklären.

I. Theoretischer Theil.

§ 1. Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Interferenzerscheinungen dünner Blättchen; Anwendung auf die Newton'schen Ringe und die Streifen eines keilförmigen Blättchens.

Hinsichtlich der Theorie der Interferenzstreifen halten wir vor allem daran fest, dass die Betrachtung des Durchganges der Strahlen durch eine Linse überflüssig ist und eine unnöthige Complication herbeiführt. Solange man nur Glieder von der ersten Ordnung der Linsenöffnung beibehält, ergibt die Linse durchaus keine neuen Gangunterschiede; Zwei Strahlen haben vielmehr bei ihrer Vereinigung hinter der Linse dieselbe Wegdifferenz, die sie vor der Linse hatten. Die Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung aber genügt völlig, da einerseits die interferirenden Strahlen nur sehr kleine Winkel miteinander bilden, andererseits von jedem Beobachtungsinstrument verlangt wird, dass es von einem anvisirten Punkte ein deutliches Bild liefert, dass also die Wirkung der sphärischen Aberration möglichst beseitigt ist. Uebrigens halten wir auch die Modificationen, die durch Benutzung der Glieder höherer Ordnung sich etwa ergeben könnten, für verschwindend klein; und bis jetzt weist noch keine Beobachtung darauf hin, dass es nöthig ist, jene Glieder in Rechnung zu ziehen. Jedenfalls hängt das Wesentliche der Erscheinung von den Gliedern erster Ordnung der Linsenöffnung ab; und da die Linse, sofern nur die Glieder

1) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1882. Nr. 1.

erster Ordnung in Frage kommen, die Wegunterschiede der interferirenden Strahlen nicht ändert, so muss sich die Theorie auch unabhängig von der Beobachtungslinse entwickeln lassen. Dieser Gedankengang veranlasste uns, obwohl die erste Feussner'sche Arbeit über die Interferenzstreifen an einem Keil[1]) schon vorlag, die Theorie der Newton'schen Ringe auf einer anderen Grundlage zu entwickeln als der von Hrn. Feussner in jener Arbeit benutzten. Bei der Entwickelung der Theorie muss man aber zwei Punkte auseinander halten. Es ist zu unterscheiden, ob es sich um die Betrachtung eines in der Mitte des Gesichtsfeldes liegenden Punktes handelt oder eines seitwärts gelegenen. Bei unseren Untersuchungen über Newton'sche Ringe waren alle Beobachtungen so angestellt, dass das Beobachtungsmikroskop successive auf verschiedene Punkte eingestellt und jedesmal der centrale Punkt des Gesichtsfeldes allein ins Auge gefasst wurde. Nur für diese Art der Betrachtung gilt die von uns aufgestellte Theorie der Newton'schen Ringe; dieselbe Betrachtungsart soll auch in diesem Paragraphen noch beibehalten, im folgenden sollen die für ein weiteres Gesichtsfeld eintretenden Modificationen untersucht werden. Unserer früheren Theorie lag nun eine Hypothese zu Grunde, die aber keineswegs willkürlich war, wie Hr. Feussner meint[2]), sondern sich aus der Natur der Sache ergab. Bei den gewöhnlichen Darstellungen von Interferenzerscheinungen wird von allen Strahlen, die ein Punkt ins Auge entsendet, ein einziges interferirendes Paar betrachtet, und zwar dasjenige Paar, dessen einer Strahl mit der Sehaxe zusammenfällt, weil sich um diese Axe alle Strahlen symmetrisch gruppiren. Solange man zwei interferirende Strahlen als zusammenfallend ansehen kann, ist das eine naturgemässe Hülfsvorstellung. Berücksichtigt man aber den kleinen Winkel, den zwei interferirende Strahlen miteinander bilden, so gelangen längs der Sehaxe zweierlei Strahlen ins Auge, die aber nicht miteinander interferiren,

1) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1880. p. 1—22.

2) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1881. Nr. 1. p. 3. Wied. 14. p. 548. 1881.

ein von der Oberfläche, ein aus dem Inneren des Blättchens reflectirter Strahl (wenn von wiederholten Reflexionen im Inneren abgesehen wird). Die wirkenden Strahlen gruppiren sich sowohl um den einen der genannten Strahlen symmetrisch, als auch um den anderen. Es lag daher nahe, wenn man über die gewöhnliche Theorie hinausgehen wollte, zunächst diese beiden Strahlen und die mit ihnen interferirenden ins Auge zu fassen. Das haben wir in unserer Theorie gethan; wir haben die in Rede stehenden vier Strahlen als zwei Hauptpaare bezeichnet und nun die Hypothese gemacht, die Interferenz sei dann am deutlichsten, wenn die beiden Hauptpaare genau in gleicher Weise wirken. Von dieser hypothetischen Grundlage wollen wir nunmehr absehen und die Theorie ohne dieselbe, aber auch ohne Berücksichtigung der Beobachtungslinse entwickeln.

Die Interferenzerscheinung entstehe an einem irgend wie gestalteten dünnen Blättchen dadurch, dass Lichtstrahlen theils an der Oberfläche des Blättchens, theils im Inneren desselben reflectirt sind. Wir betrachten einen beliebig im Raume gelegenen Punkt P und fassen zunächst zwei solche durch P gehende Strahlen ins Auge, die miteinander interferiren. Von diesen ist der eine an der Oberfläche, der andere im Inneren des Blättchens reflectirt, während beide von demselben Punkte der Lichtquelle ausgegangen sind. Beide Strahlen mögen in P die Wegdifferenz $\varDelta$ besitzen. Durch das Zusammenwirken beider entsteht in P eine Intensität, deren Ausdruck von der Form ist:

$$(1) \qquad M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{\varDelta}{\lambda}2\pi\right).$$

[Entstände die Interferenzerscheinung im durchgelassenen statt im reflectirten Lichte, so würde nur das letzte Glied von (1) das Zeichen + statt des Zeichens − haben.] Durch P geht nun aber nicht nur ein einziges derartiges Paar interferirender Strahlen, sondern bei nicht punktförmiger Lichtquelle unzählig viele Paare. Es fragt sich, welches ist die resultirende Intensität in P unter Wirkung aller dieser Paare? Um dies zu untersuchen, verbinden wir P mit allen Randpunkten der Oeffnung des Auges oder des

Beobachtungsinstrumentes. Der durch diese Verbindungslinien entstehende Kegel enthält (bei genügend breiter Lichtquelle) alle wirksamen Strahlen. Er schneide aus einer um P mit dem Radius eins beschriebenen Kugelfläche eine kleine Fläche F aus. Durch jeden Punkt von F geht dann ein an der Oberfläche des Blättchens reflectirter Strahl, der mit seinem zugehörigen, aus dem Inneren kommenden, einen Intensitätsausdruck von der obigen Form gibt. Um jeden Punkt von F denken wir uns ein Flächenelement dF. Alle durch dF gehenden Strahlen wirken in gleicher Weise. Daher wird die von diesem dF herrührende Intensität sowohl der Grösse des Elementes, als dem obigen Ausdruck (1) proportional sein, wenn man darin für Δ denjenigen Werth setzt, der einem durch einen Punkt des Elementes gehenden Strahle zugehört. Also die von dF herrührende Intensität ist:

$$m\left\{M^2+N^2-2MN\cos\left(\frac{\Delta}{\lambda}2\pi\right)\right\}dF,$$

wo m ein constanter Factor ist, der als Maass der Strahlendichtigkeit angesehen werden kann. Die Gesammtintensität im Punkte P ist daher:

$$(2)\qquad I=m\iint\left\{M^2+N^2-2MN\cos\left(\frac{\Delta}{\lambda}2\pi\right)\right\}dF,$$

die Integration über die ganze Fläche F ausgedehnt.

Anmerkung. Die Fläche F wird auf der um P beschriebenen Kugelfläche bestimmt durch den Theil der wirksamen Strahlen, der nur von der Oberfläche des Blättchens reflectirt ist. Da jeder dieser Strahlen mit dem zugehörigen interferirenden einen kleinen Winkel bildet, so ergeben die sämmtlichen zu den erstgenannten zugehörigen Strahlen auf jener Kugel eine von F wenig abweichende Fläche F_1. Der Unterschied zwischen den Flächen F und F_1 ist aber bei dünnen Blättchen eine Grösse höherer Ordnung. Es genügt also, beide Flächen als zusammenfallend anzusehen.

Um das Integral (2) weiter zu behandeln, werde vorausgesetzt, der Punkt P liege auf der Axe des Beobachtungsinstrumentes, und diese Axe treffe die Kugel in O. Dann ist der oben genannte Kegel ein Rotationskegel, und die Fläche F ist eine Kugelkalotte mit O als sphärischem

Mittelpunkt. Einen beliebigen Punkt der Fläche F bestimmen wir durch Kugelcoordinaten φ, ψ, deren Pol O ist. Der sphärische Radius der Fläche F sei φ_1, es sei also φ_1 der Winkel, unter dem der Radius der Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes von P aus erscheint. Wir nehmen φ_1 als so klein an, dass nur die ersten Potenzen dieser Grösse zu berücksichtigen sind. Dann wird das Flächenelement:

$$dF = \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \varphi\, d\varphi\, d\psi, \quad \text{und daher:}$$

$$(2_a) \quad I = m\int_0^{\varphi_1}\int_0^{2\pi}\left\{M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{\Delta}{\lambda}2\pi\right)\right\}\varphi\, d\varphi\, d\psi.$$

M und N können wir bei Ausführung der Integration als constant ansehen. Denn M und N hängen zunächst von der Intensität ab, die die von verschiedenen Punkten der Lichtquelle ausgehenden Strahlen von vorn herein hatten. Sind diese Intensitäten auch nicht völlig gleich, so werden sie für benachbarte Punkte doch wenig verschieden sein. Man denke dann M und N nach Potenzen von φ entwickelt und vernachlässige unter dem Integral φ^2 gegen φ, so bleibt nur das constante Glied. Der Umstand ferner, dass die verschiedenen Strahlen an der Oberfläche sowohl, als auch im Inneren unter verschiedenem Winkel reflectirt werden, bewirkt ebenfalls, dass M und N von φ abhängen. Die Entwickelung nach Potenzen von φ und die obige Vernachlässigung gestatten, auch von dieser Abhängigkeit abzusehen.

Man denke nun Δ nach Potenzen von φ entwickelt und φ^2 vernachlässigt, so erhält man, wie aus dem Nachfolgenden erhellen wird, einen Ausdruck von der Form:

$$(3) \qquad \Delta = A + B\varphi\cos\psi + C\varphi\sin\psi.$$

Also wird die Intensität:

$$(4) \left\{\begin{aligned} & I = \pi\varphi_1^2 m\Big\{M^2 + N^2 \\ & - \frac{2MN}{\pi\varphi_1^2}\int_0^{\varphi_1}\int_0^{2\pi}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(A + B\varphi\cos\psi + C\varphi\sin\psi)\right].\,\varphi\, d\varphi\, d\psi\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Das obige Integral lässt sich auf Bessel'sche Functionen zurückführen. Setzt man:

$$\frac{C}{B} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{so folgt:}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(A+B\varphi\cos\psi+C\varphi\sin\psi)\right]d\psi$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\cdot\int_0^{2\pi}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{B^2+C^2}\,.\,\varphi\cos(\psi-\alpha)\right]d\psi$$

$$-\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\cdot\int_0^{2\pi}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{B^2+C^2}\,\varphi\cos(\psi-\alpha)\right]d\psi$$

$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\cdot\int_0^{\pi}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{B^2+C^2}\,\varphi\cos\psi\right]d\psi.$$

Nun ist die Bessel'sche Function $J_0(u)$ durch die Gleichung definirt:

$$J_0(u)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(u\cos\psi)\,d\psi.$$

Demnach wird die Intensität:

$$I=\pi\varphi_1^2 m\left\{M^2+N^2-\frac{4MN}{\varphi_1^2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\int_0^{\varphi_1}J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{B^2+C^2}\,\varphi\right)\cdot\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$=\pi\varphi_1^2\,m\left\{M^2+N^2-\frac{4MN\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)}{\varphi_1^2(B^2+C^2)}\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\int_0^{\varphi_1\sqrt{B^2+C^2}\frac{2\pi}{\lambda}}J_0(u)\,.\,u\,.\,du\right\},$$

wobei: $$u=\varphi\sqrt{B^2+C^2}\,\frac{2\pi}{\lambda}$$

als Integrationsvariable eingeführt ist. Die Bessel'sche Function J_0 genügt aber der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2J_0(u)}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dJ_0(u)}{du}+J_0(u)=0.$$

Demnach ist:

$$\int J_0(u)\,.\,u\,du=-\int\frac{d\left[u\frac{dJ_0(u)}{du}\right]}{du}=-u\frac{dJ_0(u)}{du}+\text{Const.};$$

ferner ist: $$-\frac{dJ_0(u)}{du}=J_1(u),$$

wo J_1 die Bessel'sche Function mit dem Index 1 ist. Somit wird:

$$\int_0^{\varphi_1 \sqrt{B^2+C^2}\frac{2\pi}{\lambda}} J_0(u)\,u\,du = +\frac{2\pi}{\lambda}\varphi_1\sqrt{B^2+C^2}\,J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\varphi_1\sqrt{B^2+C^2}\right), \text{ und:}$$

$$(5) \quad I = \pi\varphi_1{}^2 m\left\{M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\cdot\frac{2J_1(u_1)}{u_1}\right\},$$

wobei noch zur Abkürzung:

$$(5_a) \quad u_1 = \varphi_1\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{B^2+C^2} \quad \text{gesetzt ist.}$$

Da für $u_1 = 0$ der Ausdruck $2J_1(u_1)/u_1$ den Werth 1 annimmt, so geht die Formel (5) in die bekannte, bei Beschränkung auf ein Strahlenpaar gültige Formel über, falls man $\varphi_1 = 0$ setzt, während $m\varphi_1{}^2$ endlich bleibt. Sucht man unter dieser Voraussetzung die Maxima und Minima des Ausdruckes (5), so erhält man nur eine Gleichung zwischen den Coordinaten des betrachteten Punktes P; der Abstand dieses Punktes von der Oberfläche des Blättchens bleibt dann völlig unbestimmt. Ist aber φ_1 und damit u_1 von Null verschieden, so kann man A und u_1 als unabhängige Variable betrachten (beide hängen ja von den drei Coordinaten des betrachteten Punktes P ab); und sucht man nun die Maxima und Minima des Ausdruckes (5), so ergibt sich leicht:

Maxima der Intensität finden statt, wenn:

$A = (2h+1)\frac{\lambda}{2}$, und zugleich $\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$ ein Maximum ist.

Minima der Intensität ergeben sich an den Stellen, wo:

$A = h.\lambda$, und zugleich $\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$ ein Maximum ist.

Zu den Gleichungen:

$$A = (2h+1)\cdot\frac{\lambda}{2}, \text{ resp. } A = h.\lambda,$$

die sich auch für $\varphi_1 = 0$ ergeben würden, kommt hier also die Bedingung hinzu, dass:

$$\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$$

ein Maximum wird. Erst bei Erfüllung dieser Bedingung erhält man die grösstmögliche Deutlichkeit der Interferenzerscheinung.

Man kann zu dem oben angeführten Resultate auch ohne Differentiation durch folgende Ueberlegung gelangen. Sieht

man in (5) zunächst von dem Factor $2J_1(u_1)/u_1$ ab, so wird I ein Maximum für $A = \big((2h+1)\big)\lambda/2$, ein Minimum für $A = h.\lambda$. Der Unterschied zwischen der Intensität des Maximums und Minimums wächst nun, sowohl absolut genommen, als im Vergleich zur Grösse des Maximums, wenn der Ausdruck $2J_1(u_1)/u_1$ grösser wird. Dieser Unterschied also, und damit die Deutlichkeit der Interferenzerscheinung ist dann am grössten, wenn der genannte Factor am grössten ist. Um also den Ort der grössten Deutlichkeit zu bestimmen, muss man das Maximum von $2J_1(u_1)/u_1$ suchen.

Die Function:

$$\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$$

hat nun unzählig viel Maxima, die aber successiv kleiner und kleiner werden. Den absolut grössten Werth nimmt der Ausdruck an für $u_1 = 0$, nämlich den Werth 1. Das nächste Maximum liegt bei $u_1 = 8{,}4$; es ist 0,0645. Für grössere u_1 liegen die Maxima sehr nahe um 2π auseinander und werden immer kleiner und kleiner. Nennen wir die Werthe von u_1, für welche die Maxima eintreten:

$$0,\quad u_1^{(1)},\quad u_1^{(2)},\ldots\quad u_1^{(n)},\ldots,$$

so können wir schliessen: Wenn es möglich ist, dass $u_1 = 0$, also nach (5_a) $B = 0$ und $C = 0$ wird, so ist die Deutlichkeit bei weitem am grössten. Ist es dagegen nicht möglich, gleichzeitig $B = 0$ und $C = 0$ zu machen, so suche man den kleinsten Werth von $\sqrt{B^2+C^2}$; derselbe sei k. Dann untersuche man, zwischen welchen der obigen Grössen 0, $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$, .. der kleinstmögliche Werth von u_1, nämlich:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\varphi_1 k$$

liegt. Es seien dies $u_1^{(n-1)}$ und $u_1^{(n)}$. Das Argument $u_1 = (2\pi/\lambda)\varphi_1\sqrt{B^2+C^2}$ kann den Werth $u_1^{(n-1)}$ nicht annehmen, es muss also $= u_1^{(n)}$ sein, wenn:

$$\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$$

möglichst gross werden soll. Der Werth $u_1^{(n)}$ ist von $u_1^{(n-1)}$ sehr nahe um 2π unterschieden. Der Unterschied zwischen $u_1^{(n)}$ und $(2\pi/\lambda)\varphi_1 . k$ ist daher nur ein Bruchtheil von 2π, etwa

$= \eta . 2\pi$, unter η einen positiven echten Bruch verstanden. Damit die Interferenz möglichst deutlich ist, ist es also erforderlich, B und C so zu bestimmen, dass:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \varphi_1 \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \varphi_1 . k + \eta . 2\pi,$$

oder, dass:

$$\sqrt{B^2 + C^2} = k + \eta . \frac{\lambda}{\varphi_1} \tag{6}$$

wird. Am Orte der grössten Deutlichkeit wird also allerdings $\sqrt{B^2 + C^2}$ nicht seinen kleinsten Werth annehmen, aber diesem sehr nahe sein; sodass das Minimum von $B^2 + C^2$ mit einem sehr kleinen Fehler den Ort der grössten Deutlichkeit gibt. Nur wenn φ_1 klein gegen λ wäre, würde der Fehler erheblich werden. Bei den später zu besprechenden Fernrohrbeobachtungen war ungefähr $\varphi_1 = {}^{20}/_{1400} = {}^{1}/_{70}$, $\lambda = 0{,}0006$ mm, $\lambda/\varphi_1 = 0{,}04$ mm etwa. Bei den mikroskopischen Beobachtungen ist der Fehler noch geringer. Ein solcher Fehler in der Einstellung kommt praktisch nicht in Betracht.

Was die Entwickelung der Grösse Δ nach Potenzen von φ betrifft (Gl. 3), so kann darüber noch ganz allgemein Folgendes gesagt werden.

Die Phasendifferenz Δ für ein beliebiges Paar interferirender Strahlen hängt ausser von den Coordinaten des gerade betrachteten Punktes P von der Richtung eines der interferirenden Strahlen ab, und zwar des an der Oberfläche reflectirten Strahles, da die Richtung des anderen dadurch bestimmt ist. Hier kommt nur die Abhängigkeit der Grösse Δ von der Strahlenrichtung in Frage, da wir die verschiedenen durch denselben Punkt gehenden Strahlen vergleichen. Denken wir uns durch den Punkt P Parallele zu den (beliebig liegenden) rechtwinkligen Coordinatenaxen gelegt. Diese mögen die oben erwähnte, um P beschriebene Einheitskugel in x, y, z schneiden. Der in Betracht kommende Strahlenkegel schnitt aus derselben Kugel die kleine Kalotte mit dem sphärischen Mittelpunkte O aus. Nun habe die Linie PO (die Axe des Kegels und zugleich des Beobachtungsinstrumentes) die Richtungscosinus $-a$, $-b$, $+c$. Ein beliebiger anderer, von P ausgehender Strahl treffe die

Kalotte in Q; PQ habe die Richtungscosinus $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$. Ferner habe der Punkt Q, auf O als Pol bezogen, die sphärischen Coordinaten φ, ψ, $\varphi = OQ$, $\psi = \sphericalangle ZOQ$ (Fig. 1). Da $\gamma = \cos(QZ)$, $c = \cos(OZ)$, so ergibt das sphärische Dreieck OQz unmittelbar:

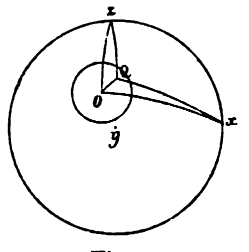


Fig. 1.

$$\gamma = c . \cos\varphi + \sqrt{1-c^2}\sin\varphi\cos\psi;$$

ferner: $$\sin(OZQ) = \frac{\sin\varphi . \sin\psi}{\sqrt{1-\gamma^2}},$$

$$\cos(OZQ) = \frac{\cos\varphi - c . \gamma}{\sqrt{1-c^2}\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

Im Dreieck OZX ist aber:

$$\cos(OZX) = \frac{\cos(OX)}{\sin(OZ)} = \frac{-a}{\sqrt{1-c^2}},$$

$$\sin(OZX) = \frac{\sqrt{1-a^2-c^2}}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Endlich ist im Dreieck QZX:

$$\cos(QX) = \sin(QZ)\cos(QZX) = \sqrt{1-\gamma^2} . \cos[OZX - OZQ] =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{1-c^2}} . \frac{\cos\varphi - c . \gamma}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \sin\varphi . \sin\psi,$$

d. h. $$\cos(QX) = -\alpha = -a\cos\varphi + \frac{ac\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{1-c^2}} + \frac{b\sin\varphi\sin\psi}{\sqrt{1-c^2}},$$

oder: $$\alpha = a\cos\varphi - \frac{ac}{\sqrt{1-c^2}}\sin\varphi\cos\psi - \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}\sin\varphi\sin\psi,$$

und daraus:

$$\beta = b\cos\varphi - \frac{bc}{\sqrt{1-c^2}}\sin\varphi\cos\psi + \frac{a}{\sqrt{1-c^2}}\sin\varphi\sin\psi.$$

Entwickelt man nach Potenzen von φ und vernachlässigt φ^2, so wird:

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = a - \varphi\cos\psi\dfrac{ac}{\sqrt{1-c^2}} - \varphi\sin\psi\dfrac{b}{\sqrt{1-c^2}} \\ \beta = b - \varphi\cos\psi\dfrac{bc}{\sqrt{1-c^2}} + \varphi\sin\psi\dfrac{a}{\sqrt{1-c^2}} \\ \gamma = c + \varphi\cos\psi\sqrt{1-c^2}, \end{cases}$$

zu welchen Formeln wir des späteren Gebrauches wegen noch die folgende fügen:

$$(7_a)\quad \left\{ \begin{array}{l} n\gamma_1 = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} = nc_1 \left\{1 + \varphi \cos\psi \frac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2 c_1^2}\right\}, \\ \text{wo} \quad nc_1 = \sqrt{n^2 - 1 + c^2}. \end{array} \right.$$

Nun ist $\varDelta$ als Function der Coordinaten des betrachteten Punktes P, sowie der Richtungscosinus α, β, γ gegeben:

$$\varDelta = f(\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma).$$

Setzt man hier die Ausdrücke (7) ein und entwickelt f nach Potenzen von φ; so gelangt man mit Vernachlässigung von φ^2 auf die zu Grunde gelegte Form (3) von $\varDelta$.

Anwendung auf die Theorie der Newton'schen Ringe. In unserer früheren Arbeit[1]) ist für die Wegdifferenz zweier beliebiger interferirender Strahlen der Ausdruck abgeleitet:

$$(8)\qquad \varDelta = \frac{\gamma}{r}\left\{\left[\xi + \frac{\alpha}{\gamma}(\zeta - \delta_1)\right]^2 + \left[\eta + \frac{\beta}{\gamma}(\zeta - \delta_1)\right]^2\right\}.$$

Darin sind ξ, η, ζ die Coordinaten des betrachteten Punktes, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Berührungspunkt der Kugel und der planparallelen Platte, und dessen $\xi\eta$-Ebene die Berührungsebene ist, während $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$ die Richtungscosinus eines der interferirenden Strahlen, r den Kugelradius bezeichnen. Ferner ist, wenn d die Dicke der planparallelen Platte, n der Brechungsquotient derselben ist:

$$(8_a)\qquad \delta_1 = d\left[1 - \frac{\gamma}{n\gamma_1}\right], \qquad n\gamma_1 = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

[In der früheren Arbeit sind noch die Glieder der nächst höheren Ordnung des Ausdruckes $\varDelta$ abgeleitet; von diesen kann hier abstrahirt werden, wie am Schluss gezeigt werden soll.]

Die Bezeichnung der einzelnen, in (8) und (8_a) vorkommenden Grössen ist genau dieselbe, wie in der früheren Arbeit. Von nun an aber haben wir zwischen dem Axenstrahl und einem beliebigen anderen der wirksamen Strahlen zu unterscheiden, eine Unterscheidung, die früher nicht nöthig war. Wir behalten daher $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$ als Bezeichnung

---

1) L. Sohncke u. A. Wangerin, Wied. Ann. 12. p. 211, (resp. 213). 1881.

der Richtungscosinus eines beliebigen Strahles bei, während die entsprechenden Grössen für die Axe $-a$, $-b$, $+c$ genannt werden sollen. Legen wir die ξ-Axe so, dass dieselbe mit der Projection der Axe des Beobachtungsinstrumentes auf die $\xi\eta$-Ebene zusammenfällt, und ist ϑ der Einfallswinkel in Luft, so wird:

$$a = \sin\vartheta, \quad b = 0, \quad c = \cos\vartheta.$$

Daher nach (7) und (7_a):

$$\alpha = \sin\vartheta - \varphi\cos\psi\cos\vartheta, \quad \beta = \varphi\sin\psi, \quad \gamma = \cos\vartheta + \varphi\cos\psi\sin\vartheta,$$

$$\gamma_1 = n\cos\vartheta_1\left[1 + \varphi\cos\psi\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\right], \text{ wobei } \sin\vartheta = n\sin\vartheta_1.$$

Die hier vorkommenden Grössen φ, ψ sind die vorher (p. 188) definirten, was wir ausdrücklich hervorheben, damit nicht eine Verwechselung mit den ebenso bezeichneten Grössen entsteht, die in unserer früheren Arbeit bei der Ableitung des Ausdruckes von Δ benutzt sind.

Ferner wird:

$$\delta_1 = d\left[1 - \frac{\cos\vartheta}{n\cos\vartheta_1} - \frac{\varphi\cos\psi\sin\vartheta\,(n^2-1)}{n^3\cos^3\vartheta_1}\right].$$

Wir setzen noch:

$$d\left[1 - \frac{\cos\vartheta}{n\cos\vartheta_1}\right] = d_1,$$

sodass d_1 der Werth ist, den δ_1 für den Axenstrahl annimmt; d_1 ist jetzt dieselbe Grösse, wie δ_1 der früheren Arbeit nach Einführung der speciellen Lage der Axen ξ, η (p. 214).

Somit wird, nach Vernachlässigung von φ^2:

$$\xi + \frac{\alpha}{\gamma}(\zeta - \delta_1) = \xi + (\zeta - d_1)\operatorname{tg}\vartheta - \frac{\zeta - d_1}{\cos^2\vartheta}\varphi\cos\psi$$
$$+ \frac{d\sin\vartheta\,(n^2-1)\operatorname{tg}\vartheta}{n^3\cos^3\vartheta_1}\varphi\cos\psi,$$

$$\eta + \frac{\beta}{\gamma}(\zeta - \delta_1) = \eta + \frac{\zeta - d_1}{\cos\vartheta}\varphi\sin\psi.$$

Führen wir nun statt des Systemes ξ, η, ζ das p. 225 der früheren Arbeit definirte System schiefwinkliger Coordinaten x, y, z ein, setzen also:

$$\xi = \xi_0 + x - z\sin\vartheta, \quad \zeta = \zeta_0 + z\cos\vartheta, \quad \eta = y,$$

wobei:

$$\xi_0 = -d(n^2-1)\operatorname{tg}^3\vartheta_1, \quad \zeta_0 = d\left[1 - \frac{1}{n}\frac{\cos^3\vartheta}{\cos^3\vartheta_1}\right]$$

ist; beachten wir ferner, dass:

$$\xi_0 + (\zeta_0 - d_1)\operatorname{tg}\vartheta = 0, \qquad \frac{\zeta_0 - d_1}{\cos\vartheta} = \frac{(n^2-1)\operatorname{tg}^2\vartheta_1}{n\cos\vartheta_1}\,d = z_1$$

wird (die Bedeutung von z_1 ist p. 227 der früheren Arbeit dargelegt), so wird:

$$\xi + \frac{\alpha}{\gamma}(\zeta - \delta_1) = x - \varphi\cos\psi\cdot\frac{z}{\cos\vartheta},$$

$$\eta + \frac{\beta}{\gamma}(\zeta - \delta_1) = y + \varphi\sin\psi(z + z_1).$$

Bis auf Glieder von der Ordnung φ^2 folgt daher aus (8):

$$(9)\quad \begin{cases} \Delta = \frac{1}{r}\left[(x^2+y^2)\cos\vartheta - 2\varphi\cos\psi\,xz + \right. \\ \left. 2\varphi\sin\psi\,y(z+z_1)\cos\vartheta + \varphi\cos\psi(x^2+y^2)\sin\vartheta\right], \end{cases}$$

sodass die in (3) allgemein mit A, B, C bezeichneten Grössen hier werden:

$$(9_a)\quad \begin{cases} A = \frac{(x^2+y^2)\cos\vartheta}{r}, \quad B = \frac{1}{r}\left[-2xz + (x^2+y^2)\sin\vartheta\right], \\ C = \frac{1}{r}\cdot 2y(z+z_1)\cos\vartheta. \end{cases}$$

Für die Minima war nun nach den obigen allgemeinen Entwickelungen erforderlich, dass:

$$A = h.\lambda, \qquad B^2 + C^2 \text{ ein Minimum}$$

werde. Die erste dieser Bedingungen gibt:

$$(10)\qquad x^2 + y^2 = \frac{h\lambda r}{\cos\vartheta}.$$

Hierdurch bleibt z völlig unbestimmt; über z ist daher so zu verfügen, dass für gegebene Werthe von x, y die zweite Bedingung erfüllt wird, dass also:

$$B\frac{\partial B}{\partial z} + C\frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

wird. Dies gibt aber:

$$(11)\qquad [(x^2+y^2)\sin\vartheta - 2xz]\,2x - 4y^2\cos^2\vartheta(z+z_1) = 0.$$

Die Gleichung (10) stimmt mit der Gleichung (III) p. 226, die Gleichung (11) mit der Gleichung (IV$_a$) p. 227 der früheren Arbeit völlig überein. Dies waren aber gerade die Gleichungen, aus denen alle früheren Schlüsse gezogen waren. Somit sind die Resultate der früheren Theorie aufs neue gerechtfertigt, und zwar durch Betrachtungen, die von der früheren hypothetischen Voraussetzung völlig unabhängig sind.

[In der früheren Theorie war die Gleichung (11) daraus abgeleitet, dass in dem Ausdruck (8) für Δ die Glieder nächster Ordnung, die hier von vornherein nicht berücksichtigt sind, verschwinden, weil nur dadurch Δ für beide Hauptpaare denselben Werth annimmt. Aus diesem Grunde, und da in jenen Gliedern höherer Ordnung doch $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ zu setzen ist, um nicht Glieder von der Ordnung φ^3 zu erhalten, war es nicht nöthig, noch weitere Glieder in dem Ausdruck (8) beizubehalten, als oben beibehalten sind.]

Dass die hier gegebene Entwickelung in ihren Resultaten mit der früheren Theorie übereinstimmt, ist kein Zufall, sondern scheint uns in der Natur der Sache zu liegen. Denn die obige Entwickelung kommt darauf hinaus, die Phasendifferenz, die von einem beliebigen der interferirenden Strahlenpaare herrührt, nach Potenzen der Abweichung von der Axe zu entwickeln und die durch eine solche Abweichung hervorgerufene Modification der Intensität möglichst gering zu machen. In der alten Theorie war dasselbe nur von zwei Paaren interferirender Strahlen gefordert, den Hauptpaaren. Die weiter gehende Forderung der neuen Theorie enthält die beschränkte Forderung der früheren Theorie in sich; dass man bei der weiter gehenden Forderung zu demselben Resultate gelangt, war allerdings nicht von vornherein zu übersehen. Das hier abgeleitete Resultat lehrt uns aber, dass die früher zu Grunde gelegte Hypothese eine berechtigte Hülfsvorstellung war. Da man, wie oben gezeigt, auf diese Hülfsvorstellung durch naturgemässe Betrachtungen geführt wird, so ist unserer Ansicht nach der von Hrn. Feussner erhobene Vorwurf, dass unsere Theorie auf ganz willkürlichen Annahmen beruhe, entkräftet.

Es sei uns hier noch gestattet, einige Worte über die Anwendung zu sagen, die Hr. Feussner von den von ihm abgeleiten Formeln auf die Theorie der Newton'schen Ringe macht. Alles, was Hr. Feussner in dieser Hinsicht beibringt, gilt nur für den ideellen Fall, wo die Dicke der planparallelen Platte, welche auf der Linse aufliegt, gleich Null ist. Nun spielt aber die Dicke dieser Platte im allgemeinen für die Interferenzorte eine wesentliche Rolle. Man kann

ferner, wenn man die Dicke der Platte von vornherein gleich Null setzt, unmöglich den wichtigen Satz beweisen, dass die Lage der Interferenzorte in der centralen Einfallsebene von der Dicke und dem Brechungsexponenten der planparallelen Platte unabhängig ist. Ohne Berücksichtigung der planparallelen Platte bleibt somit die Theorie mindestens eine unvollkommene. Aus dem von Hrn. Feussner behandelten ideellen Falle kann man auf die wirkliche Erscheinung keinen strengen Schluss machen. Aus diesem Grunde sind die von Hrn. Feussner in Betreff der Newton'schen Ringe aufgestellten Formeln [1]) unserer Ansicht nach zu verwerfen. Uebrigens war der Umstand, dass die von Hrn. Feussner entwickelten Formeln nur auf den oben genannten ideellen Fall anzuwenden waren, eine Berücksichtigung der planparallelen Platte aber nicht zuliessen, mit ein Grund, der uns bei der früheren Arbeit nöthigte, die Theorie auf einer anderen Grundlage zu entwickeln; und diese Grundlagen sind durch das Obige gerechtfertigt.

Die Bemerkung, die Hr. Feussner [2]) gegen das richtet, was wir hinsichtlich der mehrmals im Inneren der Lamelle reflectirten Strahlen beigebracht hatten, beruht wohl nur auf einem Missverständniss.

Anwendung auf die Theorie der Interferenzstreifen an einem keilförmigen Blättchen. Für die Wegdifferenz zweier interferirenden Strahlen bei einem keilförmigen Blättchen war im Anhang unserer früheren Arbeit (p. 247) die Formel angegeben:

$$\Delta = 2\varepsilon n \gamma_1 \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma}\zeta\right). \tag{12}$$

Hierin sind ξ, η, ζ die Coordinaten des betrachteten Punktes, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen η-Axe mit der Keilkante zusammenfällt, während die ξ-Axe in der Oberfläche des Keiles senkrecht zur Kante liegt, und ζ die Normale der Keilfläche ist. Ferner sind $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$ die Rich-

1) Feussner, Wied. Ann. 14. p. 561—563. 1881.
2) Feussner, l. c. 14. p. 568.

tungscosinus eines der interferirenden Strahlen, ε ist der kleine Winkel des Keiles, n der Brechungsexponent und:

$$(12_a) \qquad n\gamma_1 = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

In dem Ausdruck (12) sind die Glieder der Ordnung ε^2, die früher mit entwickelt waren, vernachlässigt, sodass die früher mit $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ bezeichneten Grössen gleich werden.

In Bezug auf die Ableitung der Formel (12), die auch in den folgenden Abschnitten die Grundlage der Entwickelung bildet, bemerken wir Folgendes.

Es werde irgend eine einfallende Welle WW betrachtet. (Fig. 2). Eine Wellennormale treffe die Oberfläche des Keiles in A, und AW habe (in der Richtung von A nach W) die Richtungscosinus α, β, γ. Der in das Blättchen hineingebrochene Strahl AB habe (in der Richtung von B nach A) die Cosinus α_1, β_1, γ_1, so ist:

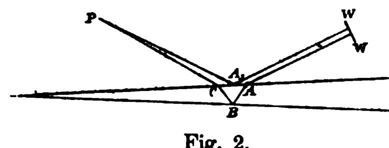


Fig. 2.

$$\alpha_1 = \frac{1}{n}\alpha, \quad \beta_1 = \frac{1}{n}\beta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

Der Strahl AB treffe die untere Keilfläche in B; der in B reflectirte Strahl BC habe (in der Richtung von B nach C) die Cosinus $-\alpha_1'$, $-\beta_1'$, γ_1'. Da die Normale der unteren Grenzfläche die Richtungscosinus $\sin\varepsilon$, 0, $\cos\varepsilon$ hat, so folgt leicht:

$$\alpha_1' = \alpha_1 \cos 2\varepsilon - \gamma_1 \sin 2\varepsilon, \quad \beta_1' = \beta_1, \quad \gamma_1' = \alpha_1 \sin 2\varepsilon + \gamma_1 \cos 2\varepsilon,$$

oder, wenn man nach Potenzen von ε entwickelt und ε^2 vernachlässigt:

$$\alpha_1' = \alpha_1 - 2\gamma_1\varepsilon, \quad \beta_1' = \beta_1, \quad \gamma_1' = \gamma_1 + 2\alpha_1\varepsilon.$$

Der in P in die Luft zurückgebrochene Strahl habe (in der Richtung von C nach P) die Cosinus $-\alpha'$, $-\beta'$, γ', so finden zwischen α', β', γ' und $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1'$ dieselben Relationen statt, die oben zwischen α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 statt hatten. Mithin wird bis auf Glieder der Ordnung ε^2:

$$\alpha' = \alpha - 2n\gamma_1\varepsilon, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma + 2n\gamma_1\frac{\alpha}{\gamma}\varepsilon.$$

Auf dem Strahle CP (oder dessen Rückverlängerung) nehme man nun den Punkt P an, dessen Coordinaten ξ, η, ζ

seien, bestimme dann denjenigen Strahl, der zu derselben einfallenden Wellenebene gehörig, wie PC, nach Reflexion an der Oberfläche des Keiles durch P geht. Er sei WA_1P. Die (auf Luft bezogene) Wegdifferenz Δ, welche diese beiden Strahlen in P besitzen, ist:

$$\Delta = PC + AW + n(BC + AB) - PA_1 - A_1W.$$

Drückt man die einzelnen hierin vorkommenden Längen durch die Coordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ des Punktes P und durch α, β, γ aus, so erhält man, unter Benutzung der obigen Ausdrücke für α', β', γ' und mit Vernachlässigung von ε^2 den Ausdruck (12).

Bei dieser Ableitung ist die einfallende Welle als eben, die Lichtquelle also als fern angenommen. Diese Näherung genügt vollständig. Eine Rechnung, die wir hier übergehen, hat uns nämlich gezeigt, dass die Berücksichtigung der Kugelgestalt der einfallenden Welle nur diejenigen Glieder von Δ beeinflusst, die von der Ordnung ε^2 sind, also nur solche Glieder, die im Folgenden bei den vorausgesetzten sehr kleinen Werthen von ε nicht in Betracht kommen.

Betrachten wir nun alle möglichen durch P gehenden Strahlen, so haben wir die Richtung eines beliebigen Strahles von der des Axenstrahles zu unterscheiden. Wie oben, behalten wir die Bezeichnung α, β, γ für einen beliebigen Strahl bei, während die analogen Grössen für die Axe mit a, b, c bezeichnet werden. Mittelst der Formeln (7) folgt dann aus (12):

$$(13)\quad \begin{cases} \Delta = 2\varepsilon n c_1 \Big[\xi + \dfrac{a}{c}\zeta + \varphi\cos\psi\,\dfrac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2 c_1^{\,2}}\left(\xi + \dfrac{a}{c}\zeta\right) \\ \qquad - \varphi\cos\psi\,\dfrac{a}{c^2\sqrt{1-c^2}}\,\zeta - \varphi\sin\psi\,\dfrac{b}{c\sqrt{1-c^2}}\,\zeta\Big]. \end{cases}$$

Setzt man nun, analog der früheren Arbeit p. 247:

$$a = \sin\vartheta\cos\mu,\quad b = \sin\vartheta\sin\mu,\quad c = \cos\vartheta,\quad \sin\vartheta_1 = \frac{1}{n}\sin\vartheta,$$

wobei ϑ den Einfallswinkel, μ das Azimuth der Einfallsebene bezeichnet; führt ferner, wie dort, statt des Coordinatensystems ξ, η, ζ ein anderes x, y, z ein, dessen x-Axe mit ξ, dessen y-Axe mit η zusammenfällt, während z der Axe des Beobachtungsinstrumentes parallel ist, so wird:

$$\xi = x - z\sin\vartheta\cos\mu,\quad \eta = y - z\sin\vartheta\sin\mu,\quad \zeta = z\cos\vartheta.$$

Dann geht der Ausdruck (13) über in:

$$(14)\quad \begin{cases} \varDelta = 2\varepsilon n \cos\vartheta_1 \Big[x + \varphi\cos\psi\Big(\dfrac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}x - \dfrac{\cos\mu}{\cos\vartheta}z\Big) \\ \qquad - \varphi\sin\psi\sin\mu\,.\,z\Big]. \end{cases}$$

Daher ist hier:

$$(14_a)\quad \begin{cases} A = 2\varepsilon n\cos\vartheta_1\,.\,x, \quad B = \dfrac{2\varepsilon n\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta}\Big[\dfrac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}x - z\cos\mu\Big], \\ C = -\dfrac{2\varepsilon n\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta}z\cos\vartheta\sin\mu. \end{cases}$$

Für die Minima ist $A = h\,.\,\lambda$, also:

$$(15)\qquad x = \frac{h\lambda}{2\varepsilon n\cos\vartheta_1};$$

ausserdem muss $B^2 + C^2$ ein Minimum sein, also, da x bestimmt ist:

$$B\frac{\partial B}{\partial z} + C\frac{\partial C}{\partial z} = 0, \qquad \text{d. h.:}$$

$$\Big\{\frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\,.\,x - z\cos\mu\Big\}\cos\mu - z\cos^2\vartheta\sin^2\mu = 0 \quad \text{oder:}$$

$$(16)\qquad z = \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta\cos\mu}{n^2\cos^2\vartheta_1(\cos^2\mu + \cos^2\vartheta\sin^2\mu)}\,.\,x\,.$$

Da, wie man leicht sieht:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\cos^2\mu + \cos^2\vartheta\sin^2\mu} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta\cos^2\mu}$$

ist, stimmen die Resultate unserer Entwickelung völlig überein mit den in der früheren Arbeit [p. 247 Formel (1_a) und (2_a)] gefundenen. Es gelten daher auch die im Anhang der früheren Arbeit mitgetheilten Folgerungen, namentlich der Satz, dass die Interferenzstreifen stets der Keilkante parallel sind.

Dies Resultat hat Hr. Feussner vor allem als unrichtig hinzustellen gesucht. Nach den obigen Entwickelungen halten wir dasselbe aufrecht, jedoch unter der Einschränkung, dass die zu Grunde liegenden Voraussetzungen erfüllt sind, dass also der betrachtete Punkt stets in der Mitte des Gesichtsfeldes liegt. Das Beobachtungsinstrument muss also successive auf die verschiedenen Punkte eines dunklen Streifens eingestellt, und jedesmal die Lage des in der Mitte des Gesichtsfeldes liegenden Punktes bestimmt werden. Die so im

Raume ermittelten Orte sind dann der Keilkante parallel und liegen in der durch die Gleichung (16) angegebenen Entfernung von der Oberfläche des Keiles. Das Resultat ist jedoch nicht mehr ohne weiteres gültig, wenn man gleichzeitig ein grösseres Gesichtsfeld ins Auge fasst, also die Lage des ganzen auf einmal im Fernrohr erscheinenden Streifens suchen will. Welche Modificationen für die letztere Art der Betrachtung hinzuzufügen sind, soll im nächsten Abschnitt untersucht werden.

Wir geben zu, in unserer früheren Arbeit beide Arten der Betrachtung nicht genügend auseinander gehalten zu haben. Wir begnügten uns mit dem obigem Resultate, weil die dort zu Grunde liegende Art der Betrachtung der bei den Newton'schen Ringen angewandten Beobachtungsmethode entsprach. Aber auch Hr. Feussner hat in seiner Polemik diese Scheidung nicht gemacht.

Anmerkung 1. Es lässt sich leicht zeigen, dass durch die Berücksichtigung der wiederholten Reflexionen im Inneren des Blättchens das obige Resultat nicht modificirt wird. Nehmen wir z. B. bei einem keilförmigen Blättchen statt des einmal an der unteren Keilfläche reflectirten Strahles den k-mal dort reflectirten, der durch P geht, und fassen wir diesen mit dem an der Oberfläche reflectirten Strahle (PA_1 der Fig. 2) zusammen, so ist die Wegdifferenz beider Strahlen [bis auf Glieder höherer Ordnung in Bezug auf ε]:

$$\varDelta_k = k \, . \, 2 \varepsilon n \gamma_1 \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma} \zeta \right) .$$

Betrachten wir die von diesem Strahlenpaar herrührende Intensität in P und gehen dann wieder zu den sämmtlichen durch P gehenden Strahlenpaaren über, indem wir k für alle festhalten, so ändert sich in den obigen Entwickelungen nichts, als dass $k \, . \, A$, $k \, . \, B$, $k \, . \, C$ an Stelle der früheren A, B, C treten. Dadurch aber werden die Resultate in keiner Weise modificirt.

Anmerkung 2. Eine einfache Rechnung zeigt, dass der Minimalwerth von $B^2 + C^2$, der für das Azimuth Null gleich Null ist, mit wachsendem Azimuth wächst, dass mithin das Maximum des Factors $2 J_1 (u_1) / u_1$ mit wachsendem Azimuth kleiner wird. Daher muss nach dem früher Ge-

sagten mit wachsendem Azimuth der Unterschied zwischen der Intensität der Maxima und Minima kleiner und damit die Interferenzerscheinung undeutlicher werden. — Aehnliches gilt für die Newton'schen Ringe, wenn man sich aus der Hauptebene seitlich entfernt.

§ 2. Einfachere Ableitung und Erweiterung einer von Hrn. Feussner aufgestellten Formel.

Um zu untersuchen, in welcher Lage die dunklen Streifen innerhalb eines grösseren Gesichtsfeldes erscheinen, ist eine Betrachtung nöthig, die bei einer sehr kleinen Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes auf die Formel führt, die Hr. Feussner für die Drehung der Streifen bei verändertem Azimuth aufgefunden hat.[1]) Wir werden jedoch diese Formel auf einfachere Weise erhalten, vor allem, ohne den Durchgang der Strahlen durch die Linse des Beobachtungsinstrumentes zu verfolgen, ja ohne die Frage nach dem Orte der grössten Deutlichkeit der Interferenz zu berühren.

Die Betrachtung knüpft unmittelbar an die Formel (12) des vorigen Abschnittes an. Während aber früher ein Punkt P der Axe des Beobachtungsinstrumentes ins Auge gefasst und alle möglichen von diesem in das Instrument gelangenden Strahlen in Rechnung gezogen wurden: sollen jetzt vorläufig nur zwei durch P gehende Strahlen, der mit der Axe zusammenfallende und der mit diesem interferirende betrachtet werden; dagegen sollen neben dem Punkte P alle diesem nahen, nicht auf der Axe gelegenen Punkte betrachtet werden und für jeden Punkt Q derjenige Strahl, der Q mit der Mitte A der Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes verbindet. Die Beschränkung auf die nach der Mitte der Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes gerichteten Strahlen kommt auf dasselbe hinaus, wie die Annahme, dass jene Oeffnung sehr klein sei.

Wie vorher, mögen mit $-a$, $-b$, $+c$ die Richtungscosinus der Axe des Beobachtungsinstrumentes, mit ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P bezeichnet werden. Die

1) Feussner, Wied. Ann. 14. p. 558, Formel 15. 1881.

Coordinaten eines dem Punkte P nahen Punktes Q seien $\xi + u$, $\eta + v$, $\zeta + w$, die Richtungscosinus des Strahles, welcher Q mit der Mitte des Auges oder des Beobachtungsinstrumentes verbindet, seien $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$. Ferner seien, wie früher:

$$n c_1 = \sqrt{n^2 - 1 + c^2}, \qquad n\gamma_1 = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}.$$

Nach Formel (12) des vorigen Abschnittes ist die Phasendifferenz der beiden durch P gehenden und dort interferirenden Strahlen in P:

$$(1) \qquad \varDelta = 2\varepsilon n c_1 \left[\xi + \frac{a}{c}\zeta\right].$$

Damit P dem Auge als Punkt eines dunklen Streifens erscheint, muss $\varDelta$ ein Vielfaches einer Wellenlänge sein, vorausgesetzt, dass die beiden interferirenden Strahlen bei ihrem Durchgang durch das Beobachtungsinstrument, resp. das Auge keine neuen Phasendifferenzen erlangen, was aber bei der Kleinheit des von den Strahlen gebildeten Winkels ausgeschlossen ist. Es ist also, unter h irgend eine ganze Zahl verstanden:

$$(2) \qquad 2\varepsilon n c_1 \left(\xi + \frac{a}{c}\zeta\right) = h \,.\, \lambda.$$

Im Punkte Q ferner haben die dort interferirenden Strahlen die Wegdifferenz:

$$(3) \qquad \varDelta_1 = 2\varepsilon n \gamma_1 \left[\xi + u + \frac{\alpha}{\gamma}(\zeta + w)\right];$$

und soll Q als Punkt eines dem ersten nahen dunklen Streifens erscheinen, so muss:

$$(4) \qquad \varDelta_1 = (h + h_1)\lambda$$

sein, wo h_1 eine kleine ganze Zahl ist. Die Werthe der Richtungscosinus α, β, γ sind nun, ausser von a, b, c und u, v, w noch von der Entfernung l des Punktes P vom Mittelpunkte A des Beobachtungsinstrumentes abhängig. Entwickelt man α, β, γ nach Potenzen von u/l, v/l, w/l und vernachlässigt die Quadrate dieser Grössen, wodurch in allen Fällen eine hinreichende Näherung erreicht wird, so ergibt sich:

$$QA = \sqrt{(al + u)^2 + (bl + v)^2 + (cl - w)^2} = l + au + bv - cw,$$

$$\alpha = \frac{al+u}{QA} = a + \frac{u}{l} - a\left(a\frac{u}{l} + b\frac{v}{l} - c\frac{w}{l}\right),$$

$$\beta = \frac{bl+v}{QA} = b + \frac{v}{l} - b\left(a\frac{u}{l} + b\frac{v}{l} - c\frac{w}{l}\right),$$

$$\gamma = \frac{cl-w}{QA} = c - \frac{w}{l} - c\left(a\frac{u}{l} + b\frac{v}{l} - c\frac{w}{l}\right),$$

$$n\gamma_1 = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} = nc_1 - \frac{c}{nc_1}\frac{w}{l} - \frac{c^2}{nc_1}\left(a\frac{u}{l} + b\frac{v}{l} - c\frac{w}{l}\right).$$

Daher wird (mit Vernachlässigung von u^2 etc.):

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \varDelta_1 = 2\varepsilon nc_1 \Big\{ & \xi + \frac{a}{c}\zeta - \frac{c}{n^2c_1^2}\left(\xi + \frac{a}{c}\zeta\right)\frac{w + c(au + bv - cw)}{l} \\ & + \left(u + \frac{a}{c}w\right)\left(1 + \frac{\zeta}{c\,.\,l}\right)\Big\} = (h + h_1)\lambda. \end{aligned}\right.$$

Fig. 3.

Nun ist ζ/c die Entfernung des Punktes P von demjenigen Punkte K der Keiloberfläche, in dem diese von der Axe AP getroffen wird, und da $AP = l$, so ist $l + (\zeta/c) = AK$ (Fig. 3). Bezeichnen wir diese Entfernung AK mit E, setzen ferner $\xi + (a/c)\zeta = H$ (H ist der Abstand des Punktes K von der Keilkante), so ergibt sich aus (2) und (5) für die Punkte Q, die auf dem $(h+h_1)$-ten dunklen Streifen liegen, die Gleichung:

$$(6)\quad \left(u + \frac{a}{c}w\right)\frac{E}{l} - \frac{c}{n^2c_1^2}\,\frac{w + c(au + bv - cw)}{l}\,H = \text{Const.},$$

oder auch:

$$(6_a)\quad \left(u + \frac{a}{c}w\right) - \frac{c}{n^2c_1^2}\,\frac{H}{E}\left[w + c(au + bv - cw)\right] = \text{Const.}$$

Geht man nun von dem früheren Coordinatensystem ξ, η, ζ zu einem anderen rechtwinkligen System X, Y, Z über, dessen Anfangspunkt in P liegt, dessen Axe X mit der Sehaxe AP zusammenfällt, während Z senkrecht zu X und parallel zu der oberen Keilfläche ist, so wird:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} u &= -aX + \frac{ac}{\sqrt{1-c^2}}Y + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}Z, \\ v &= -bX + \frac{bc}{\sqrt{1-c^2}}Y - \frac{a}{\sqrt{1-c^2}}Z, \\ w &= cX + \sqrt{1-c^2}\,Y; \end{aligned}\right.$$

und daher geht die Gleichung (6_a) in die folgende über:

$$(8)\qquad \frac{a}{c\sqrt{1-c^2}}Y + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}Z - \frac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2c_1^2}\cdot\frac{H}{E}Y = \text{Const.}$$

Der Winkel, welchen hiernach die Streifen mit der Y-Axe bilden, ist (ausser für den Fall $b = 0$) von der Entfernung E des Auges (oder des Beobachtungsinstrumentes) von der Oberfläche des Blättchens abhängig, und für die Grösse χ dieses Winkels folgt aus (8):

$$(9)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{a}{bc} + \frac{H}{E}\frac{c(1-c^2)}{bn^2c_1^2},$$

oder, wenn man, wie im vorigen Abschnitt:

$$a = \sin\vartheta\cos\mu, \quad b = \sin\vartheta\sin\mu, \quad c = \cos\vartheta, \quad \sin\vartheta_1 = \frac{1}{n}\sin\vartheta$$

setzt:

$$(9_a)\qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{-\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta} + \frac{H}{E}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\mu\,.\,n^2\cos^2\vartheta_1}.$$

Das ist genau die von Hrn. Feussner für die Drehung der Streifen aufgestellte Formel[1]), nur dass dort die in (9_a) vorkommenden Grössen anders bezeichnet sind. Zur Ableitung dieser Formel ist es also weder nöthig, den Durchgang der Strahlen durch die Linse des Auges (oder des Beobachtungsinstrumentes) zu verfolgen, noch braucht man die sämmtlichen von einem Punkte P ausgehenden Strahlen zu betrachten. Es genügt allein die Betrachtung des durch den Mittelpunkt des Auges (oder der Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes) gehenden Strahles. Ebenso wenig ist es die Grösse oder Lage des mit der Linse verbundenen Diaphragmas, welche die eben berechnete Drehung veranlasst, deren Grund vielmehr allein in dem Richtungsunterschied der von benachbarten Punkten P und Q gleichzeitig in die Mitte des Auges gelangenden Strahlen liegt. Vor allem hat nach dieser Ableitung die Frage nach dem Orte der grössten Deutlichkeit der Interferenzerscheinung mit der Drehung der Streifen nichts zu thun. Für oder gegen die Richtigkeit einer Theorie, die den Ort der grössten Deutlichkeit der Interferenzerscheinung

1) Feussner, Wied. Ann. **14.** p. 558, Formel (15). 1881.

aus dem Zusammenwirken aller durch einen Punkt gehenden Strahlen bestimmen will, kann die Drehung der Streifen nichts beweisen. Die von Hrn. Feussner angestellten Beobachtungen, die die obige Formel bestätigen, sind daher keineswegs geeignet, die im ersten Paragraphen entwickelten Resultate zu widerlegen.

Nachdem wir durch die obige Ableitung die wahre Bedeutung der Feussner'schen Formel ermittelt, entsteht die Frage, wie sich die Sache verhält, wenn man die Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes nicht mehr als verschwindend klein betrachten kann. Eine einfache Ueberlegung führt darauf, dass bei sehr breiter Lichtquelle die obige Formel auch dann noch gelten muss. Behalten wir die im Anfang dieses Paragraphen erläuterte Bezeichnung bei und fügen nur hinzu, dass *FF* die Oeffnung der Beobachtungslinse bedeuten soll, deren Mittelpunkt *A* ist. Alle von dem Punkte *P* (auf den das Beobachtungsinstrument eingestellt ist) in das Instrument gelangenden Strahlen geben nach den Entwickelungen des ersten Paragraphen durch ihr Zusammenwirken einen Intensitätsausdruck von der Form:

$$M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\cdot\frac{2J_1(u_1)}{u_1},$$

wo:

$$u_1 = \varphi_1\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{B^2+C^2}$$

ist. Die Bedeutung der Buchstaben A, B, C ist in den Gleichungen (14_a) des vorigen Paragraphen angegeben, während φ_1 die Grösse der halben Oeffnung *FF* ist. Abgesehen von dem Factor $2J_1(u_1)/u_1$ ist der Ausdruck derselbe, den man auch erhalten würde, wenn man allein den Axenstrahl *PA* und den mit ihm interferirenden betrachtet hätte. Die zu dem Axenstrahl hinzukommenden Strahlen bestimmen (wegen der Bedingung, dass:

$$\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$$

ein Maximum werden soll) die Einstellung gerade auf den Punkt P, aber nicht die Ordnung des Streifens, die allein dadurch bedingt ist, dass:

$$A = h.\lambda,$$

die daher dieselbe ist, als wären die zu dem Axenstrahl hinzukommenden Strahlen nicht vorhanden. Ist nun der Punkt Q dem Punkte P nahe, so wird der durch Q gehende Interferenzstreifen ebenfalls am deutlichsten erscheinen, wenn der in P am deutlichsten erscheint, wenigstens wenn PQ eine kleine Grösse erster Ordnung ist, in erster Annäherung. Macht man für die im Punkte Q stattfindende Intensität dieselbe Betrachtung, durch die im ersten Abschnitt der Intensitätsausdruck für P abgeleitet ist, so ist der Axenstrahl PA, um den sich vorher alle wirksamen Strahlen symmetrisch gruppirten, nur zu ersetzen durch QA, um den sich jetzt in gleicher Weise die Strahlen symmetrisch gruppiren, wie vorher um PA. Welchen Effect aber die Ersetzung des Strahles PA durch QA hat, haben wir oben gesehen. Diese Ersetzung führte auf die Formel (9_a). Diese ganze Ueberlegung ist jedoch nur dann zutreffend, wenn die Lichtquelle so breit ist, dass die beiden Kegel, welche P, resp. Q mit der Oeffnung des Instrumentes verbinden, ganz von wirksamen Strahlen ausgefüllt werden.

Wir bemerken übrigens, dass die vollständige Durchführung der Rechnung dasselbe Resultat ergibt, sofern die Grösse $PQ/l = PQ/PA$ von der Grösse der Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes ist und nur erste Potenzen dieser Grösse noch berücksichtigt werden. Wir übergehen diese Rechnung und begnügen uns mit den vorstehenden Ueberlegungen.

Eine solche Drehung der Streifen, wie sie nach obiger Entwickelung für jede Grösse der Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes eintreten müsste, und die von Hrn. Feussner auch an einer Beobachtungsreihe bestätigt ist[1]), hat sich in keiner der von uns mit dem Fernrohr angestellten und im experimentellen Theil (§ 4) näher zu besprechenden Beobachtungsreihen bestätigt gefunden. Als wir dies Resultat in den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin[2]) mittheilten, hat Hr. Feussner dasselbe durch die

1) Feussner, Wied. Ann. 14. p. 570. 1881.

2) Sohncke u. Wangerin, Verh. d. phys. Ges. zu Berlin. Nr. 1. p. 12—17. 1882.

Annahme einer punktförmigen Lichtquelle zu erklären gesucht und eine Formel aufgestellt, wonach bei punktförmiger Lichtquelle die Drehung der Streifen nicht von der Entfernung des Beobachtungsinstrumentes, sondern von der der Lichtquelle abhängt.[1]) Diese Formel stellt indessen, wie in § 4 gezeigt wird, die Beobachtungen ebenso wenig dar, als die oben abgeleitete erste Feussner'sche Formel (Gl. 9_a). Viel besser stimmt mit allen unseren Beobachtungen die einfache Formel:

$$(9_b) \qquad \operatorname{tg} \chi = \frac{-\cos \mu}{\sin \mu \,.\, \cos \vartheta}$$

überein, welche diejenige Drehung darstellt, die auch ein aus festen parallelen Streifen bestehendes Gitter lediglich aus perspectivischen Gründen zeigen würde. Andererseits ist bei den Beobachtungen mit blossem Auge eine Drehung der Streifen bei Aenderung der Entfernung des Auges von der Platte deutlich sichtbar. Es entsteht somit die Frage: wie sind diese beiden einander widersprechenden Thatsachen zu vereinigen, einerseits das Nichteintreten der nach der Entwickelung dieses Paragraphen erwarteten Drehung bei unseren Fernrohrbeobachtungen, andererseits die deutliche Wahrnehmbarkeit der Drehung bei Beobachtungen mit blossem Auge? Den Grund dafür können wir, wie Hr. Feussner, nur in der Begrenzung der Lichtquelle erblicken. Die obige Ueberlegung, wonach die Drehung auch dann eintreten muss, wenn die Fernrohröffnung nicht als punktförmig angesehen wird, trifft nur zu, falls die Lichtquelle sehr breit ist. Das war bei den Beobachtungen nicht der Fall; und insofern hat Hr. Feussner ganz recht, dass unsere Beobachtungen gegen seine Formel nichts beweisen, da diese Formel unter einer anderen Voraussetzung abgeleitet ist. Was aber Hr. Feussner über die punktförmige Lichtquelle sagt, erschöpft die Sache in keiner Weise; das geht schon daraus hervor, dass die von ihm unter Annahme einer punktförmigen Lichtquelle abgeleitete Formel[2]) (mit unseren Zeichen geschrieben):

---

1) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1882. p. 3.

2) Feussner, l. c. p. 5. Gl. (4) 1882.

$$(9_c) \qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{-\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta} - \frac{H}{E_1}\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\mu \,.\, n^2\cos^2\vartheta_1},$$

in der E_1 den Abstand der Lichtquelle von der Blättchenmitte bedeutet, mit unseren Beobachtungen nicht übereinstimmt. Wohl aber, glauben wir, wird die folgende Darlegung erkennen lassen, welchen Einfluss eine Begrenzung der Lichtquelle ausübt, und damit wird der Grund für die in Rede stehende Abweichung zwischen der Theorie und den Beobachtungen aufgedeckt werden.

Dass die Interferenzstreifen eines keilförmigen Blättchens geradlinig erscheinen, ergibt die Theorie nur bei der angewandten Näherung. Die Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung bei den Entwickelungen am Anfang dieses Paragraphen würde auch eine Abweichung der Streifen von der geraden Linie ergeben. In allen vorliegenden Beobachtungen ist diese Abweichung so gering, dass man von ihr abstrahiren kann. Um nun die Richtung der geradlinigen Streifen zu bestimmen, genügt es, zwei Punkte eines jeden Streifens zu fixiren. Als solche wählen wir die äussersten sichtbaren Punkte eines jeden Streifens. Es sei wieder P derjenige Punkt der Axe, auf den das Beobachtungsinstrument eingestellt ist, Q sei ein solcher Punkt in der Nähe von P, der mit P auf demselben Streifen liegt, FF repräsentirt die Oeffnung des Fernrohres, A den Mittelpunkt. Wir denken uns ferner die Lichtquelle begrenzt durch eine kreisförmige Oeffnung LL, deren Ebene senkrecht zu dem mittleren einfallenden Strahle liegt; das Spiegelbild von LL (in Bezug auf die Oberfläche der Lamelle), nämlich L_1L_1, bilde einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Axe AP liegt, und dessen Ebene senkrecht zu AP ist. (Fig. 4.) Der gerade Kegel, welcher P mit dem Rande von L_1L_1 verbindet, enthält alle durch P hindurchgehenden Strahlen. Der zugehörige Scheitelkegel schneidet die Ebene der Fernrohröffnung FF in einem zu FF concentrischen Kreise L_2L_2, dessen Radius bei allen hier in Frage kommenden Beobachtungen grösser war als der von FF. [Dieser Umstand allein ist hinreichend, zu zeigen, weshalb die Annahme einer punktförmigen Lichtquelle zur Erklärung nichts nützt. Wäre

übrigens der Radius von $L_2 L_2$ kleiner als der von FF, so würde in den theoretischen Betrachtungen des ersten Abschnittes nur der Oeffnungswinkel von FF durch den von $L_2 L_2$ zu ersetzen sein, was das schliessliche Resultat in keiner Weise ändern würde.]

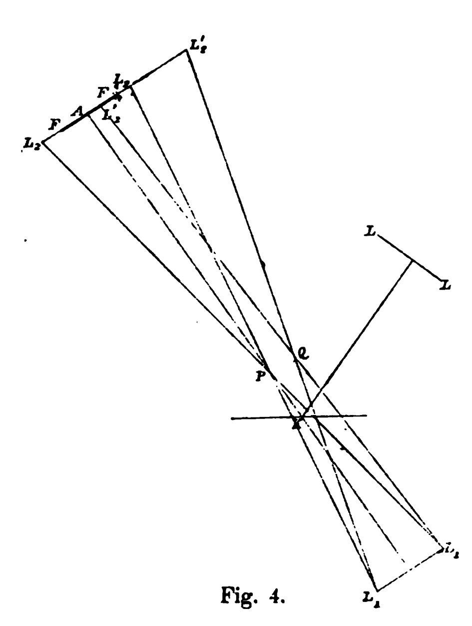


Fig. 4.

Durch den Punkt Q, der mit P auf demselben Interferenzstreifen liegt, gehen alle Strahlen, die in dem schiefen Kegel enthalten sind, der Q mit $L_1 L_1$ verbindet. Letzterer schneidet die Ebene der Oeffnung FF in einem Kreise $L_2' L_2'$, der mit FF nicht mehr concentrisch ist. Für solche Punkte Q, die in der Nähe von P liegen, wird der Kreis FF noch ganz innerhalb des Kreises $L_2' L_2'$ liegen. Ist aber Q weiter von P entfernt, so werden beide Kreise sich schneiden. Für die Intensität in solchen Punkten Q kommen nur diejenigen Strahlen in Betracht, die Q mit Punkten des gemeinsamen Stückes beider Kreise verbinden. Dass die Wirkung aller dieser Strahlen nicht durch QA (und den mit QA interferirenden Strahl) ersetzt werden kann, leuchtet unmittelbar ein, da QA gar nicht zu den wirksamen Strahlen zu gehören braucht. Entfernt sich der Punkt Q noch weiter von P, so werden schliesslich die beiden Kreise FF und $L_2' L_2'$ keinen Punkt mehr gemein haben. Einen derartigen Punkt Q sieht man aber nicht mehr im Fernrohr, da keiner der von der Lichtquelle nach Q gesandten Strahlen in die Fernrohröffnung FF gelangt. Der äusserste sichtbare Punkt Q eines Streifens hat eine solche

Lage, dass der zugehörige Kreis $L_2'L_2'$ den Kreis FF von aussen berührt.

Ist B der Berührungspunkt, so ist QB der einzige an der Oberfläche der Lamelle reflectirte Strahl, der von dem bezeichneten Punkte Q in das Fernrohr gelangt. Für die verschiedenen Punkte desselben Streifens verhält sich also die Sache folgendermassen: Die in dem Axenpunkte P stattfindende Intensität ist (bis auf einen oben bestimmten Factor) dieselbe, als wenn wir nur den Strahl PA (A Mittelpunkt von FF) und den mit diesem interferirenden betrachteten. Die in dem äussersten Punkte Q stattfindende Intensität ist dagegen in Wirklichkeit nur durch den einen Strahl QB und den zugehörigen interferirenden bestimmt. Da P und Q auf demselben Streifen liegen, so muss die Wegdifferenz zwischen PA und dem zugehörigen interferirenden Strahl dieselbe sein wie die zwischen QB und dem zugehörigen interferirenden. Bestimmt man Q dieser Bedingung gemäss, so hat man zwei Punkte eines Streifens und damit die Richtung desselben. Man erkennt schon ohne Rechnung, dass sich jetzt eine andere Richtung ergeben muss, als nach den obigen Betrachtungen, die auf die Formel (9_a) führten. Denn statt der Strahlen PA und QB kam dort die Richtung der Strahlen PA und QA in Betracht. Nur für eine verschwindend kleine Oeffnung kommen beide Betrachtungen auf dasselbe hinaus. Bei einer sehr breiten Lichtquelle hingegen wird für alle in Betracht zu ziehenden Punkte Q der Kreis FF stets ganz innerhalb $L_2'L_2'$ liegen, und aus diesem Grunde überall PA und QA für die Richtung der Streifen in Betracht kommen. Für eine begrenzte Lichtquelle wird somit die Richtung der Streifen eine andere sein, als für eine sehr breite; und damit wird die Abweichung unserer Beobachtungen von der Formel (9_a) erklärt.

Ehe wir das Gesagte weiter entwickeln, bemerken wir, dass, wenn auch der äusserste Punkt Q, von dem nur noch ein Strahlenpaar ins Fernrohr gelangt, nicht mehr sichtbar ist, durch die obige Betrachtung doch eine ideelle Grenze bestimmt ist, der sich die wirklichen Verhältnisse möglichst nähern. Wir haben ferner vorausgesetzt, dass die Licht-

quelle durch einen Kreis begrenzt ist, dessen Ebene senkrecht steht zum mittleren Strahl. Bei einer anderen Gestalt oder Lage der Begrenzung würde die Betrachtung zu modificiren sein. Wäre z. B. die Ebene des Kreises nicht senkrecht zum mittleren Strahl, so würde an Stelle des Kreises $L_2' L_2'$ eine Ellipse treten etc. Derartige Annahmen würden aber nur unwesentliche Modificationen des im Folgenden abzuleitenden Resultates herbeiführen. Unserer Ansicht nach führt die obige Voraussetzung, auch wenn sie den factischen Verhältnissen nicht genau entspricht, zu einer genügenden Annäherung.

An die eben besprochenen Betrachtungen knüpfen sich nun folgende Entwickelungen, bei denen ausser den oben erwähnten noch die folgenden Bezeichnungen vorkommen. Den Schnittpunkt der Axe AP des Beobachtungsinstrumentes mit der oberen Keilfläche bezeichnen wir mit K, die Entfernung KA des Beobachtungsinstrumentes von K mit E, den Radius der Oeffnung des Instrumentes mit ϱ, die Entfernung PK mit z. Der Kreis $L_1 L_1$ (ebenso wie der LL) habe den Radius ϱ_1, sein Mittelpunkt habe von K die Entfernung E_1.

Wir legen zunächst der Betrachtung ein Coordinatensystem XYZ zu Grunde, dessen Anfangspunkt K, dessen positive X-Axe KA sei, während die Axen Y und Z senkrecht zu KA liegen, die Z-Axe in der Keilfläche. In diesem Coordinatensystem hat P die Coordinaten z, 0, 0; ein dem Punkte P naher Punkt Q die Coordinaten $z + U$, V, W; ein am Rande der Lichtöffnung $L_1 L_1$ beliebig gelegener Punkt die Coordinaten $-E_1$, $\varrho_1 \cos\psi$, $\varrho_1 \sin\psi$. Die Verbindungslinie des Punktes Q mit diesem Randpunkte schneidet die Ebene FF $(X = E)$ in dem Punkte:

$$Y = V + \frac{E - z - U}{E_1 + z + U}\,[V - \varrho_1 \cos\psi],$$

$$Z = W + \frac{E - z - U}{E_1 + z + U}\,(W - \varrho_1 \sin\psi).$$

Die Verbindungslinien des Punktes Q mit sämmtlichen Randpunkten $L_1 L_1$ bilden einen Kegel, dessen Schnitt mit der Ebene von FF man erhält, indem man aus den letzten Gleichungen ψ eliminirt. Dies gibt den Kreis:

(10) $$\{Y - Y_0\}^2 + (Z - Z_0)^2 = \varrho_0^2,$$ wobei:

$$(10_a)\quad \begin{cases} Y_0 = V\dfrac{E+E_1}{E_1+z+U}, \qquad Z_0 = W\dfrac{E+E_1}{E_1+z+U}, \\ \varrho_0 = \dfrac{E-z-U}{E_1+z+U}\cdot\varrho_1 \end{cases}$$

ist. Die Oeffnung des Beobachtungsinstrumentes bildet in derselben Ebene den Kreis:

$$(11)\qquad Y^2 + Z^2 = \varrho^2.$$

Damit beide Kreise sich von aussen berühren, muss:

$$\sqrt{Y_0^2 + Z_0^2} = \varrho + \varrho_0$$

sein, woraus nach (10_a) weiter folgt:

$$(12)\qquad \sqrt{V^2 + W^2} = \frac{\varrho\,[E_1 + z + U] + \varrho_1\,[E - z - U]}{E + E_1} = M;$$

und der Berührungspunkt B beider Kreise hat die Coordinaten:

$$(12_a)\qquad X = E; \qquad Y = \frac{V\varrho}{M}, \qquad Z = \frac{W.\varrho}{M}.$$

Gehen wir nun vom System X, Y, Z zurück zum ursprünglichen Coordinatensystem ξ, η, ζ, dessen η-Axe mit der Keilkante zusammenfiel, und hat in diesem Coordinatensystem die Axe KA, wie früher, die Richtungscosinus $-a$, $-b$, $+c$, während H die Entfernung des Punktes K von der Keilkante ist, so sind die Coordinaten ξ_2, η_2, ζ_2 des Berührungspunktes B in diesem System (vgl. Gl. (7) dieses Paragraphen):

$$(13)\quad \begin{cases} \xi_2 = H - aE + \dfrac{ac}{\sqrt{1-c^2}}\dfrac{\varrho}{M}\,V + \dfrac{b}{\sqrt{1-c^2}}\dfrac{\varrho}{M}\,W, \\ \eta_2 = -\,bE + \dfrac{bc}{\sqrt{1-c^2}}\dfrac{\varrho}{M}\,V - \dfrac{a}{\sqrt{1-c^2}}\dfrac{\varrho}{M}\,W, \\ \zeta_2 = cE + \sqrt{1-c^2}\dfrac{\varrho}{M}\,V; \end{cases}$$

während die Coordinaten von Q selbst sind:

$$(13_a)\quad \begin{cases} \xi_1 = H - a\,(z + U) + \dfrac{ac}{\sqrt{1-c^2}}\,V + \dfrac{b}{\sqrt{1-c^2}}\,W, \\ \eta_1 = -\,b\,(z + U) + \dfrac{bc}{\sqrt{1-c^2}}\,V - \dfrac{a}{\sqrt{1-c^2}}\,W, \\ \zeta_1 = c\,(z + U) + \sqrt{1-c^2}\,V. \end{cases}$$

Die Richtungscosinus des Strahles QB seien $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$, so ist:

$$+\alpha : +\beta : +\gamma = \xi_1 - \xi_2 : \eta_1 - \eta_2 : \zeta_2 - \zeta_1.$$

Ist nun die Entfernung des Punktes P vom Beobachtungsinstrument $AP = E - z$ gross gegen U, V, W, sodass die Quadrate von $U/E-z$ etc. vernachlässigt werden können, so ergibt sich:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma &= c - \sqrt{1-c^2}\,\frac{V}{E-z}\left(1-\frac{\varrho}{M}\right),\\ \frac{\alpha}{\gamma} &= \frac{a}{c} + \frac{a}{c^2\sqrt{1-c^2}}\,\frac{V}{E-z}\left(1-\frac{\varrho}{M}\right) + \frac{b}{c\sqrt{1-c^2}}\,\frac{W}{E-z}\left(1-\frac{\varrho}{M}\right),\\ n\gamma_1 &= \sqrt{n^2-1+\gamma^2} = nc_1\left\{1 - \frac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2c_1^2}\,\frac{V}{E-z}\left(1-\frac{\varrho}{M}\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Die Wegdifferenz des Strahles QB gegen den mit ihm interferirenden ist aber nach Formel (12) des ersten Paragraphen:

$$\Delta_1 = 2\varepsilon n\gamma_1\left\{\xi_1 + \frac{\alpha}{\gamma}\zeta_1\right\},$$

d. i. mit Vernachlässigung der Quadrate von:

$$\frac{V}{E-z},\quad \frac{V}{H}\ \text{etc.}$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_1 = 2\varepsilon n c_1\Big\{H + &\left[\frac{a}{c\sqrt{1-c^2}}\,\frac{V}{E-z} + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}\,\frac{W}{E-z}\right]\left[E - z\frac{\varrho}{M}\right]\\ &- \frac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2c_1^2}\,H\,\frac{V}{E-z}\left(1-\frac{\varrho}{M}\right)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Für den Punkt P in der Mitte des Gesichtsfeldes ist der Axenstrahl massgebend; die Wegdifferenz desselben gegen den mit ihm interferirenden ist, da dort $U=0$, $V=0$, $W=0$:

$$(15_a)\qquad \Delta = 2\varepsilon n c_1 H.$$

Soll nun der Punkt Q, für den in (15) Δ_1 bestimmt ist, mit P auf demselben Streifen liegen, so muss:

$$\left[\frac{a}{c\sqrt{1-c^2}}V + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}W\right]\left[E - z\cdot\frac{\varrho}{M}\right] - \frac{c\cdot\sqrt{1-c^2}}{n^2c_1^2}HV\left(1-\frac{\varrho}{M}\right) = 0$$

sein, oder:

$$(16)\qquad \frac{W}{V} = -\frac{a}{b\cdot c} + \frac{c(1-c^2)}{n^2c_1^2\cdot b}\cdot\frac{H}{E}\cdot\frac{1-\frac{\varrho}{M}}{1-\frac{z}{E}\cdot\frac{\varrho}{M}}.$$

Denkt man den Punkt Q auf eine durch P senkrecht zur Axe AP gelegte Ebene projicirt und verbindet die Pro-

jection mit P, so bildet diese Verbindungslinie mit der Axe Y einen Winkel χ:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{W}{V};$$

und die Richtung dieser Verbindungslinie ist zugleich die Richtung des in Rede stehenden Streifens; für die Streifenrichtung gilt demnach, wenn noch, wie früher:

$$a = \sin\vartheta\cos\mu, \qquad b = \sin\vartheta\sin\mu, \qquad c = \cos\vartheta$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$(17)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta} + \frac{\sin\vartheta.\cos\vartheta}{\sin\mu.n^2\cos^2\vartheta_1}.\frac{H}{E}.\frac{E(M-\varrho)}{EM-z.\varrho}.$$

Diese Formel stimmt nun mit der Gl. (9_a) dieses Abschnittes völlig überein, nur dass hier das zweite Glied der rechten Seite noch den Factor:

$$(17_a)\qquad \frac{E(M-\varrho)}{EM-z.\varrho}$$

hat. Setzen wir für M seinen Werth (Gl. 12) und vernachlässigen das sehr kleine U gegen E, so wird jener Factor:

$$(17_b)\qquad \frac{E(\varrho_1-\varrho)}{E\varrho_1+E_1\varrho};$$

die Richtung der Streifen ist also:

$$(18)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\cos\mu}{\sin\mu.\cos\vartheta} + \frac{\sin\vartheta.\cos\vartheta}{\sin\mu.n^2\cos^2\vartheta_1}\frac{H(\varrho_1-\varrho)}{E\varrho_1+E_1\varrho}.$$

Für $\varrho_1 = \infty$ (sehr breite Lichtquelle) wird der Factor (17_b) $= 1$, und man hat genau die Feussner'sche Formel (9_a). Dasselbe findet auch für $\varrho = 0$ statt, also für sehr kleine Oeffnungen des Beobachtungsinstrumentes. Für $\varrho_1 = 0$ andererseits geht (18) in die zweite Feussner'sche Formel über, die für eine punktförmige Lichtquelle gilt.[1] (Gl. (9_c) p. 205.)

Durch die Formel (18) ist zum ersten mal für diejenige Näherung, bei der die Streifen überhaupt noch geradlinig erscheinen, die Begrenzung der Lichtquelle in Rechnung gezogen. Die Formel unterscheidet sich von der ersten Feussner'schen Formel (9_a), welche bei Anwendung einer sehr breiten Lichtquelle gilt, nur dadurch, dass das zweite Glied der rechten Seite mit dem Factor (17_b) versehen ist, dessen

1) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1882. p. 5.

Zahlenwerth bei unseren Beobachtungen etwa $^1/_4$ bis $^1/_5$ betrug (vgl. § 4).

Nach dieser Untersuchung hat somit Hr. Feussner Recht, wenn er die Abweichung unserer Beobachtungen von seiner Formel darauf zurückführt, dass nicht eine genügend breite Lichtquelle angewandt sei. Wir haben aber hier ein über das Feussner'sche hinausgehendes Resultat erlangt, eine Formel zur Berechnung des numerischen Einflusses der Begrenzung der Lichtquelle.

Bei der bisherigen Betrachtung haben wir nur den durch den Punkt P (die Mitte des Gesichtsfeldes) gehenden Streifen betrachtet und seine Richtung bestimmt aus den für den Punkt P selbst und den einen sichtbaren Endpunkt des Streifens geltenden Bedingungen. Der andere sichtbare Endpunkt desselben Streifens ist durch die Bedingung bestimmt, dass der Mittelpunkt des die Oeffnung FF berührenden Kreises $Y_0\,Z_0$, demnach auch der Berührungspunkt B und der entsprechende Punkt Q dieselben absoluten Werthe der Coordinaten Y, Z, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzt. Dieser zweite Endpunkt, mit P zusammen betrachtet, würde daher dieselbe Streifenrichtung geben.

Auch die dem bisher betrachteten sehr nahe liegenden Streifen ergeben sich bei unserer Näherung als dem ersteren parallel. Ist h die Ordnungszahl des durch P gehenden Streifens, $h + h_1$ die eines nahen Streifens, also h eine grosse, h_1 eine kleine ganze Zahl, so ist:

$$(19) \qquad \Delta_1 = (h + h_1)\,\lambda, \qquad \Delta = h\,.\,\lambda;$$

oder mit Rücksicht auf (15) und (15$_a$):

$$(20)\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{a}{c\sqrt{1-c^2}}\,V + \frac{b}{\sqrt{1-c^2}}\,W\right]\left[E - z\,\frac{\varrho}{M}\right] - \frac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2 c_1^{\,2}}\,H\,V\left(1 - \frac{\varrho}{M}\right)\\ &\qquad = \frac{h_1}{h}\,H(E - z),\end{aligned}\right.$$

welche Gleichung abgekürzt folgendermassen geschrieben werden möge:

$$(20_a) \qquad W = W^{(0)} + V.\operatorname{tg}\psi.$$

Diese Gleichung zusammen mit der Gleichung (12):

$$(21) \qquad V^2 + W^2 = M^2$$

bestimmt die Coordinaten V, W der beiden äussersten Punkte des in Rede stehenden $(h+h_1)$-ten Streifens.

Es seien nun $V_1\, W_1$, $V_2\, W_2$ die beiden Lösungen des Systemes (20_a) und (21), so haben die beiden äussersten Punkte des $(h+h_1)$-ten Streifens, bezogen auf das p. 208 angewandte System X, Y, Z, die Coordinaten $z+U_1$, V_1, W_1; $z+U_2$, V_2, W_2. Projicirt man diese beiden äussersten Punkte auf eine durch P senkrecht zur Axe AP gelegte Ebene, so haben die Projectionen in Bezug auf P die relativen Coordinaten $V_1\, W_1$, $V_2\, W_2$. Die Verbindungslinie der letztgenannten beiden Punkte bildet nun mit der durch P zur Axe Y gelegten Parallelen den Winkel χ, wo:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{W_1 - W_2}{V_1 - V_2}.$$

Aus (20_a) und (21) folgt aber:

$$\frac{W_1 - W_2}{V_1 - V_2} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \text{also:} \qquad \operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\psi,$$

und für $\operatorname{tg}\psi$ ergibt sich aus (20) genau der Werth (17). Sehen wir also als Richtung irgend eines Streifens die Verbindungslinie seiner äussersten sichtbaren Punkte an, diese Verbindungslinie projicirt auf eine zur Axe des Beobachtungsinstrumentes senkrechte Ebene, so ist die Richtung des Streifens durch die Gleichung (17) oder (18) dargestellt.

§ 3. Die Interferenzfläche für ein keilförmiges Blättchen.

Zur Bestätigung der Theorie wurde neben der Richtung der Streifen im Fernrohr noch die Lage derselben im Raume bestimmt, d. h. der Ort, auf den man einstellen musste, um die Streifen möglichst deutlich zu sehen; endlich wurde auch für das Azimuth Null die Neigung der Interferenzfläche durch mikroskopische Beobachtungen gemessen. So haben wir in unserer früheren Arbeit die Fläche genannt, die alle Punkte enthält, auf welche das Mikroskop bei deutlicher Sichtbarkeit der Interferenzerscheinung einzustellen ist. Für dies Azimuth sollte nach den Entwickelungen des § 1, wenn z die Entfernung des Mikroskopes von der Keilfläche (in der Richtung der Mikroskopaxe gerechnet), H die Entfernung des Schnittpunktes der Mikroskopaxe mit der Keilfläche von der Keilkante bezeichnet:

$$\frac{z}{H} = \frac{\sin\vartheta \, . \cos^2\vartheta}{n^2 \cos^2\vartheta_1}$$

sein (vgl. § 1, Formel 6, darin $\mu = 0$, $x = H$ gesetzt). Diese Formel stimmte nun mit den Beobachtungen zwar überein, soweit es die Lage des mittleren Streifens im Raume betraf. Dagegen zeigte die beobachtete Interferenzfläche eine ganz andere Neigung, als die Formel erforderte. Entsprechen z_1, H_1; z_2, H_2 zwei verschiedenen Einstellungen des Mikroskopes, so müsste nach obiger Formel:

$$\frac{z_1 - z_2}{H_1 - H_2} = \frac{\sin\vartheta \, . \cos^2\vartheta}{n^2 \cos^2\vartheta_1}$$

sein, während sich für das letztere Verhältniss aus den Beobachtungen ein viel grösserer Werth ergab, meist sechs- bis achtmal so gross. Diese Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung, die um so überraschender war, da bei den Newton'schen Ringen die auf denselben Principien beruhende Theorie in so befriedigender Weise mit den Beobachtungen übereinstimmte, entzog sich lange dem Verständniss. Schliesslich gelang es, dieselbe auf Grundlage folgender Ueberlegung zu erklären.

Die im § 1 entwickelte Theorie setzt voraus, dass bei jeder Lage des Beobachtungsinstrumentes die Oeffnung desselben von wirksamen Strahlen ganz ausgefüllt wird, oder vielmehr, dass die wirksamen Strahlen sich bei jeder Lage des Beobachtungsinstrumentes symmetrisch um die Axe gruppiren. Eine genauere Discussion der weiter unten zu beschreibenden Versuchsanordnung ergab nun, dass jene Voraussetzung bei den mikroskopischen Beobachtungen nicht mehr zutraf, dass vielmehr, wenn man denjenigen Punkt P der Mikroskopaxe, auf den das Instrument eingestellt ist, ins Auge fasst, die von P ausgehenden Strahlen nur einen Theil der Mikroskopöffnung ausfüllten, und zwar andere und andere Theile bei Verschiebung des Mikroskopes, also bei Einstellung auf andere und andere Punkte P. Infolge dessen ist die directe Anwendung der Formeln des § 1 unzulässig. Eine geringe Modification der Theorie dagegen, die auf die eben erwähnten Umstände Rücksicht nimmt, führt zu neuen Formeln, welche mit den meisten, die Neigung der Interferenzfläche betreffenden Beobachtungen übereinstimmen.

Zur Ableitung der neuen Formeln fassen wir einen Punkt P ins Auge, der auf der Mikroskopaxe liegt, und auf den das Instrument eingestellt ist. Die Richtungen der von P in das Instrument gelangenden Strahlen sind nun beschränkt, erstens dadurch, dass die Lichtquelle kreisförmig begrenzt ist, zweitens dadurch, dass die Oberfläche des Keiles bedeckt und nur ein kleines kreisförmiges Stück frei ist. Auf beide Umstände ist, abgesehen von der Mikroskopöffnung, Rücksicht zu nehmen. Der unbedeckte Theil der Oberfläche des Blättchens bildet (Fig. 5) einen Kreis $K_1 K_1$ mit dem Mittelpunkte K und dem Radius ϱ; K habe von der Keilkante die Entfernung H. Die directe Begrenzung der Lichtquelle besteht in einem Kreise, dessen Spiegelbild (in Bezug auf die obere Keilfläche) $L_1 L_1$ senkrecht zur Mikroskopaxe ist.

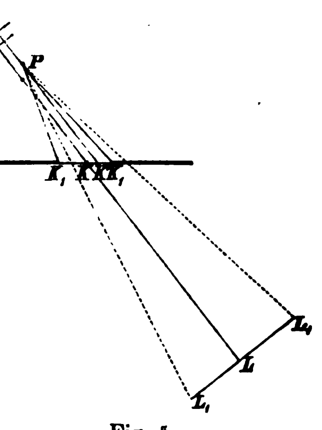


Fig. 5.

Wir nehmen an, dass, wenn das Mikroskop so aufgestellt ist, dass seine Axe verlängert durch K geht, die verlängerte Axe auf den Mittelpunkt L von $L_1 L_1$ trifft, eine Annahme, die durch die Versuchsanordnung sehr nahe erfüllt war. Der Radius des Kreises $L_1 L_1$ sei ϱ_1, sein Mittelpunkt L habe von K die Entfernung E_1. Die erwähnte Stellung des Mikroskopes, bei der die verlängerte Axe die Kreismittelpunkte K und L trifft, nennen wir die mittlere Stellung desselben, denjenigen Streifen, der bei dieser Stellung des Mikroskopes in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, den mittleren Streifen. Aus der mittleren Stellung sei nun das Mikroskop sich selbst parallel verschoben, und in der neuen Stellung treffe die Axe den Punkt K' der Keilfläche; die horizontale Verschiebung KK', die senkrecht zur Keilkante ist, da sich die Beobachtungen auf das Azimuth Null beziehen, sei $= x$; sie ist negativ zu nehmen nach der Keilkante hin, positiv in ent-

gegengesetzter Richtung. In der zweiten Stellung sei ferner P derjenige Punkt der Mikroskopaxe, auf den das Instrument eingestellt ist, und es sei die Entfernung $PK' = z$.

Da Strahlen nur von dem Kreise $L_1 L_1$ (eigentlich von dem Spiegelbilde desselben nach Reflexion an der Keilfläche) ausgehen, da ferner nur solche Strahlen, die die Keilfläche innerhalb des Kreises $K_1 K_1$ treffen, nach P gelangen können, und da endlich nur diejenigen Strahlen wirksam sind, die von P in die Oeffnung des Mikroskops gelangen, so haben wir drei Kegel zu betrachten, 1) denjenigen, der durch Verbindung des Punktes P mit allen Punkten des Kreises $L_1 L_1$ entsteht, 2) denjenigen, der P mit den Punkten von $K_1 K_1$, 3) denjenigen, der P mit der Mikroskopöffnung verbindet. Von dem letzteren zeigt sich nun bei der Discussion der Beobachtungen (cf. § 6), dass er stets die Scheitelkegel der beiden ersten umschliesst. Somit wird nur ein Theil des dritten Kegels von wirksamen Strahlen ausgefüllt; er kommt als Grenze der Strahlen nicht in Betracht. In Bezug auf die Lage der beiden anderen Kegel aber sind noch folgende Fälle möglich: I) Der zuerst genannte Kegel liegt ganz innerhalb des zweiten, so begrenzt er allein alle wirksamen Strahlen; der zweite Kegel kommt gar nicht in Betracht. Dies tritt bei kleinem ϱ_1 oder bei grossen E_1 ein, z. B. bei allen in § 2 besprochenen Fernrohrbeobachtungen; deshalb war auch in § 2 von dem Kreise $K_1 K_1$ keine Rede. II) Wenn dagegen ϱ_1 sehr gross oder E_1 sehr klein ist, so liegt umgekehrt der zweite Kegel innerhalb des ersten, der zweite allein kommt als Grenze der wirksamen Strahlen in Betracht. Dieser Fall trat bei einigen der mikroskopischen Beobachtungen ein. III) Es kann endlich der Fall eintreten, dass beide Kegel einander schneiden. Dann kommen nur die Strahlen, die innerhalb des gemeinsamen Stückes der beiden liegen, für die Interferenzerscheinung in Betracht. Dies war bei der Mehrzahl der mikroskopischen Beobachtungen der Fall.

Wie modificiren sich nun die in § 1 entwickelten Resultate, wenn man die eben auseinander gesetzte, von der früheren abweichende Begrenzung der wirksamen Strahlen berücksichtigt? Denken wir uns wieder mit dem Radius Eins um P

eine Kugel beschrieben, die von der Mikroskopaxe in O getroffen wird, so war bei den Entwickelungen des § 1 ein gewisses Doppelintegral zu berechnen, und zwar war über die Fläche einer kleinen Kugelkappe zu integriren, die aus der Kugel durch den dritten der vorerwähnten Kegel ausgeschnitten wurde, und die den Punkt O zum sphärischen Mittelpunkte hatte. Diese Kugelkappe war jedoch stets so klein, dass die Sinus der von O ausgehenden Bogen durch die Bogen selbst ersetzt werden konnten, was darauf hinauskommt, dass statt über die Fläche der Kugelkappe über die Fläche eines ebenen kleinen Kreises integrirt wird, und zwar ist dieser Kreis, welcher die Kugelkappe ersetzt, der Schnitt des dritten der obigen Kegel mit einer Ebene E, die senkrecht zur Mikroskopaxe in der Entfernung Eins von P gelegt ist. Der Mittelpunkt O dieses Kreises ist der Schnitt von E mit der Mikroskopaxe. Da nach dem oben Gesagten an Stelle des dritten Kegels jetzt der erste oder zweite oder das gemeinsame Stück beider tritt, so muss auch an Stelle des Kreises mit dem Mittelpunkte O der Schnitt der Ebene E mit dem ersten oder zweiten der oben definirten Kegel treten, oder auch das gemeinsame Stück beider Schnitte.

Zur Berechnung dieser Schnitte legen wir unserer Betrachtung zunächst das Coordinatensystem $\xi\eta\zeta$ zu Grunde, dessen Anfangspunkt in der Keilkante liegt (cf. § 1 und 2). Dann hat K die Coordinaten H, 0, 0; ein Punkt des Kreisumfanges K_1K_1 hat die Coordinaten $H+\varrho\cos\psi$, $\varrho\sin\psi$, 0, während die von K' sind $H+x$, 0, 0; die von P:

$$H+x-z\sin\vartheta\,,\quad 0\,,\quad z\cos\vartheta\,;$$

die von L, dem Mittelpunkte des Kreises L_1L_1:

$$H+E_1\sin\vartheta\,,\quad 0\,,\quad -E_1\cos\vartheta\,;$$

endlich die eines beliebigen Punktes des Kreisumfanges L_1L_1:

$$H+E_1\sin\vartheta+\varrho_1\cos\psi_1\cos\vartheta,\qquad \varrho_1\sin\psi_1,$$
$$-E_1\cos\vartheta+\varrho_1\cos\psi_1\sin\vartheta.$$

Dabei ist, wie früher, ϑ der Neigungswinkel der Mikroskopaxe gegen die Normale der Keilfläche.

Gehen wir zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem $\xi'\eta'\zeta'$ über, dessen Anfangspunkt in P liegt und dessen

Axe ζ' mit der Mikroskopaxe zusammenfällt (PK' die negative ζ'-Axe), während η' der η-Axe parallel ist, so hat in dem neuen System ein Punkt in der Peripherie des Kreises $L_1 L_1$ die Coordinaten:

$$-x\cos\vartheta + \varrho_1 \cos\psi_1, \quad \varrho_1 \sin\psi_1, \quad -(E_1 + z) + x\sin\vartheta;$$

ein Punkt in der Peripherie von $K_1 K_1$ dagegen hat die Coordinaten:

$$-x\cos\vartheta + \varrho\cos\psi\cos\vartheta, \quad \varrho\sin\psi, \quad -z + x\sin\vartheta - \varrho\cos\psi\sin\vartheta.$$

Daraus folgt die Gleichung des ersten Kegels, der P mit $L_1 L_1$ verbindet:

$$(1) \quad \varrho_1^2\zeta'^2 = \{\xi'(E_1 + z - x\sin\vartheta) - \zeta' x\cos\vartheta\}^2 + \eta'^2(E_1 + z - x\sin\vartheta)^2,$$

während der zweite Kegel, der P mit den Punkten des Kreises $K_1 K_1$ verbindet, die Gleichung hat:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \varrho^2(\xi'\sin\vartheta + \zeta'\cos\vartheta)^2 &= \{\xi'(z - x\sin\vartheta) - \zeta' x\cos\vartheta\}^2 \\ &\quad + \eta'^2 z^2\cos^2\vartheta. \end{aligned} \right.$$

Der Schnitt des ersten Kegels mit der Ebene $\zeta' = 1$ (denn das ist die oben mit E bezeichnete Ebene) ist der Kreis:

$$(1_a) \quad \frac{\varrho_1^2}{(E_1 + z - x\sin\vartheta)^2} = \left(\xi' - \frac{x\cos\vartheta}{E_1 + z - x\sin\vartheta}\right)^2 + \eta'^2,$$

während der zweite Kegel von derselben Ebene $\zeta' = 1$ in der Ellipse:

$$(2_a) \quad \varrho^2(\xi'\sin\vartheta + \cos\vartheta)^2 = \{\xi'(z - x\sin\vartheta) - x\cos\vartheta\}^2 + \eta'^2 z^2\cos^2\vartheta$$

geschnitten wird.

Beachtet man, dass x und ϱ bei den hier in Frage kommenden Interferenzerscheinungen kleine Grössen gegen z, also erst recht gegen $E_1 + z$ sind, dass ebenso ϱ_1 klein ist gegen $E_1 + z$, so kann man die Quadrate von x/z etc. vernachlässigen, und die beiden Gleichungen (1_a) und (2_a) nehmen nun folgende einfachere Gestalt an. Der Kreis (1_a) wird:

$$(1_b) \quad \left(\xi' - \frac{x\cos\vartheta}{E_1 + z}\right)^2 + \eta'^2 = \left(\frac{\varrho_1}{E_1 + z}\right)^2,$$

die Ellipse (2_a) wird:

$$(2_b) \quad \left(\xi' - \frac{x\cos\vartheta}{z}\right)^2 + \eta'^2\cos^2\vartheta = \left(\frac{\varrho}{z}\right)^2\cos^2\vartheta.$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man leicht die gegenseitige Lage der beiden Curven, die stets die Axe ξ' zur Symmetrieaxe haben.

I) Wenn $\varrho_1/(E_1 + z)$ kleiner als $\varrho \cos\vartheta/z$ und zunächst $x = 0$ ist, so liegt der Kreis (1_b) ganz innerhalb der Ellipse (2_b). Dasselbe findet auch noch für kleine Werthe von x statt.

II) Wenn $\varrho_1/(E_1 + z)$ grösser als ϱ/z ist, so liegt für $x = 0$ und ebenso für kleine Werthe von x die Ellipse ganz innerhalb des Kreises.

III) Es kann aber auch der Fall eintreten, dass beide Curven sich schneiden, und zwar:

a) in zwei Punkten, b) in vier Punkten.

(Je zwei Schnittpunkte liegen natürlich symmetrisch zur Axe ξ').

Bei den meisten der mikroskopischen Beobachtungen trat nun der Fall (III_a) ein; denn dort war $\varrho_1/(E_1 + z)$ nahe gleich $\varrho \cos\vartheta/z$, während $x \cos\vartheta/(E_1 + z)$ viel kleiner als $x \cos\vartheta/z$ war. Der Kreis schnitt daher für positive Werthe von x die Axe ξ' in zwei Punkten A_1, A_2, die zu beiden Seiten des Anfangspunktes O lagen in den Entfernungen:

$$OA_1 = \frac{\varrho_1 + x\cos\vartheta}{E_1 + z}, \qquad OA_2 = \frac{\varrho_1 - x\cos\vartheta}{E_1 + z},$$

während dieselbe Axe ξ' von der Ellipse in den Punkten B_1, B_2 geschnitten wurde, die für $x < \varrho$ ebenfalls auf verschiedenen Seiten von O lagen in den Entfernungen:

$$OB_1 = \frac{(\varrho + x)\cos\vartheta}{z}, \qquad OB_2 = \frac{(\varrho - x)\cos\vartheta}{z}.$$

Es war also, soweit die genannten Annahmen zutrafen:

$$OB_1 > OA_1, \quad OB_2 < OA_2.$$

Die beiden Curven hatten also für positive x die nebengezeichnete Lage (Fig. 6_a); sie schnitten sich in zwei Punkten, und das der Kreis- und Ellipsenfläche gemeinsame Stück schnitt die Länge $A_1 B_2$ von der Axe ξ' ab. — Für negative x war umgekehrt:

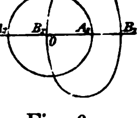


Fig. 6_a.

$$OB_2 > OA_2, \quad OB_1 < OA_1;$$

das gemeinsame Stück der Kreis- und Ellipsenfläche schnitt die Länge $B_1 A_2$ von der Axe ξ' ab (Fig. 6_b).

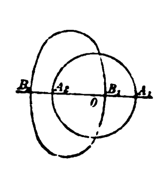
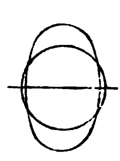


Fig. 6_b.

Im Falle (III_b), wo sich der Kreis und die Ellipse in vier Punkten schneiden, ist die kleine Axe der Ellipse diejenige Linie, welche das


Fig. 6_c.

gemeinsame Stück der Kreis- und Ellipsenfläche von der Axe ξ' abschneidet (Fig. 6_c).

Andere, als die genannten Fälle können, da es sich stets um sehr kleine Werthe von x handelt, nicht eintreten.

Der Kegel, welcher den Punkt P mit der Oeffnung des Mikroskops verband, schnitt die Ebene der Curven (1_b), (2_b) in einem Kreise, dessen Mittelpunkt O selbst war. Da dieser Kreis jedoch, wie schon oben erwähnt, in allen Fällen die Curven (1_b) und (2_b) völlig einschloss, kam er als Grenze der wirksamen Strahlen nicht in Betracht. Es wurden daher die Strahlen, welche an der Hervorbringung der Interferenzerscheinung Antheil hatten, im Falle (I) von dem Kreise (1_b), im Falle (II) von der Ellipse (2_b) begrenzt, während dieselben in den Fällen (III_a) und (III_b) das gemeinsame Stück der Kreis- und Ellipsenfläche erfüllten.

Wir berechnen nun die Richtungscosinus des nach dem Mittelpunkte des Kreises (I_b) gerichteten Strahles, bezogen auf das ursprüngliche Coordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$. Dieser Mittelpunkt M hat im System $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ die Coordinaten:

$$\frac{x\cos\vartheta}{E_1+z},\quad 0,\quad 1.$$

Seine Coordinaten im ursprünglichen System sind daher:

$$-\sin\vartheta+\frac{x\cos^2\vartheta}{E_1+z}+H+x-z\sin\vartheta,\quad 0,$$

$$\cos\vartheta+\frac{x\sin\vartheta\cos\vartheta}{E_1+z}+z\cos\vartheta.$$

Die Linie, welche den Punkt $P[H+x-z\sin\vartheta,\ 0,\ z\cos\vartheta]$ mit M verbindet, habe die Richtungscosinus $-a$, $-b$, $+c$, so ist:

$$b=0,\quad \frac{-a}{c}=\frac{-\sin\vartheta+\dfrac{x\cos^2\vartheta}{E_1+z}}{\cos\vartheta+\dfrac{x\sin\vartheta\cos\vartheta}{E_1+z}},$$

also mit Vernachlässigung der Quadrate von $x/(E_1+z)$:

$$(3)\qquad a=\sin\vartheta-\frac{x\cos^2\vartheta}{E_1+z},\quad b=0,\quad c=\cos\vartheta+\frac{x\sin\vartheta\cos\vartheta}{E_1+z}.$$

Ebenso ergeben sich, mit Vernachlässigung der Quadrate von x/z für den nach dem Mittelpunkte der Ellipse (2_b) gerichteten Strahl die Richtungscosinus $-a$, $-b$, $+c$, wo:

(4) $a = \sin\vartheta - \frac{x\cos^2\vartheta}{z}, \quad b = 0, \quad c = \cos\vartheta + \frac{x\sin\vartheta\cos\vartheta}{z}.$

Für den Strahl, der im Falle (III_a) nach dem Mittelpunkte von $A_1 B_2$, resp. dem von $B_1 A_2$ gerichtet ist (also nach dem Mittelpunkte derjenigen Linie, welche das der Kreis- und Ellipsenfläche gemeinsame Stück von der Axe ξ' abschneidet), ergeben sich die folgenden Richtungscosinus (wobei wieder $+a$ angegeben ist, während $-a$ der entsprechende Cosinus ist):

$$(5_a)\begin{cases} a = \sin\vartheta - \frac{1}{2}x\cos^2\vartheta\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{E_1+z}\right) - \frac{1}{2}\cos\vartheta\left(\frac{\varrho_1}{E_1+z} - \frac{\varrho\cos\vartheta}{z}\right), \\ b = 0, \\ c = \cos\vartheta + \frac{1}{2}x\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{E_1+z}\right) + \frac{1}{2}\sin\vartheta\left(\frac{\varrho_1}{E_1+z} - \frac{\varrho\cos\vartheta}{z}\right); \end{cases}$$

resp.:

$$(5_b)\begin{cases} a = \sin\vartheta - \frac{1}{2}x\cos^2\vartheta\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{E_1+z}\right) + \frac{1}{2}\cos\vartheta\left(\frac{\varrho_1}{E_1+z} - \frac{\varrho\cos\vartheta}{z}\right), \\ b = 0, \\ c = \cos\vartheta + \frac{1}{2}x\sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{E_1+z}\right) - \frac{1}{2}\sin\vartheta\left(\frac{\varrho_1}{E_1+z} - \frac{\varrho\cos\vartheta}{z}\right); \end{cases}$$

und zwar sind für positive x die Ausdrücke (5_a), für negative x die (5_b) zu wählen, während für $x = 0$:

(5_c) $\qquad a = \sin\vartheta, \quad b = 0, \quad c = \cos\vartheta$

wird, da hier O selbst der Mittelpunkt des betreffenden Stückes der Axe ξ' ist.

Im Falle (III_b) ist, wie schon bemerkt, der Mittelpunkt der Ellipse (2_b) zugleich der des betreffenden Stückes der Axe ξ'; und daher kommen für den Fall (III_b) die Ausdrücke (4) für a, b, c zur Geltung.

Nach diesen Vorbereitungen greifen wir auf die Entwickelungen des § 1 zurück. Die Gesammtintensität, die durch das Zusammenwirken sämmtlicher Paare von interferirenden Strahlen hervorgebracht wird, wurde in § 1 durch ein gewisses Doppelintegral erhalten, das über die Fläche eines kleinen, um O als Mittelpunkt beschriebenen Kreises zu erstrecken war. Nach dem oben Gesagten ist im Falle (I) jene Integration nun über die Fläche des Kreises (1_b) zu erstrecken. Wir können daher die in § 1 entwickelten Resultate hier unmittelbar anwenden, wenn wir nur Mittelpunkt und Radius des früheren Kreises durch die entsprechenden

Grössen des Kreises (1_b) ersetzen. Wir haben also, da die Grösse des Radius in dem schliesslichen Resultate keine Rolle spielt, nur statt der von P nach O gehenden Linie (d. i. der Mikroskopaxe) die Linie zu nehmen, deren Richtnngscosinus durch die Ausdrücke (3) dargestellt werden. Nun war in § 1 abgeleitet, dass, wenn $\xi\eta\zeta$ die Coordinaten des betrachteten Punktes sind, die grösste Deutlichkeit eintritt an den Stellen, wo der Ausdruck:

$$B^2 + C^2 = \left\{\frac{c\sqrt{1-c^2}}{n^2 c_1^2}\left(\xi + \frac{a}{c}\zeta\right) - \frac{a}{c^2\sqrt{1-c^2}}\zeta\right\}^2 + \frac{b^2\zeta^2}{c^2(1-c^2)}$$

ein Minimum wird; (cf. § 1, Formel (13); B ist der Coëfficient von $\varphi\cos\psi$, C der von $\varphi\sin\psi$), d. i., falls $b = 0$, $a = \sqrt{1-c^2}$ ist, an den Stellen, wo:

$$\frac{ac^3}{n^2 c_1^2}\left(\xi + \frac{a}{c}\zeta\right) - \zeta = 0 \tag{6}$$

ist. Setzt man hier für a, c, welche Grössen früher die Richtung der Axe bestimmten, die Ausdrücke (3), setzt ferner $n^2 c_1^2 = n^2 - 1 + c^2$, setzt endlich für ξ, ζ die Coordinaten des Punktes P, nämlich $\xi = H + x - z\sin\vartheta$, $\zeta = z\cos\vartheta$, so ergibt sich mit Vernachlässigung der Quadrate von $x/(E_1 + z)$ die Formel:

$$\left.\begin{aligned} z = \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\left\{H + x - \frac{x}{E_1 + z}z\right\}\cdot \\ \cdot\left\{1 + \frac{x}{E_1 + z}\left[-\frac{1}{\sin\vartheta} + 4\sin\vartheta - \frac{2\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Im Falle (II) tritt an Stelle des Kreises (1_b) die Ellipse (2_b) als Fläche, über die zu integriren ist. Wie wir nachher zeigen werden, ergibt die Integration hier, wo der Cosinus $b = 0$ ist, für die elliptische Begrenzung genau dasselbe Resultat, wie für die kreisförmige Begrenzung; nur tritt der Mittelpunkt der Ellipse an Stelle des Kreiscentrums, mithin die Ausdrücke (4) für a, c an Stelle der Ausdrücke (3). Mit Vernachlässigung der Quadrate von x/z ergibt sich daher im Falle (II):

$$z = \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}H\cdot\left\{1 + \frac{x}{z}\left[-\frac{1}{\sin\vartheta} + 4\sin\vartheta - \frac{2\sin\vartheta\cos\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\right]\right\}. \tag{8}$$

Wenn endlich [Fall (III)] die Ellipse und der Kreis sich schneiden, so ist nur über das gemeinsame Stück beider

Flächen zu integriren. Hier würde eine strenge Durchführung der Integration kein einfaches Resultat ergeben. Wir begnügen uns daher mit der folgenden Annäherung. Wir ersetzen die Fläche, über die zu integriren ist, durch einen Kreis oder eine Ellipse, die derselben möglichst nahe kommt. Das ist um so eher gestattet, da im schliesslichen Resultate bei unserer Näherung die Grösse des Kreisradius oder der Ellipsenaxen keine Rolle spielt. Da die Integrationsfläche durch die Axe ξ' in zwei congruente Theile getheilt wird, so muss das Gleiche auch von dem diese Fläche ersetzenden Kreise (oder Ellipse) gelten, d. h. der Mittelpunkt muss auf der Axe ξ' liegen. Wir haben als Mittelpunkt des ersetzenden Kreises (oder Ellipse) daher den Mittelpunkt desjenigen Stückes der Axe ξ' zu nehmen, das dem Kreise (1_b) und der Ellipse (2_b) gemeinsam ist; dann werden wir jedenfalls ein angenähertes Resultat erhalten, das sich von dem strengeren nur um kleine Grössen höherer Ordnung unterscheidet. Wir können danach ohne weiteres die Formel (6) auch im Falle (III) anwenden und haben nur im Falle (III_a) für a, c die Ausdrücke (5), im Falle (III_b) aber wieder die Ausdrücke (4) zu nehmen. Im Falle (III_b) ergibt sich also wieder die obige Formel (8), während wir im Falle (III_a) das folgende Resultat erhalten:

$$
(9)\quad \left\{\begin{aligned}
z = \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1} \Bigg\{ & H + x - \tfrac{1}{2} x z \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{E_1 + z}\right] \mp \frac{z}{2\cos\vartheta}\left[\frac{\varrho_1}{E_1+z} - \frac{\varrho\cos\vartheta}{z}\right]\Bigg\}. \\
& \left\{1 + \tfrac{1}{2} x \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{E_1+z}\right)\left(-\frac{1}{\sin\vartheta} + 4\sin\vartheta - \frac{2\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\right)\right. \\
& \left.\pm \frac{1}{2\cos\vartheta}\left(\frac{\varrho_1}{E_1+z} - \frac{\varrho\cos\vartheta}{z}\right)\left(-\frac{1}{\sin\vartheta} + 4\sin\vartheta - \frac{2\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1}\right)\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Hier gilt von den Doppelzeichen das Zeichen $+$ für positive x, das Zeichen $-$ für negative x, während für $x = 0$ die betreffenden Glieder fortfallen.

Für $x = 0$ (mittlerer sichtbarer Streifen) geben die drei Formeln (7), (8), (9) übereinstimmend:

$$
(10)\qquad z = z_1 = \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1} H.
$$

Das ist genau die früher in § 1 abgeleitete Formel. Also: Die Entfernung des mittleren sichtbaren Streifens

von der Keilfläche ist von der Begrenzung der wirksamen Strahlen unabhängig. Dieselbe stimmt mit den früheren Resultaten völlig überein.

Abweichend von dem Früheren aber gestalten sich die Resultate, wenn man das Mikroskop aus der mittleren Stellung $x = 0$ verschiebt. Setzen wir zur Abkürzung im Folgenden:

$$(11) \quad \frac{\sin\vartheta \cos^2\vartheta}{n^2 \cos^2\vartheta_1} = S, \qquad -\frac{1}{\sin\vartheta} + 4\sin\vartheta - \frac{2\sin\vartheta\cos^2\vartheta}{n^2\cos^2\vartheta_1} = T,$$

setzen wir ferner:

$$(12) \qquad z = z_1 + \tau,$$

wo z_1 den durch (10) bestimmten Werth bezeichnet, τ die Zurückziehung des Mikroskopes (resp. für negative τ die Vorschiebung desselben) aus der Mittellage, so ergibt zunächst die Formel (8):

$$z_1 + \tau = z_1 \left\{ 1 + \frac{x}{z_1 + \tau} T \right\},$$

also, da τ / z_1 von derselben Grössenordnung ist wie x / z_1, mit Vernachlässigung der Quadrate dieser Grössen:

$$(8_a) \qquad \frac{\tau}{x} = T.$$

Die Formel (9) ergibt mit derselben Näherung:

$$(9_a) \quad \tau = S.x + \tfrac{1}{2} x \left(1 + \frac{z_1}{E_1 + z_1}\right)(T - S) \pm \tfrac{1}{2} \left(\frac{\varrho_1}{\cos\vartheta} \frac{z_1}{E_1 + z_1} - \varrho\right)(T - S)$$

wobei im letzten Gliede das obere Zeichen für positive x gilt, das untere für negative x, während für $x = 0$ das letzte Glied fortfällt.

Die Formel (7) gibt endlich:

$$(7_a) \qquad \tau = S.x + x \frac{z_1}{E_1 + z_1} (T - S).$$

Hiermit haben wir Formeln gewonnen, die direct mit den Beobachtungen vergleichbar sind, nämlich für den Fall I) die Formel (7_a), für II) und III$_b$) die Formel (8_a), für III$_a$) die Formel (9_a). Für unsere Beobachtungen kommen nur die Formeln (8_a) und (9_a) in Betracht. Die Formel (7_a) haben wir erwähnt, um daran eine Bemerkung über die Newton'schen Ringe zu knüpfen. Bei unseren Beobachtungen über die Interferenzfläche der Newton'schen Ringe

fiel die eine der hier in Betracht kommenden Begrenzungen der wirksamen Strahlen ganz fort, nämlich die durch die kreisförmige Oeffnung der im übrigen bedeckten Keilfläche. Dort konnte also nur die Begrenzung der Lichtquelle von Einfluss sein. Den Einfluss dieser Begrenzung beim Keil zeigt uns die Formel (7_a). Ist hier z_1 klein gegen E_1, so wird das zweite Glied der rechten Seite von (7_a) nur einen verschwindenden Einfluss haben und sehr nahe $\tau = S.x$ sein, wie die in § 1 abgeleitete Formel erfordert. Bei den mikroskopischen Beobachtungen der Newton'schen Ringe war nun stets z_1 sehr klein, da alle Beobachtungen in der Nähe des centralen Fleckes angestellt wurden. Daher war dort die Entwickelung eines von der Begrenzung der Lichtquelle herrührenden Correctionsgliedes nicht nöthig. Anders beim Keil, wo die Beobachtungen erst in grösserer Entfernung (gegen 600 mm) von der Keilkante angestellt wurden und daher ein viel grösseres z_1 ergaben.

Es bleibt zum Schluss noch übrig, ein vorher (p. 222) benutztes Resultat zu begründen, dass es nämlich für den hier betrachteten Fall keinen Unterschied macht, ob der Schnitt des die wirksamen Strahlen begrenzenden Kegels mit der Ebene E ein Kreis oder eine Ellipse ist. Dieser Nachweis lässt sich folgendermassen führen.

Ein beliebiger Punkt innerhalb der Ellipse (2_b) habe, auf das System ξ', η', ζ' (p. 218) bezogen, die Coordinaten ξ', η'; seine Coordinate ζ' ist $=1$, und die Quadrate von ξ', η' sind nach dem Obigen gegen 1 zu vernachlässigen. Der Mittelpunkt der Ellipse hat die Coordinaten ξ_0', 0, 1, wo $\xi_0' = (x \cos\vartheta / z)$. Die Halbaxen der Ellipse sind $\varrho \cos\vartheta / z$ und ϱ / z. Ferner habe im ursprünglichen Coordinatensystem ξ, η, ζ derjenige Strahl, welcher P mit dem Punkte ξ', η', 1 verbindet, die Richtungscosinus $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$; der Strahl, welcher P mit dem Mittelpunkt der Ellipse verbindet, die $-a$, $-b$, $+c$. Die Grössen a, b, c sind durch die Gleichungen (4) dieses Paragraphen bestimmt, und mit derselben Näherung ergibt sich:

$$(13)\quad \alpha = \sin\vartheta - \xi' \cos\vartheta, \quad \beta = -\eta' \quad \gamma = \cos\vartheta + \xi' \sin\vartheta.$$

Mit Vernachlässigung der Quadrate von ξ' etc. kann man diese Ausdrücke auch so schreiben:

(13$_a$) $\alpha = a - (\xi' - \xi_0')c, \quad \beta = -\eta', \quad \gamma = c + (\xi' - \xi_0')a$

und: $n\gamma_1 = \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2} = n c_1 \left\{1 + \frac{ac}{n^2 c_1^2}(\xi' - \xi_0')\right\}.$

Der Strahl, dessen Richtung durch $-\alpha$, $-\beta$, $+\gamma$ bestimmt ist, hat nun gegen den mit ihm interferirenden nach § 1 Gl. (12) im Punkte P eine Wegdifferenz:

$$\varDelta = 2\varepsilon n \gamma_1 \left(\xi + \frac{\alpha}{\gamma}\zeta\right),$$

wo ξ, ζ die Coordinaten des Punktes P im System ξ, η, ζ sind. Setzt man in $\varDelta$ die Ausdrücke (13$_a$) ein, entwickelt nach Potenzen von $\xi' - \xi_0'$ und vernachlässigt die Quadrate dieser Grössen, so wird:

(14) $$\varDelta = A + B(\xi' - \xi_0'), \quad \text{wo:}$$

(14$_a$) $A = 2\varepsilon n c_1 \left(\xi + \frac{a}{c}\zeta\right), \quad B = 2\varepsilon n c_1 \left\{\frac{ac}{n^2 c_1^2}\left(\xi + \frac{a}{c}\zeta\right) - \frac{\xi}{c^2}\right\}$

ist; und ξ, ζ sind von ξ' unabhängig und umgekehrt.

Das betrachtete Paar interferirender Strahlen ergibt in P einen Intensitätsausdruck von der Form:

$$M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{\varDelta}{\lambda}2\pi\right),$$

und die Gesammtintensität im Punkte P ist, wie in § 1:

$$I = m\iint\left[M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{\varDelta}{\lambda}2\pi\right)\right]dF,$$

wo dF ein Flächenelement der Ellipse (2$_b$) und die Integration über die Fläche dieser Ellipse auszudehnen ist. Ist F der Flächeninhalt der Ellipse, so wird:

$$I = mF\left\{M^2 + N^2 - \frac{2MN}{F}\iint\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[A + B(\xi' - \xi_0')\right]d\xi' d\eta'\right\}.$$

Die Integration nach η' ist unmittelbar auszuführen; die Grenzen sind durch die Gleichung der Ellipse (2$_b$), nämlich:

$$(\xi' - \xi_0')^2 + \eta'^2\cos^2\vartheta = \left(\frac{\varrho}{z}\cos\vartheta\right)^2$$

bestimmt. Das Doppelintegral, das den Factor von $-2MN/F$ bildet, ist somit:

$$\frac{2}{\cos\vartheta}\int \cos\frac{2\pi}{\lambda}[A + B(\xi' - \xi_0')] \cdot \sqrt{\left(\frac{\varrho}{z}\right)^2 \cos^2\vartheta - (\xi' - \xi_0')^2}\, d\xi',$$

und die Grenzen dieses Integrals sind $\xi' = \xi_0' - (\varrho/z)\cos\vartheta$ und $\xi' = \xi_0' + (\varrho/z)\cos\vartheta$. Setzt man:

$$\xi' = \xi_0' + \frac{\varrho}{z}\cos\vartheta \,.\, \cos\psi,$$

so wird das Integral:

$$2\left(\frac{\varrho}{z}\right)^2 \cos\vartheta \int_0^\pi \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left[A + B\frac{\varrho}{z}\cos\vartheta\cos\psi\right] \cdot \sin^2\psi\, d\psi$$

$$= 2\left(\frac{\varrho}{z}\right)^2 \cos\vartheta \,.\, \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\int_0^\pi \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}B\frac{\varrho}{z}\cos\vartheta\cos\psi\right) \cdot \sin^2\psi\, d\psi.$$

Setzt man, wie in § 1:

$$\frac{2\pi}{\lambda}B\frac{\varrho}{z}\cos\vartheta = u_1, \tag{15}$$

so ist:
$$\int_0^\pi \cos(u_1\cos\psi) \,.\, \sin^2\psi\, d\psi = \frac{\pi J_1(u_1)}{u_1},$$

wo wieder J_1 die Bessel'sche Function mit dem Index 1 ist. Da ausserdem:

$$F = \pi \cdot \left(\frac{\varrho}{z}\right)^2 \cos\vartheta,$$

so wird:

$$I = mF \cdot \left\{M^2 + N^2 - 2MN\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}A\right)\frac{2J_1(u_1)}{u_1}\right\}. \tag{16}$$

Dieser Ausdruck ist von derselben Form wie der in § 1 für den Fall entwickelte, dass ein Kreis an Stelle der Ellipse die Integrationsfläche begrenzte. Wie in § 1 ergibt sich, dass die grösste Deutlichkeit der Interferenzerscheinung eintritt, wenn u_1 möglichst klein, d. h. (nach Gl. 15), wenn $B = 0$ ist. Diese Bedingung ist aber bei der Bedeutung von B (Gl. 14_a) mit Gleichung (6) identisch; und damit ist die Behauptung bewiesen.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

II. *Ueber die Volumenänderungen von Metallen und Legirungen beim Schmelzen; von Eilhard Wiedemann.*

Gelegentlich einer Untersuchung[1]) über Volumenänderungen beim Erwärmen von Salzen und die dabei stattfindenden molecularen Umlagerungen hatte ich auch einige Versuche über die Volumenänderung des Zinnes beim Schmelzen nach der dilatometrischen Methode ausgeführt und war dabei, wie ich schon, freilich ohne Zahlenangaben, mitgetheilt habe, zu dem Resultate gelangt, dass das Zinn sich beim Schmelzen ausdehne. Anlässlich einer Notiz der Herren F. Nies und Winkelmann[2]) habe ich die Untersuchung von neuem aufgenommen und habe, wie ich gleich von vornherein bemerken will, dabei dieselben Resultate wie früher erhalten.

Ausser dem Zinn selbst habe ich noch eine Reihe von Legirungen auf ihre Ausdehnung einerseits, sowie auf ihre Abkühlungsgeschwindigkeiten nach starkem Erhitzen andererseits untersucht, wobei sich einige vielleicht nicht uninteressante Resultate ergeben haben.

Zu den Versuchen wurde im wesentlichen der früher beschriebene Apparat benutzt und auch in der dort angegebenen Weise gefüllt.

Die Legirungen wurden zuerst aus ihren Bestandtheilen, die in abgewogenen Mengen verwendet wurden, zusammengeschmolzen, dann erstarren gelassen, hierauf wieder geschmolzen und dann ebenso wie das Zinn in Reagirglascylindern zu Stangen gegossen. Dadurch war die Gefahr des Springens der letzteren wesentlich vermindert. Denn bei der Darstellung der Legirung muss bekanntlich, um die Oxydation möglichst zu vermeiden, das höchst schmelzende Metall zunächst geschmolzen und dann in dieses das andere eingetragen werden, wobei die Flüssigkeit eine weit höhere Temperatur annimmt als dem Schmelzpunkt der Legirung entspricht. Zu den Ausdehnungsbestimmungen wurden

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 17. p. 561. 1882.

2) F. Nies u. A. Winkelmann, Wied. Ann. 18. p. 364. 1883.

die bei dem Giessen erhaltenen Stangen in ein sie fast vollkommen umschliessendes cylindrisches Glasrohr eingeschoben, welches an die Capillare Ac (vgl. l. c.) bei c angeschmolzen wurde und dann ersteres möglichst nahe an dem unteren Ende abgeschmolzen.

Als dilatometrische Flüssigkeit diente Oel. Ich habe zahlreiche Versuche mit anderen Substanzen von bestimmterer chemischer Zusammensetzung angestellt, um sie zu diesem Zwecke zu verwenden, wie mit den hochsiedenden Theilen des Petroleums, Methyldiphenylamin u. a. m., ohne indess befriedigende Resultate zu erzielen. Mochte man die Flüssigkeiten vor dem Einfüllen in das Dilatometer noch so sorgfältig von Luft befreien, Spuren blieben doch meist darin oder entwickelten sich beim Einfliessen in das vollkommen evacuirten Dilatometer. Da die Dämpfe der obigen Substanzen bei 200° schon merkliche Tensionen besitzen, so werden die einmal vorhandenen oder sich bildenden Luftbläschen stark vergrössert und machen die Beobachtung unmöglich. Oel zeigte diesen Uebelstand nicht. Da es aber Wismuth und Blei bei hohen Temperaturen angreift, so konnten diese Metalle nicht in den Bereich der Untersuchung gezogen werden. Ich beabsichtige für dieselben und eine Reihe anderer Substanzen später Messungen mitzutheilen, bei denen als dilatometrische Flüssigkeit Luft dient.

Da die Versuche nur über das allgemeine quantitative Verhalten Aufschluss geben sollten, so ist eine Reihe von Correctionen vernachlässigt worden, welche die Resultate doch nicht wesentlich verändert hätten, wie für die Temperatur des herausragenden Oelfadens etc. Für die Versuche bei den Legirungen waren solche Vernachlässigungen um so eher gestattet, als sich der Natur der Sache nach keine ganz constanten Resultate erhalten und erwarten liessen. Ich habe ja schon früher gezeigt[1]) dass wir es bei ihrer Verflüssigung mit einem ziemlich complicirten Lösungsphänomen zu thun haben, worauf ich unten noch zurückkommen werde, und dass je nach der grösseren oder geringeren Schnelligkeit der

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 3. p. 237. 1878.

Abkühlung beim Erstarren die Legirungen einen verschiedenen Grad von Homogenität zeigen.

Im Grossen und Ganzen kann man mit einer für unsere Zwecke hinlänglichen Genauigkeit die Ausdehnung des Oeles als nahezu constant ansehen. Alle Unregelmässigkeiten in den durch den Gang des Endes des Oelfadens im Capillarrohr angezeigten Volumenänderungen rühren daher von unregelmässigen Volumenänderungen des Metalles her.

Benutzt wurden zwei verschieden weite Capillarröhren I und II. Bei I entsprachen einer Länge von 635 mm 4,2 g Quecksilber, also jedem Millimeter 0,000 487 rund 0,0005 ccm.

Bei II entsprachen einer Länge von 468 mm 13,9 g Quecksilber, also jedem Millimeter 0,0022 ccm. Die Capillarröhre II war also im Querschnitt 4,4 mal weiter als I.

Zum Erhitzen diente ein Bad von etwa 3,5 kgr Paraffin, die in einem emaillirten gusseisernen Topfe geschmolzen wurden. An einem Thermometer wurde seine Temperatur abgelesen, welche durch einen Rührer an allen Stellen möglichst gleichmässig erhalten wurde. Bei der grossen Masse des Paraffins gelang es leicht durch Regulirung des zur Erwärmung verwandten Iserlohner Brenners, die Temperatur längere Zeit constant zu erhalten.

Die Beobachtungen selbst wurden sowohl während des Erwärmens als während des Abkühlens angestellt.

Um die Abkühlungsgeschwindigkeiten zu bestimmen wurde das Metall in einem 19 mm weiten und 85 mm hohen Messingrohr auf 260° erhitzt, und sobald das Metall geschmolzen war, ein Thermometer mittelst eines Korkes in dem Rohr befestigt; zum Schutz gegen das Metall war das Thermometer von einer eng anschliessenden Glasröhre umgeben und der Zwischenraum zwischen beiden mit Oel ausgefüllt. Nachdem eine beträchtlich über dem Schmelzpunkt liegende Temperatur erreicht war, wurde der Apparat in ein oben zugedecktes doppelwandiges Metallgefäss gebracht, aus dem nur das Thermometer hervorragte, an welchem das Messingrohr durch einen Retortenhalter getragen wurde. Der Raum zwischen den beiden Wänden des Gefässes war mit Wasser gefüllt. Bei der

Abkühlung wurden für jeden fünften Grad die Zeiten ermittelt, in denen die betreffende Temperatur eintrat.

Die Tabellen sind für die Volumenänderungen so angeordnet, dass unter t die Temperatur, unter a die Stellung des Endes der Oelsäule bei der Temperatur t, unter b die einem Grad entsprechende Verschiebung zwischen der Temperatur t und der nächst niedrigeren bei der Erwärmung, sowie zwischen der Temperatur t und der nächst höheren bei der Abkühlung, entspricht.

In den Tabellen für die Abkühlungsgeschwindigkeiten hat t dieselbe Bedeutung, m bezeichnet die Zeiten, zu denen das Thermometer die Temperatur t anzeigt und n die Zeit, welche das Thermometer zum Sinken um je 5^0 braucht. Der reciproke Werth von n gibt also ein Maass für die Abkühlungsgeschwindigkeiten. Wird n zwischen irgend zwei Temperaturen grösser als es dem sonstigen Gange von n entspricht, so deutet dies auf eine Wärmeentwickelung im Metall und damit auf das Festwerden eines Theiles desselben. Bleibt t längere Zeit constant, so findet ein Erstarren des Metalles statt.

Ausserdem ist noch bei den Ausdehnungsversuchen angegeben die Menge des verwandten Metalles und die Menge des gleichzeitig mit ihm bei ca. 25^0 im Dilatometer eingeschlossenen Oels, sowie das specifische Gewicht der angewandten Substanzen. Letzteres wurde in bekannter Weise durch Wägen eines Pyknometers gewonnen, wenn dasselbe leer war, Wasser allein und Wasser und eine vorher gewogene Metallmenge enthielt.

Zinn.

Das Zinn wurde entweder in Form von Spähnen, die durch Abdrehen einer grossen gegossenen Stange hergestellt waren, benutzt oder in Form von Stangen selbst. Ersteres geschah, um etwa vorhandene Höhlungen zu erschliessen.

Bei dem Zinn wurden natürlich nur die Volumenänderungen untersucht.

a) Zinnspähne. Capillarrohr I.

Versuch I. Gewicht des verwandten Zinns 16,5 g.

t	a	b	
220°	100	—	
223,5	137	1,06	
227	160	—	} schmilzt.
230	255	—	
220	105[1])	—	} schmilzt.
235,5	365	—	
228	268	1,30	
220,5	102	—	
214	86	1,01	

Wir nehmen den Schmelzpunkt des Zinns zu 226° an und berechnen aus der Ausdehnung vor und nach dem Schmelzen die Stellungen der Oelsäule α und β, welche dem festen und geschmolzenen Zinne bei dieser Temperatur entsprechen. $\beta - \alpha$ gibt dann die Ausdehnung des Metalles bei dem Schmelzen bei der Temperatur von 226°. Es wird:

$$\beta = 242$$
$$\alpha = 160$$
$$\beta - \alpha = 82$$

Die Ausdehnung beim Schmelzen entspricht also:

$$82 \times 0{,}000\,487 \text{ ccm} = 0{,}040.$$

Für das specifische Gewicht s des benutzten Zinns ergab sich aus besonderen Messungen bei der gewöhnlichen Temperatur: $s = 7{,}25$

und können wir dies auch als das specifische Gewicht bei der Schmelztemperatur mit hinlänglicher Genauigkeit betrachten, um die procentischen Ausdehnungen beim Schmelzen selbst zu erhalten.

Das Volumen des angewandten Zinns betrug:

$$\frac{16{,}5}{7{,}25}$$

1) Die erste Abkühlung von 230 bis 220° wurde vorgenommen, um zu constatiren, dass das Oel nicht etwa chemische Veränderungen erfahren und dadurch eine starke Ausdehnung erlitten habe; da der Oelfaden dabei wieder nahezu auf seine ursprüngliche Lage zurückkehrte, so war dies nicht der Fall.

also ist die procentische Ausdehnung:

$$100.0{,}040\,\frac{7{,}25}{16{,}5} = 1{,}76\,\%.$$

Versuch II. Gewicht des verwandten Zinns 16,1 g.

t	a	b	t	a	b
202°	12	—	237°	468	9,5
211,5	108	10	229	392	8,9
221,8	219	10,8	222	240	—
232	422	} schmilzt	211	110	12,0
235	444				

Hieraus berechnet sich:

$$\begin{aligned} \beta &= 365 \\ \alpha &= 288 \\ \hline \beta - \alpha &= 77 \end{aligned}$$

Die procentische Volumenänderung beim Schmelzen beträgt danach: 1,69 %.

b) Massive Zinnstange. Capillarrohr I. Da das Volumen der Capillarröhre etwas enge im Verhältniss zur Menge des verwandten Zinns war, so musste die Oelsäule durch Saugen an der Oeffnung *i* zurückgezogen werden, wodurch kleine Unregelmässigkeiten entstehen, die aber auf das Resultat selbst ohne wesentlichen Einfluss sind. Gewicht des verwandten Zinns 108 g.

t	a	b	t	a	b
199°	84	—	234°	1033	7,3
211	171	6,4	228	963	11,4
221	256	8,5	222	280	—
234	1023	—	202	65	8,8
243	1098	8,3			

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \beta &= 940 \\ \alpha &= 266{,}6 \\ \hline \beta - \alpha &= 674 \end{aligned}$$

Für die procentische Volumenänderung beim Schmelzen folgt:

2,20 %.

Aus den drei Messungen ergibt sich also nicht nur qualitativ eine starke Ausdehnung, die im letzten Falle einer Verschiebung der Oelsäule um nicht weniger als 674 mm entspricht, sondern auch nahe übereinstimmend derselbe

Werth für die Ausdehnung beim Schmelzen, nämlich 1,76, 1,69 und 2,20% des Volumens des Metalles bei ca. 25° C., also im Mittel ca. 1,90%. Die Berücksichtigung der Ausdehnung des festen Zinns bis zum Schmelzpunkt würde an diesen Ergebnissen kaum etwas ändern. Die dadurch bedingte Veränderung in dem procentischen Werth der Ausdehnung liegt innerhalb der Fehlergrenzen.

Bekanntlich sind die Herren F. Nies und A. Winkelmann[1]) zu einem gerade entgegengesetzten Resultate gelangt und haben gefunden, dass das Zinn beim Schmelzen eine Contraction zeigt.

Wir müssen daher untersuchen, ob sich nicht Gründe finden lassen, welche die Abweichungen zwischen den Resultaten der Versuche der genannten Herren und dem meinigen zu erklären vermögen. Bei der grossen Sorgfalt in der Ausführung der ersteren mussten sich dieselben aus der Anordnung der Versuche, nicht aber aus ihren Ergebnissen erklären.

Die Herren Nies und Winkelmann schmelzen in einem grossen Gefäss eine beträchtliche Masse eines Metalles, tauchen dann in dieselbe ein festes Stück des betreffenden Metalles unter und beobachten, ob dasselbe wieder in die Höhe steigt und über die Oberfläche hervorragt. Zuerst hatte ich vermuthet, das Schwimmen der gegossenen Zinnstücke könne daher rühren, dass sich in ihrem Inneren Hohlräume oder weniger dichte Partien bildeten. Wird die Oberfläche des geschmolzenen Metalles sehr schnell abgekühlt, so wäre es möglich, dass diese zuerst erstarrt und auf die später fest werdenden inneren Theile eine Spannung ausübt, wodurch die Dichte im Inneren relativ kleiner wird; dadurch könnte wenigstens die Dichte der inneren Partien gleich der des geschmolzenen Metalles werden. Um diese Annahme zu prüfen, habe ich Zinn in Drehspähnen und massiven Stücken untersucht und bin, wie die obigen Zahlen zeigen, beide male zu denselben Resultaten gelangt, sodass sich aus der obigen Voraussetzung die Nies-Winkelmann'schen Resultate nicht erklären lassen. — Ferner wäre es möglich, dass das Zinn vor

1) Nies u. Winkelmann, Wied. Ann. 13. p. 43. 1881.

dem Schmelzen in einen plastischen Zustand übergeht, der eine geringere Dichte besitzt sowohl als das flüssige, als auch als das feste Metall. In der That wird das Zinn vor dem Schmelzen weich, wie Versuche ergaben, bei denen Drehspähne um eine Thermometerkugel gewickelt wurden; diese sanken kurz vor dem Schmelzen herab. Wären aber wirklich mit dem Plastischwerden solche Volumenänderungen, wie oben angegeben, verbunden, so müsste im Dilatometer zu irgend einer Zeit ein Rückgang des Oelfadens eintreten, der aber niemals zu beobachten war. — Endlich könnte das Schwimmen der Metallstücke von dem Auftreten von Convectionsströmen herrühren. An dem Rande des Gefässes, in welches die Metallstücke geworfen werden, findet gegenüber den mittleren Partien eine kaum zu vermeidende, relativ starke Abkühlung statt und längs der Wandung sinken die abgekühlten flüssigen Metallmassen zu Boden, um in der Mitte wieder emporzusteigen. Diese aufsteigenden Ströme können sehr wohl die Metallkugel in die Höhe heben, sobald die Temperatur der letzteren gleich der Schmelztemperatur geworden. Die bei dieser Temperatur vorhandene kleine Differenz der specifischen Gewichte von nicht 2 % beim Zinn erleichtert dann wesentlich das Schweben und Schwimmen der Kugel.

Schnellloth.

Capillarrohr I. Das Gewicht des angewandten Schnelllothes war 127,89 g, sein specifisches Gewicht 8,02. Für die Volumenänderung fand sich:

t	*a*	*b*	*t*	*a*	*b*
160	13	—	203	1199	—
170	102	8,9	193	1014	8,9
179,5	190	9,5	187	960	9,0
188	937	—	176,5	140	—
196	1013	9,5	166	48	8,8
205	1185	8,0			

Nach Abkühlungsversuchen lag der Schmelzpunkt bei 182,5° bei dem benutzten Thermometer.

Diese Zahlen zeigen, dass bei dem Schnellloth beim Schmelzpunkt eine starke Ausdehnung eintritt. Es ist:

$$\begin{array}{r} \beta = 880 \\ \alpha = 211 \\ \hline \beta - \alpha = 669 \end{array}$$

Die Ausdehnung entspricht demnach 0,334 ccm. Also ist die procentische Ausdehnung:

$$= 2\,\%.$$

Bleiwismuthlegirungen.

Von diesen waren diejenigen mit viel Wismuth brüchig und krystallinisch, diejenigen mit relativ viel Blei dagegen biegsam.

Pb_2Bi. Das specifische Gewicht war 11,4. 1) Volumenänderung. Cap. I. Da der Körper sich sehr stark ausdehnte, sodass das Lumen der Capillarröhre etwas zu klein war, so wurde durch Zurückziehen der Oelsäule nach jeder Messung das Ende der letzteren wieder auf Null gebracht. Die Verschiebungen zwischen je zwei Temperaturen t und t_1 enthält die Tabelle unter a, die Verschiebung für jeden Grad unter b. Die Menge des Oels betrug 6 g, die des Metalles 203 g.

t_1	t	a	b	t_1	t	a	b
95	108	185	14	170	155	520	35
108	125	224	13	180	170	543	54,3
136	126	200	18	194	180	360	26,0
143	136	200	28	208	196	190	16
155	143	340	28	220	208	220	18

Mit derselben Legirung wurde noch mit der Capillarröhre II eine Versuchsreihe angestellt. Die Menge des Metalls betrug 188,2 g, die Menge des Oels 7,2 g. Es war:

t	a	b	t	a	b
88	25	—	205	606	3,0
103	67	2,8	192	568	2,9
122	124	3,0	184	544	3,0
136	175	3,6	178	477	11,1
145	226	5,6	159	326	7,9
155	285	5,9	145	236	5,0
165	353	6,8	132	165	5,5
175,5	450	9,2	121	106	5,4
186	548	9,3	94	24	3,0
196	579	3,1			

Die allgemeinen Resultate sind in beiden Fällen dieselben. Zunächst tritt zwischen 120 und 136° circa ein schwaches Zunehmen der Ausdehnung ein. Diese wird dann immer grösser, bis sie bei ca. 180° ihr Maximum erreicht, um dann wieder sehr stark zu fallen.

2) Für die Abkühlungsgeschwindigkeiten ergaben sich folgende Resultate.

t	*m*	*n*	*t*	*m*	*n*
240	5′ —″	—	165	10′ 45″	—
255	5 12	12″	160	11 25	40″
230	5 24	12	155	12 5	40
225	5 37	13	150	12 45	40
220	5 50	13	145	13 24	39
215	6 3	13	140	14 5	41
210	6 17	14	135	14 55	50
205	6 33	16	130	15 40	45
200	6 47	14	125	16 55	1′ 15
195	7 5	18	120	17 40	45
190	7 22	17	115	18 18	38
195	7 40	18	110	18 57	39
180	8 15	35	105	19 39	42
175	9 15	1′ 00	100	20 22	43
170	10 00	55	95	21 13	41
165	10 45	45			

Bei 180° tritt ein fast vollkommener Stillstand ein, diesem folgt zunächst ein relativ langsames Sinken bis 125° ca. wo ein neuer Stillstand beobachtet wird.

Die beiden Schmelzpunkte von Pb_2Bi liegen bei 180 und 125°.

BiPb. Das specifische Gewicht war 11,03. 1) Volumenänderung. Capillarrohr II. Das Gewicht des verwandten Metalls betrug 211,7 g, die Menge des Oels ca. 6 g.

t	*a*	*b*	*t*	*a*	*b*
107	4	—	182	433	3,8
118	30	2,4	165	375,5	4,0
127	45	1,7	150	317	3,9
132	141	9,6	145	275	8,4
140	207	8,2	140	217	11,6
153	325	9,0	130	127,5	9,0
161	354	3,6	114	—10	—
172	365	3,7	105	—43	3,6

Wir haben demnach hier beim Erwärmen eine starke Ausdehnung zwischen 127 und 132°, dann auf einem relativ

kleinen Temperaturintervall eine erst schwach zunehmende, dann langsam abnehmende Ausdehnung.

2) Für die Abkühlungsgeschwindigkeiten ergaben sich folgende Resultate:

t	*m*	*n*	*t*	*m*	*n*
240	5' —"	—	165	8' 22"	22"
235	5 11	11"	160	8 40	18
230	5 20	9	155	9 —	20
225	5 32	12	150	9 22	22
220	5 42	10	145	10 5	43
215	5 53	11	140	11 2	57
210	6 4	11	135	11 50	48
205	6 17	13	130	12 35	45
200	6 30	13	125	13 27	52
195	6 45	15	125	16 20	2' 53
190	6 58	13	120	17 45	1' 25
185	7 14	16	115	18 13	38
180	7 30	16	110	18 45	32
175	7 45	15	105	19 20	35
170	8 2	17	100	20 00	40

Ein erster Stillstand findet bei ca. 146° und etwas tiefer statt. Beim weiteren Abkühlen sank das Thermometer zunächst über 125° bis 122° und stieg dann wieder bis auf 125,6, wo es längere Zeit constant blieb.

Die beiden Schmelzpunkte von PbBi liegen bei 146 und 125,6°.

$PbBi_2$. Das specifische Gewicht war 10,96. 1) Volumenänderung. Capillarrohr I. Das Gewicht des Metalls betrug 126,2 g, dasjenige des Oels 6,2 g.

t	*a*	*b*	*t*	*a*	*b*
95	15	—	159	720	8,3
108	117	7,8	141	583	7,0
118	193	7,6	133	535	6,0
126	238	5,7	119	172	—
133	554	21,6	111	93	9,8
145,8	621	5,2	101	10	8,3
160	729	7,6			
179	886	8,2			

Zunächst tritt zwischen 126 und 133° eine starke Volumenänderung ein, entsprechend einem theilweisen Schmelzen, ihr folgt bei Temperaturen oberhalb des Schmelzpunktes eine zunächst kleine, dann bald constant werdende grosse Ausdehnung.

2) Für die Abkühlungsgeschwindigkeiten ergab sich:

t	*m*	*n*	*t*	*m*	*n*
220	2′ 1″	—	150	5′ 43″	—
215	2 12	10″	145	6 16	33″
210	2 22	10	140	6 52	36
205	2 34	12	135	7 34	42
200	2 46	12	130	8 7	33
195	2 59	13	125	9 22	1′ 15
190	3 12	13	124	10 30	1 8
185	3 27	15	123	11 27	57
180	3 41	14	122	11 50	23 } 6′ 33″
175	3 59	18	121	12 20	30
170	4 17	18	120	12 45	25
165	4 35	18	115	14 30	1′ 45
160	4 55	20	110	15 55	1 25
155	5 17	22	105	16 35	40
150	5 43	26	100	17 15	40
			90	18 34	2′ 40

Bei 124° findet ein vollkommener Stillstand statt. Die beiden Schmelzpunkte von $PbBi_3$ liegen bei ca. 140 und 124°.

$PbBi_4$. Das specifische Gewicht war 9,73 g. 1) Volumenänderung. Capillarrohr I. Gewicht des angewandten Metalles 167,79 g.

t	*a*	*b*	*t*	*a*	*b*
96	30	—	224	758	3,6
104,2	90	7,3	237	853	7,3
121	201	6,5	218	711	7,5
136,5	490	—	206	687	2,0
145	532	5,0	209	733	—
149,5	555	4,2	194	714	1,3
156	585	4,6	178	690	1,5
164	617	4,0	150	585	3,7
177	660	3,3	134	505	5,0
191	696	2,6	117	164	—
199	708	1,5	105	67	8,0
213	718	0,7			

Zwischen 120 und 136° tritt auch hier wieder eine starke Ausdehnung, herrührend vom Schmelzen, ein.

2) Für die Abkühlungsgeschwindigkeiten ergaben sich folgende Resultate:

t	*m*	*n*	*t*	*m*	*n*
240	2′ 10″	—	215	3′ 14″	14
235	2 21	11″	210	3 30	16
230	2 33	12	205	4 52	1′ 22
225	2 47	14	200	5 50	58

t	*m*	*n*	*t*	*m*	*n*
195	6' 33"	43"	130	14' 52"	44
190	7 13	40	125	16 50	1' 58
185	7 52	39	124	18 10	1 20
180	8 30	38	123	19 10	1 — } 3' 50"
175	9 6	36	122	19 22	12
170	9 43	37	121	19 32	10
165	10 20	37	120	19 40	8
160	10 55	35	115	20 15	35
155	11 30	35	110	20 52	37
150	12 10	40	105	21 33	41
145	12 50	40	100	22 15	42
140	13 28	38	95	23 3	48
135	14 8	40	90	23 55	52

Wir haben hier zwei Stillstände, den einen bis 200° ca. den anderen bei 125°, zwischen diesen ist die Abkühlung bei den höheren Temperaturen eine wesentlich langsamere, als sie nach den Beobachtungen oberhalb 205° sein sollte. Die beiden Schmelzpunkte liegen bei 200 ca. und 125°.

$PbBi_8$. Das specifische Gewicht 8,6 g. 1) Volumenänderung. Capillarrohr I. Gewicht des Metalls 120,6 g; das des Oels 4,7 g.

t	*a*	*b*	*t*	*a*	*b*
94	9	—	230,5	876	8,7
105	85	6,9	239	958	9,6
111,5	127	6,4	223	794	10,2
120	181	6,2	213	704	9,0
125	215	6,8	203,5	632	7,6
130	400	schmelzen	191	570	5,0
140	448	4,8	188	601 (!)	steigt!
150,5	497	4,6	178,5	571	3,4
161	542	4,3	167	542	3,3
172	582	3,6	148	476	3,5
181,5	618	3,8	130,2	397	4,4
193	645	2,3	121	231	erstarrt
204	663	1,6	102	74	8,3
221	793	7,7	89	−57	10,0

Wir haben also auch hier zunächst zwischen 125 und 130° ein theilweises Schmelzen. Darauf folgt eine immer langsamer werdende scheinbare Ausdehnung. Da unterhalb des Schmelzpunktes die Zahlen fast die Ausdehnung des Oeles allein angeben, so folgt ohne weiteres, dass von 172 bis 204° eine starke Contraction der Legirung selbst eintritt.

Bei der Abkühlung tritt zunächst eine Contraction bis 188° und dann bei derselben Temperatur eine starke Dilatation ein.

2) Für die Abkühlungsgeschwindigkeiten ergab sich bei $PbBi_8$.

t	m	n	t	m	n
240°	6,3	—	165°	11,32	37″
235	6,11	8″	160	12,5	33
230	6,20	9	155	12,42	37
225	6,30	10	150	13,17	35
220	6,42	12	145	13,50	33
215	6,54	12	140	14,22	32
210	7,7	13	135	15,3	41
205	7,20	13	130	15,40	37
200	7,34	14	125	16,20	40
195	7,50	16	120	18,00	1′ 40
190	8,6	16	115	20,30	2′ 30
185	8,25	19	110	21,30	1′ 00
180[1])	8,50	25	105	22,10	40
179	9,25	35	100	22,50	40
175	10,10	45	95	23,30	40
170	10,55	45	90	24,14	45

1) Intervall 1° also für 5° 1′ 55″.

Zwischen 122 und 119° findet ein fast vollständiger Stillstand statt. Die beiden Schmelzpunkte sind 170 ca. und 120°.

Die sämmtlichen bei den Bleiwismuthlegirungen gewonnenen Versuchsresultate lassen sich aus der Annahme erklären, dass die Legirungen aus einer bestimmten Verbindung mit einer Zusammensetzung zwischen PbBi und $PbBi_2$ bestehen, deren Schmelzpunkt bei ca. 125° gelegen ist, in welcher dann das überschüssige andere Metall, sei es Blei, sei es Wismuth, sich löst und zwar so, dass bei gleichen Temperaturänderungen die Menge des neu sich lösenden Metalls sehr schnell zunimmt. Je nachdem dieses zweite Metall sich nun bei dem Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand ausdehnt oder nicht, wird unmittelbar oberhalb des Schmelzpunktes das Volumen schneller oder langsamer zunehmen, eventuell gar abnehmen, als bei sehr hohen Temperaturen, wo alles überschüssige Metall gelöst ist und wir die Ausdehnung der Flüssigkeit allein beobachten. Andererseits können wir aber aus den Volumenänderungen oberhalb des ersten Schmelzpunktes der Legirung darauf schliessen, ob das überschüssige Metall sich bei der Verflüssigung ausdehnt

oder nicht. Dementsprechend müssen wir bei dem Blei eine Ausdehnung beim Schmelzen, bei dem Wismuth dagegen eine Contraction annehmen, welch letzteres Resultat auch mit den Ergebnissen anderer Forscher in Einklang stehen.

Eine specielle Erörterung dieses Verhaltens an einer Legirung $PbBi_8$ ergibt das folgende:

Die Legirung $PbBi_8$ besteht aus einem Gemisch von einer niedrig schmelzenden Bleiwismuthlegirung, in welcher Wismuth gelöst enthalten ist. Erwärmen wir die Legirung von 0° an, so dehnt sich die feste Legirung und das feste Wismuth zunächst regelmässig aus und zwar bis etwas oberhalb von 125°. Bei dieser Temperatur schmilzt die Legirung unter starker Ausdehnung, während in ihr festes Wismuth suspendirt bleibt. Dieses löst sich allmählich und schmilzt und zwar mit steigender Temperatur in immer wachsender Menge. Das Wismuth contrahirt sich aber beim Schmelzen, dem entsprechend nimmt die scheinbare Ausdehnung immer mehr und mehr ab. Berücksichtigen wir die Ausdehnung des Oels, wie sie sich etwa aus den Versuchen unter 125° ableitet, so findet für das Metall selbst eine Contraction statt. Wäre das Volumen etwa in derselben Weise von 130° an bis 193° gewachsen, wie von 94° bis 125°, so müsste der Stand der Oelsäule 819 statt 645 betragen haben, also weit grösser gewesen sein, als wir ihn beobachteten. Sowie der letzte Rest Wismuth geschmolzen ist, also unmittelbar nach der geringsten scheinbaren Ausdehnung 1,6, nimmt für das nun ganz flüssige Gemisch die Ausdehnung wieder grosse, den hohen Temperaturen entsprechende Werthe an.

Lässt man die geschmolzene Legirung abkühlen, so ist die Contraction bis 188° regelmässig, bei dieser Temperatur findet eine plötzliche Ausdehnung statt; in der That war ursprünglich das Volumen bei 188° beim Abkühlen kleiner als beim Erwärmen. Wir haben diese Erscheinung so zu erklären, dass das Wismuth in der Legirung bis zu ca. 190° wie in einer übersättigten Lösung enthalten, resp. die Abkühlung zu schnell vor sich gegangen ist, als dass eine vollkommene Ausscheidung eingetreten wäre, und bei 188° diese nun plötzlich stattfindet, wobei eine sehr beträchtliche Ausdehnung zu beobachten ist.

Die Uebersättigung einer Lösung eines Metalls in einem andern ist bei der Leichtigkeit, mit der viele Metalle, wie Gallium etc., im überschmolzenen Zustande erhalten werden können, nicht auffallend.

Aus der obigen Abhandlung ergibt sich für die Volumenänderung der Metalle beim Schmelzen: Beim Schmelzen dehnen sich aus Zinn, Schnellloth, wahrscheinlich nach dem Verhalten der Bleiwismuthlegirungen auch Blei, dagegen zieht sich Wismuth zusammen.

Leipzig, physik.-chem. Laborat., Juli 1883.

III. *Ueber die Verflüssigung des Sauerstoffs, Stickstoffs und Kohlenoxyds;* *von Sigmund v. Wroblewski und Karl Olszewski.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1 u. 2.)

§ 1. Historisches.

Der erste in grösserem Maassstabe ausgeführte Versuch, die permanenten Gase zu verflüssigen, rührt von Daniel Colladon[1]) her. Er hatte dazu im Jahre 1828 einen Apparat construirt, dessen wesentlicher Theil aus einer sehr starken und fast capillaren Glasröhre bestand. Der obere Theil dieser aus dem Apparate vertical herausragenden Röhre war unweit von dem Ende ∩-förmig nach unten gebogen und zugeschmolzen. Während man diesen Schenkel der Röhre in einer Kältemischung abkühlte, wurde das Gas aus einem grösseren Reservoir mit Hülfe einer hydraulischen Presse in die Röhre hineingepumpt und comprimirt. Im Falle der Verflüssigung musste sich die Flüssigkeit in dem abgekühlten Schenkel sammeln. Der Versuch ergab negative Resultate,

1) Citirt in Raoul Pictet's Abhandl. in Ann. de chim. et de phys. (5) **13.** p. 226. 1878.

obgleich die Abkühlung — 30° C. und der Druck 400 Atmosphären betrugen.

Ebenso erfolglos waren die späteren Bemühungen von Faraday und von Natterer. Faraday[1]) kühlte die zur Compression der Gase dienenden Glasröhren in Thilorier's Gemisch von fester Kohlensäure und Aether, welches sich unter der Glocke einer Luftpumpe befand und durch Auspumpen der Luft und dadurch beschleunigtes Verdunsten sehr stark erkaltet war. Die Tension des Dampfes der Kohlensäure stieg dadurch bis auf 1,2 Zoll Quecksilberdruck herunter. Die Temperatur dieses Bades wurde mit einem Alkoholthermometer gemessen, welches von 32° F. abwärts nach Graden gleich dem Abstand zwischen 212 und 32° F. eingetheilt war. Das bei der grössten Verdünnung erreichte Minimum der Temperatur war —110° C. Sauerstoff gab bei dieser Temperatur und bei dem Druck von 27 Atmosphären kein Zeichen von Flüssigwerden, ebenso wenig Stickstoff bei 50 und Kohlenoxyd bei 40 Atmosphären. Faraday erkannte richtig den Grund des Fehlschlagens dieser Versuche in der noch nicht hinreichend niedrigen Temperatur. Eine glänzende Bestätigung dieser Schlussfolgerung zeigten die Versuche von Natterer[2]), welche zur Gewissheit machten, dass man durch blossen Druck auch von etwa 3000 Atmosphären diese Gase nicht flüssig machen kann. Natterer's weitere Versuche, die Verflüssigung der so comprimirten Gase durch Anwendung des Gemisches von Thilorier herbeizuführen, scheiterten an praktischen Schwierigkeiten.

Erst nach mehr als zwanzigjähriger Pause wurde die Frage gleichzeitig durch Cailletet und Raoul Pictet und diesmal mit besserem Erfolg aufgenommen. Die im Jahre 1877 ausgeführten Untersuchungen dieser Forscher[3]) sind zu bekannt, als dass es nöthig wäre, sie eingehend zu beschreiben.

---

1) Faraday, Phil. Trans. for 1845 p. 155 und 173; Ann. de chim. et de phys. (3) **13.** p. 120.; Pogg. Ann. Ergbd. **2.** p. 193. 1848.

2) Natterer, Wien. Ber. **5.** p. 351. 1850; **6.** p. 557. 1851 und **12.** p. 199. 1854.

3) Cailletet, Ann. de chem. et phys. (5) **15.** p. 132. 1878; Raoul Pictet, l. c. p. 145.

Als Pictet den Hahn seines durch das Verdampfen der flüssigen Kohlensäure sehr stark abgekühlten Metallapparates öffnete und den in ihm unter dem Drucke von etwa 450 Atmosphären befindlichen Sauerstoff ausströmen liess, sah er deutlich einen flüssigen Strahl mit äusserster Heftigkeit entweichen. Cailletet comprimirte Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd bis auf 300 Atmosphären in einer Glasröhre, welche durch flüssige schweflige Säure auf -29^0 C. abgekühlt war. Wurden die Gase plötzlich vom Druck befreit, so zeigten sie einen deutlichen Nebel.

Es war hiermit die Möglichkeit, den Sauerstoff zu verflüssigen, dargethan, die Frage aber bei weitem nicht zur Lösung gebracht. .... Die Möglichkeit, den Sauerstoff zu verflüssigen oder in den festen Zustand überzuführen, — sagte Jamin[1]) in der Sitzung der Pariser Academie vom 24. December 1877 — ist jetzt bewiesen; die beiden Versuche der Herren Pictet und Cailletet entsprechen einander; während der erste den Sauerstoff sich in flüssigem Zustande condensiren gesehen hat, so ist dies doch nur sehr vorübergehend gewesen, und andererseits zeigt der von Hrn. Cailletet im Moment der Druckvermindering beobachtete Nebel, dass der Sauerstoff aufgehört hat, durchsichtig, d. h. gasförmig zu sein, und fest oder flüssig geworden ist. Die Flüssigkeit oder den Nebel gesehen zu haben, ohne sie aufzufangen, ist ein und dasselbe. Der definitive Versuch ist noch anzustellen; man muss den Sauerstoff bei seinem Siedepunkte flüssig erhalten, wie es beim Stickoxydul, oder fest, wie bei der Kohlensäure geschehen ist, welche diesen Zustand infolge der enormen Verdunstungswärme beibehält.

Ebenso charakteristisch ist die Aeusserung von Berthelot. Man kann hieraus nichts weiter folgern; — sagte er[2]) in der Sitzung vom 31. December 1877 bei der Besprechung der Arbeiten von Cailletet — wenigstens bis es einem durch die gegenwärtigen Beobachtungen geleiteten Gelehrten gelingt, stabile und dauernd zu beobachtende Flüssigkeiten im statischen Zustande — was noch niemand

1) Jamin, Compt. rend. 85. p. 1218. 1877.

2) Berthelot, Compt. rend. 85. p. 1272 1877.

gelungen ist — aus den bisher zum ersten male durch Hrn. Cailletet, wenn ich so sagen darf, im dynamischen Zustande verflüssigten Gasen zu erhalten, welche sich unter dem Auge des Beobachters bildeten, um sofort wieder zu verdunsten.

Ein weiterer Versuch, den Sauerstoff vollständig zu verflüssigen, wurde von Cailletet[1]) im vorigen Jahre ausgeführt. Er hat dazu in seinem Apparate eine Abänderung gemacht, und zwar das obere Ende der Compressionsröhre ganz auf dieselbe Weise wie Colladon ∩-förmig nach unten gebogen und durch flüssiges Aethylen abgekühlt. Dieses Gas lässt sich mit grosser Leichtigkeit aus dem abgekühltem Recipienten, in welchem es verflüssigt worden ist, in ein Glasgefäss als Flüssigkeit giessen und siedet ruhig unter dem atmosphärischen Druck bei -105^0 C., wenn man die Temperatur mit einem Schwefelkohlenstoffthermometer misst. Obgleich der Sauerstoff in einer so stark abgekühlten Glasröhre bis auf 150 Atmosphären comprimirt wurde, so zeigten sich keine Spuren der Verflüssigung, solange der Druck constant gehalten wurde. Im Augenblicke der Expansion sah aber Cailletet deutlich ein tumultuarisches Sieden, welches während einer merklichen Zeit anhält und dem Emporschleudern einer Flüssigkeit in dem kalten Theile des Rohres entspricht. Dieses Sieden entsteht in einem grossen Abstand von dem Boden des Rohres. Ich habe nicht erkennen können — setzt er hinzu, ob die Flüssigkeit präexistirt oder sich während der Druckverminderung bildet, denn ich habe noch nicht die Trennungsfläche des Gases und der Flüssigkeit sehen können. Dass er vom Aethylen weiter nichts erwartete, kann aus folgenden Schlussworten seiner Abhandlung geschlossen werden: Ich hoffe durch Condensation von schwerer zu verflüssigenden Gasen als das Aethylen durch Apparate, welche ich besitze, die Grenze dieser äussersten Kältegrade noch hinausschieben zu können.

§ 2. Der Apparat.

Der zu dieser Arbeit benutzte Apparat ist von dem einem von uns noch vor seiner Uebersiedelung nach Krakau in

1) Cailletet, Compt. rend. **94.** p. 1224—1226. 1882.

Paris nach seinen Angaben und unter seiner Aufsicht in den Werkstätten von E. Ducretet construirt worden. Er besteht aus einem hohlen aus Eisen geschmiedeten Cylinder *ab* (Fig. 1). Die Länge des Cylinders beträgt 63, die Tiefe 58 cm. Der innere Durchmesser beträgt bei *a* 3,6, bei *b* 5,5 cm, — der äussere bei *a* 8,5 und bei *b* 9,5 cm. Der obere Theil des Cylinders trägt bei *b* ein Schraubengewinde, in dem man mittelst einer Bronzemutter *c* das Bronzestück *d* befestigen kann. Dieses Stück *d* ist in der Richtung *ee* horizontal durchgesägt und dann in der Richtung *f* und *g* vertical durchbohrt. In diese Durchbohrungen und in die kleine Rinne, welche in der Mitte der Durchschnittsfläche *ee* gemacht worden, ist eine äusserst enge und sehr starke Stahlröhre eingelöthet und darauf das abgesägte Stück auf seinem früheren Platz angelöthet. Die Stahlröhre erweitert sich im Bronzestück *d* bei *h*, und in diese Erweiterung wird eine oben und unten offene weite Glasröhre *i* eingekittet. Das Bronzestück *d* hat bei *k* eine Flantsche mit einem konischen Ansatz. *l* ist eine zweite central durchbohrte bronzene Flantsche mit genau zu dem Ansatz angepasster, konischer Vertiefung, in welche ein starkes, unten zugeschmolzenes Glasrohr *m* eingekittet wird. Dieses Rohr hat einen inneren Durchmesser von etwa 0,15 cm. Beide Flantschen können mit Hülfe von vier Schrauben *n* luftdicht zusammengeschraubt werden. Die Bronzemutter *c* ist, um mit Leichtigkeit an das Bronzestück *d* angesetzt werden zu können, vertical in der Richtung der Axe in zwei Hälften durchgesägt und dann durch zwei in der Richtung *o* horizontal geführte Stahlschrauben zusammen geschraubt. Das Ansatzstück *p* setzt das Innere des Apparates in Verbindung mit dem Manometer und der Cailletet'schen Pumpe.

Die Stärke des Apparates ist auf 500 Atmosphären berechnet. Seine Benutzungsweise ist dieselbe wie die des Apparates von Cailletet. Der hohle Cylinder *ab* wird mit Quecksilber und das in das Bronzestück *d* eingekittete Glasrohr *i* sammt der Stahlröhre und dem Röhrchen *m* mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt. Setzt man die Pumpe in Thätigkeit, so wird das Gas durch das im Glasrohr *i* auf-

steigende Quecksilber in die Röhre *m* getrieben und dort comprimirt.[1])

Der Apparat ist speciell zum Studium des Einflusses der in der Flüssigkeit gelösten Gasmenge auf die Oberflächenspannung der Flüssigkeit, also zur Fortsetzung der im vorigen Jahre von einem von uns in Paris ausgeführten Untersuchungen construirt worden.[2]) Zu diesem Zwecke wird in das Rohr *m* ein Tropfen der zu untersuchenden Flüssigkeit gebracht und in dieselbe ein äusserst dünnes Capillarröhrchen eingesetzt.

Der Apparat kann aber auch zu allen Versuchen benutzt werden, welche man mit Hülfe des Cailletet'schen Apparates ausführt. Dazu wird blos das Bronzestück *d* durch ein anderes ⊥-förmiges, axial durchbohrtes Bronzestück mit einer nach der Art der Cailletet'schen Röhren geblasenen und in ihm eingekitteten Glasröhre ersetzt. In diesem Falle bietet der Apparat den Vorzug vor dem Cailletet'schen, dass er mit einer fünf bis sechs mal grösseren Gasmenge zu arbeiten gestattet.

Es lag zuerst nicht in unserer Absicht, an die Verflüssigung der Gase zu gehen. Wir wollten sehen, in wie weit die Temperaturen im Augenblicke der Expansion der vorher comprimirten Gase sich bestimmen lassen. Diese Versuche führten uns auf den Gedanken, auf die Cailletet'schen Versuche das bereits von Faraday benutzte Princip — die Siedetemperatur einer Flüssigkeit durch die beschleunigte Verdunstung im Vacuum zu erniedrigen — anzuwenden. Die Ausführung dieser Versuche war um so leichter, als einer von uns noch während seines Aufenthaltes in Paris reichlich Gelegenheit hatte, sich mit der ganzen Technik der von Cailletet construirten Apparate und von ihm angegebenen Untersuchungsmethoden vertraut zu machen. Die Cailletet'-

1) Das Stück *d* ist aus Bronze gemacht, da seine Ausführung aus Stahl unmöglich war. Damit es aber vom Quecksilber nicht angegriffen werden konnte, besteht der ganze Canal — wie bereits erwähnt — aus einer äusserst engen Stahlröhre. Das aufsteigende Quecksilber kann deshalb nie in Berührung mit der Bronze kommen.

2) v. Wroblewski, Compt. rend. 95. p. 284—287 u. p. 342—343. 1882.

schen Apparate gehören jetzt zu den classischen und am meisten in Frankreich verbreiteten Instrumenten und haben bereits zu einer Reihe wichtiger Entdeckungen geführt. Was die Methoden anbetrifft, so machte Cailletet aus ihnen kein Geheimniss sowohl während der electrischen Ausstellung in Paris, wo er sie öffentlich demonstrirte, wie später im Laboratorium von Hrn. Debray in der Ecole Normale Superieure.

Die zur Ausführung unserer Versuche bestimmte Zusammenstellung des Apparates ist in der Fig. 2 abgebildet.

Das Rohr *i* mit der nach abwärts gebogenen und am Ende zugeschmolzenen Capillare *q* fasst etwa 200 ccm Gas. Die Capillare *q* hat 0,9 cm äusseren und etwas mehr als 0,2 cm inneren Durchmesser. Die Länge des nach abwärts gebogenen Schenkels betrug je nach Bedürfniss 13 bis 15 cm. Das Rohr *i* wird mit Hülfe der Jolly'schen Quecksilberluftpumpe mit dem zu untersuchenden Gase gefüllt.

Auf die Capillare *q* ist ein Kautschukpfropfen *r* luftdicht aufgesetzt, welcher auf das aus einer 4,1 cm im Durchmesser haltenden Glasröhre geblasene Gefäss *s* ebenfalls luftdicht passt. Im Kautschukpfropfen *r* befinden sich noch drei Löcher. Das eine Loch dient zur Aufnahme eines kleinen nach dem Princip des Jolly'schen Luftthermometers[1]) construirten Wasserstoffthermometers *t*. Das zweite[2]) dient zur Aufnahme eines oben offenen und unten zugeschmolzenen Glasröhrchens, in welches einige Tropfen der auf die Erstarrung zu untersuchenden Flüssigkeit hineingegossen werden. Sowohl der Boden dieses Röhrchens wie das Kugelgefäss des Wasserstoffthermometers befinden sich in derselben Tiefe wie das zugeschmolzene Ende der Capillare *q*. Durch das dritte Loch geht ein kurzes T-förmiges Glasrohr *u*. Alle diese drei Stücke sitzen luftdicht im Kautschuk.

Das eine seitlich gerichtete Ende des T-Rohres *u* ist durch eine weite Bleiröhre *v* mit der grossen einstiefligen doppelt wirkenden Luftpumpe (System Bianchi) verbunden. Das andere in der Richtung der Axe des Gefässes *s* befind-

1) Jolly, Pogg. Ann. Jubelb. p. 82. 1874.

2) In der Figur nicht angegeben.

liche Ende dient zur Aufnahme eines dünnen 2 m langen Kupferrohres *w*, welches zu dem das flüssige Aethylen enthaltenden Recipienten *x* der Natterer'schen Compressionspumpe führt. Dieses Kupferrohr ist mit Hülfe des Kautschukringes *d'* in das Glasrohr *u* luftdicht eingesetzt, sein Ende ist durch einen Boden geschlossen, und nur bei *c* hat es zwei oder vier stecknadelweite, seitlich angebrachte Oeffnungen zum Ausströmen des Aethylens.

Der das Aethylen enthaltende eiserne Recipient *x* sitzt mit dem Schraubenhahn *a'* nach unten gekehrt in einem Blechgefäss *z*, wo er mit Eis und Kochsalz abgekühlt wird. Der spiralförmig zusammen gewickelte Theil des Kupferrohres *w* befindet sich in einem mit doppelter Blechwand versehenen Gefässe *b'*, welches mit Aether und fester Kohlensäure ganz gefüllt wird.

Das langsam aus dem Recipienten ausgelassene Aethylen wird also vorher im Kohlensäurebade gekühlt, ehe es in das Glasgefäss *s* gelangen kann. Dank diesem Verfahren wird wenig Aethylen in gasförmiger Form nutzlos verloren.[1]) Ist das Aethylen mit gehöriger Vorsicht dargestellt worden, und waren alle Apparate rein, so ist das flüssige Aethylen fast so farblos und durchsichtig wie Wasser.

Damit beim Eingiessen des flüssigen Aethylens das Glasgefäss *s* sich nicht mit Reif an der Oberfläche beschlägt, ist es mit Hülfe eines Kautschukringes luftdicht in einen etwas weiteren Glascylinder *y* eingesetzt, welcher etwas Chlorcalcium enthält. Diese bereits von Cailletet gebrauchte Einrichtung gestattet, alles zu sehen, was in der Capillare *q* geschieht.

Ist das Gefäss *s* mit hinreichender Menge des flüssigen Aethylens gefüllt, so wird der Schraubenhahn *a'* des Recipienten *x* zugedreht, die Bleiröhre *v* mit der Bianchi'schen Pumpe in Verbindung gebracht und die Pumpe in Thätigkeit gesetzt.

Das Aethylen siedet zuerst stossweise, und dann verdunstet es ganz ruhig. Die Bianchi'sche Pumpe, wenn sie

1) Für gewöhnlich genügten für einen Versuch 2—300 g Aethylen und etwa 400 g fester Kohlensäure.

vom Apparate getrennt war, gestattete, den Druck nur bis auf 1,5 cm Quecksilber herunter zu bringen. Bei der grössten Verdünnung, welche beim Pumpen des Aethylens erreicht war, zeigte das Manometer der Pumpe noch 2,5 cm Quecksilberdruck.

Der Apparat sammt dem Luftmanometer konnte während des Versuches durch einen Schraubenhahn von der Cailletet'schen Pumpe getrennt werden.

Zu den exacten Druckmessungen diente dasselbe Manometer, welches von einem von uns bei seinen Untersuchungen über das Hydrat der Kohlensäure benutzt wurde.[1])

Der Apparat erwies sich als vollständig gefahrlos, und mit Ausnahme eines einzigen Falles, wo durch Versehen das Quecksilber aus dem Rohr i in die Capillare q in die Nähe des flüssigen Sauerstoffes kam und zufror, und wo natürlich als Folge davon eine Explosion stattfand (die übrigens den Apparat nicht zertrümmert hatte), ist kein Unglück vorgekommen. Bei den Beobachtungen wurden keine Vorsichtsmaassregeln angewendet und die Erscheinungen in der Capillare q mit einem unbewaffneten kurzsichtigen Auge beobachtet.

§ 3. Die Temperaturen.

Nach Angaben von Cailletet[2]) siedet das Aethylen — wie bereits erwähnt — unter dem atmosphärischen Druck bei -105^0 C., wenn die Temperatur mit einem Schwefelkohlenstoffthermometer gemessen wird. Mit einem Wasserstoffthermometer gemessen schwankt diese Temperatur zwischen -101 und -103^0 C. Diese Schwankungen mit dem Barometerstand in Einklang zu bringen, war nicht möglich. Auch ein anderer Umstand verdient erwähnt zu werden. War das Aethylen in das Glasgefäss s eingegossen und der Schraubenhahn des Recipienten zugedreht, so zeigte immer das Thermometer im ersten Augenblicke eine etwas niedrigere Temperatur als später. Diese Unregelmässigkeiten stehen offenbar im Zusammenhange mit den von Faraday am Aethylen beobach-

---

1) v. Wroblewski, Compt. rend. **94.** p. 954. 1882 und Wied. Ann. **17.** p. 111. 1882.

2) Cailletet, Compt. rend. **94.** p. 1224. 1882.

teten Unregelmässigkeiten im Bezug auf seine Dampfspannung, die Faraday zur Ueberzeugung brachten, dass im Aethylen „zwei oder mehrere physikalisch und vielleicht auch chemisch verschiedene Substanzen vorhanden sind, deren Verhältniss nach der Temperatur, den Verhältnissen der Ingredienzen u.s.w. bei der Bereitung schwankt.“[1])

Das zu diesen Untersuchungen benutzte Aethylen wurde nach dem Verfahren von Erlenmeyer und Bunte[2]) dargestellt, mit concentrirter Schwefelsäure und Natronlauge gewaschen, in einem 1 cbm Gas fassenden Gasometer unter Wasser gesammelt und vor dem Einpumpen noch einmal durch Natronlauge geleitet und mit Schwefelsäure und Chlorcalcium getrocknet. Die Temperaturen wurden mit zwei Wasserstoffthermometern gemessen, in deren einem die Gasfüllung zweimal gewechselt worden war. Die Angaben waren stets dieselben.

Der Umstand, dass das Schwefelkohlenstoffthermometer eine niedrigere Temperatur zeigt als das Wasserstoffthermometer, ist leicht zu erklären. Der Schwefelkohlenstoff erstarrt bereits bei der Temperatur von etwa -116^0 C. Ein Paar Minuten des Auspumpens des Aethylens genügen schon, um diese Temperatur hervorzubringen. Der Schwefelkohlenstoff beginnt also bei der Temperatur des Siedens des Aethylens unter dem atmosphärischen Druck bereits sich stärker zusammenzuziehen, als es die nach dem Verhalten des Schwefelkohlenstoffs bei viel höheren Temperaturen eingerichtete Scala des Thermometers voraussetzt. Wenn der Schwefelkohlenstoff im Thermometer erstarrt, zerreisst sein Faden in mehrere Theile.

Zur Bestimmung der Temperatur der Erstarrung und Schmelzung diente das bereits erwähnte Glasröhrchen. In dieses Röhrchen wurde ein langer Glasfaden eingesetzt, und indem man ihn in der zu untersuchenden Flüssigkeit bewegte, konnte man das Dickwerden der Flüssigkeit mit der Abnahme der Temperatur sehr leicht beobachten. Im Augen-

1) Faraday, Pogg. Ann. Ergb. 2. p. 202. 1848.
2) Erlenmeyer u. Bunte. Lieb. Ann. 168. p. 64.

blicke, in welchem der Faden nicht mehr aus der Flüssigkeit herauszuziehen war, wo also die Erstarrung erfolgte, wurde die Temperatur am Wasserstoffthermometer abgelesen. Dasselbe geschah, wenn die Thätigkeit der Pumpe unterbrochen wurde, und wenn bei der allmählich sich erhöhenden Temperatur des Aethylens die Schmelzung eintrat.

Der Schmelzpunkt des Schwefelkohlenstoffes liegt bei etwa —110° C.

Von anderen von uns untersuchten Substanzen war der 95 procent. Alkohol zähe wie dickes Oel bei —129° C., er erstarrte zu einer weissen festen Masse bei etwa —130,5° C. Es gelang, durch einen plötzlichen Ruck den eingefrorenen Glasfaden mit einem Stück festen Alkohols aus dem Gläschen herauszuziehen. Nach ein Paar Secunden schmolz es zu einem Tropfen. Methylalkohol erstarrte bei einer viel höheren Temperatur, die nicht notirt worden ist. Phosphorchlorür erstarrte etwa bei —111,8° C. Diese Bestimmungen sind an vollkommen chemisch reinen Präparaten zu wiederholen.

Alle diese Körper sind unseres Wissens hier zum ersten mal in den festen Zustand übergeführt worden. Von der Erstarrung dieser Substanzen sprechen weder Faraday, noch Natterer, noch Raoul Pictet.

Die niedrigste Temperatur, die wir erreichten, wenn das Manometer der Bianchi'schen Pumpe 2,5 cm Quecksilberdruck zeigte, war —136° C. Nur ein einziges mal sank die Temperatur bis auf —139° C.

Es fragt sich, in wie weit man diesen Temperaturbestimmungen Vertrauen schenken kann. Die Antwort wird offenbar davon abhängen, bei welcher Temperatur, und unter welchem Drucke die Verflüssigung des Wasserstoffes stattfindet. Um eine Vorstellung davon zu bekommen, füllten wir das Rohr *i* mit Wasserstoff. Das Gas wurde auf 150 Atmosphären comprimirt, auf etwa —136° C. abgekühlt und dann plötzlich vom Drucke befreit. Es zeigten sich bei der Expansion keine Spuren der Verflüssigung, nicht sogar der von Cailletet gesehene Nebel.[1]) Aus diesem Versuche

---

1) Cailletet, Compt. rend. **85.** p. 1270. 1877.

lässt sich schliessen, dass die Verflüssigungstemperatur des Wasserstoffes noch viel tiefer als -136^{0} C. liegen muss.[1]) Der Druck, unter welchem sich der Wasserstoff in unseren Thermometern befand, betrug bei -136^{0} C. etwa 49 cm Quecksilber. Die Benutzung eines Wasserstoffthermometers bei diesen Temperaturen ist deshalb vollständig berechtigt und sicher.

Es wäre von Interesse, zu untersuchen, ob das von uns erreichte Minimum nicht überhaupt die niedrigste Temperatur war, welche jemals gemessen worden ist. Faraday — wie bereits erwähnt — bediente sich bei seinen Versuchen des Alkoholthermometers, Cailletet des Schwefelkohlenstoffthermometers. Nach Natterer[2]) soll das Gemisch von flüssigem Stickstoffoxydul mit Schwefelkohlenstoff unter der Glocke einer Luftpumpe die Temperatur -140^{0} C. zeigen. Mit was für einem Thermometer diese Bestimmung gemacht worden, ist nicht angegeben. Natterer sagt aber ausdrücklich, dass bei dieser „niedrigen Temperatur weder Chlor noch Schwefelkohlenstoff von ihrer Leichtflüssigkeit etwas verlieren.“ Da aber Schwefelkohlenstoff bereits bei -116^{0} C. erstarrt, so muss die Temperaturbestimmung höchst mangelhaft gewesen sein.[3]) So weit wäre unser Minimum die niedrigste bis jetzt gemessene Temperatur.

---

1) Dies würde mit den approximativen Werthen stimmen, welche Sarrau (Compt. rend. 94. p. 639, 718 u. 845. 1882) aus den Versuchen von Amagat über die Zusammendrückbarkeit der Gase für die kritischen Temperaturen und Drucke dieser Gase abgeleitet hat. Er findet:

	kritische Temperatur	kritischer Druck
für O	$-105,4^{0}$ C.	48,7 Atmosphären
„ N	$-123,8$ „	42,1 „
„ H	$-174,2$ „	98,9 „

Nach einer Berechnung von van der Waals (Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes p. 102. 1881) würde die kritische Temperatur des Wasserstoffes sogar nur wenig von -273^{0} C. entfernt sein.

2) Natterer, Lieb. Ann. 54. p. 254. 1845.

3) Auf eine mündliche Anfrage hatte Hr. Natterer die Güte, einem von uns zu erklären, dass sein Thermometer Phosphorchlorür enthielt. Diese Substanz erstarrt aber — wie der Versuch zeigt — bereits bei etwa $-111,8^{0}$ C.

Es lässt sich aber leider kein Vergleich mit den von Pictet angegebenen Temperaturen von —130 und —140° C. machen, da dieser Forscher die Temperaturen nicht gemessen, sondern aus den Druckmessungen mit Hülfe von Zahlen abgeleitet hat, die durchaus nicht als sicher bekannt zu betrachten sind. Es wäre deshalb von grossem Interesse, wenn Pictet jetzt seine „thermomètres dynamomètres" mit den Angaben eines Luft- oder Wasserstoffthermometers vergleichen würde.

§ 4. Die Verflüssigung des Sauerstoffs.

Der Sauerstoff wurde aus chemisch reinem chlorsauren Kali entwickelt, mit Kalilauge gewaschen, mit concentrirter Schwefelsäure getrocknet und aus einem Quecksilbergasometer in das Rohr *i* geleitet.

Bei der Abkühlung der Capillare *q* auf etwa —130° C. genügt schon der Druck von etwas mehr als zwanzig Atmosphären, um das Gas vollständig zu verflüssigen.

Der flüssige Sauerstoff sammelt sich im unteren Theil des nach abwärts gebogenen Schenkels. Er ist eine durchsichtige, äusserst bewegliche, farblose Flüssigkeit mit einem deutlichen, aber viel flacheren Meniscus als der der Kohlensäure. Bei Verminderung des Druckes schäumt sie, verdunstet an der Oberfläche und — wenn der Druck etwas mehr abnimmt — siedet in der ganzen Masse. Wir haben grosses Gewicht auf die exacte Ermittelung der Verflüssigungscurve gelegt und eine grosse Anzahl von Bestimmungen bei den Temperaturen zwischen —119 und —136° C. gemacht. Zu diesem Zwecke wurde der Druck im Apparate in dem Augenblicke beobachtet, in welchem die ersten Spuren der Flüssigkeit im zugeschmolzenen Ende der Capillare sich zeigten. Gleichzeitig wurde das Thermometer abgelesen.

Während die Drucke bei den niedrigsten fast stationären Temperaturen mit Leichtigkeit sich ermitteln liessen, ist dies bei weitem nicht der Fall bei höheren sehr kurz andauernden Temperaturen gewêsen. Der Grund dazu liegt darin, dass das Sinken der Temperatur des Aethylens sich nicht gut reguliren lässt, und da das Thermometer aus einer dünn-

wandigen Glasröhre geblasen ist, so geht es im Bezug auf die Temperatur der dickwandigen Compressionsröhre immer voran. Daher kam es, dass die einzelnen Bestimmungen für eine und dieselbe Temperatur oft um fünf bis acht Atmosphären differirten.

Es werden deshalb hier nur die Zahlen mitgetheilt, welche sich auf die niedrigsten Temperaturen beziehen.

Temperatur	−129,6	−131,6	−133,4	−134,8	−135,8° C.
Druck	27,02	25,85	24,4	23,18	22,2 Atmosphären.

Bei den höheren Temperaturen steigt der Druck — soweit man die Versuche übersehen kann — rasch in die Höhe.

§ 5. Die Verflüssigung des Stickstoffs und des Kohlenoxyds.

Nachdem es uns gelungen war, den Sauerstoff vollständig zu verflüssigen, versuchten wir, auf dieselbe Weise Stickstoff und Kohlenoxyd in den flüssigen Zustand zu überführen.

Die Verflüssigung dieser beiden Gase ist bedeutend schwieriger als diejenige des Sauerstoffes und geschieht unter so ähnlichen Verhältnissen, dass es vorläufig unmöglich ist, zu sagen, welches von beiden Gasen sich leichter verflüssigt.

Bei der Temperatur von etwa −136° C. und unter dem Drucke von etwa 150 Atmosphären verflüssigt sich weder Stickstoff noch Kohlenoxyd. Die Capillare bleibt vollständig durchsichtig, und keine Spur von Flüssigkeit ist zu bemerken. Wird das Gas plötzlich von dem Drucke befreit, so sieht man in der Röhre mit dem Stickstoff ein gewaltiges Aufbrausen von Flüssigkeit, welches nur mit dem Aufbrausen der flüssigen Kohlensäure in einer Natterer'schen Röhre zu vergleichen ist, wenn die letztere in ein Glas mit heissem Wasser gestellt wird. Beim Kohlenoxyd tritt das Sieden nicht so stark auf.

Wird aber die Expansion nicht zu schnell ausgeführt, und lässt man den Druck nicht unter 50 Atmosphären sinken, so verflüssigt sich sowohl Stickstoff wie Kohlenoxyd vollständig, die Flüssigkeit zeigt einen deutlichen Meniscus und verdampft sehr rasch.

Die beiden Gase können also nur binnen wenigen Secunden als Flüssigkeiten im statischen Zustande erhalten

werden. Um sie länger in diesem Zustande zu halten, müsste man eine etwas tiefere Temperatur haben, als das Minimum, welches uns zu erreichen möglich gewesen ist.

Stickstoff und Kohlenoxyd im flüssigen Zustande sind farblos und durchsichtig.

Physik. Inst. d. Universität Krakau.

IV. *Ueber die innere Reibung einiger Lösungen und die Reibungsconstante des Wassers bei verschiedenen Temperaturen; von K. F. Slotte.*

(Hierzu Taf. I Fig. 8.)

In einem früheren Aufsatze[1]) habe ich die Resultate einer Versuchsreihe über die innere Reibung der Lösungen einiger Chromate mitgetheilt. Aus dieser Untersuchung ergab sich, dass die Lösungen der genannten Salze, wenn man sie in Bezug auf die Zähigkeit mit den von Sprung[2]) untersuchten Salzlösungen vergleicht, zwischen den Lösungen der Sulfate und der Chloride ihren Platz erhalten. Aus den von verschiedenen Beobachtern ausgeführten Versuchen über die innere Reibung der Säure- und Salzlösungen geht ausserdem hervor, dass auch die Säuren, welche bisher in dieser Beziehung untersucht worden sind, wenn man sie nach dem Procentgehalte ihrer Lösungen vergleicht, derselben Ordnung folgen, wie die entsprechenden Salze. Ueber die Chromsäure sind indessen hinsichtlich der Zähigkeit bisher keine Beobachtungen gemacht. Ich habe daher mit Rücksicht auf die erwähnten Beobachtungsresultate die Reibungsconstanten einiger Lösungen der genannten Säure nach der Ausflussmethode bestimmt.

Aus den bisher ausgeführten Beobachtungen ergibt sich auch, dass die Lösungen der mehrbasischen Säuren und der entsprechenden (normalen) Salze bei gleichem Procentgehalte

---

1) Slotte, Wied. Ann. **14.** p. 13. 1881.

2) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.

überhaupt eine grössere Zähigkeit besitzen als die Lösungen der einbasischen Säuren und ihrer Salze. Aus diesem Gesichtspunkte schien es mir von Interesse zu sein, das Verhalten der Carbonate und Orthophosphate bezüglich der inneren Reibung zu untersuchen. Deshalb habe ich auch die Reibungsconstanten einiger Lösungen von normalem kohlensauren Kalium und Natrium, normalem orthophosphorsauren Natrium und von der Orthophosphorsäure selbst (früher von Grotrian[1]) untersucht) nach der angegebenen Methode bestimmt. Zu einer beabsichtigten Untersuchung der normalen Orthophosphate des Kaliums und Ammoniums habe ich noch nicht genügend reine Salze bekommen können.

Im Anschlusse an diese Versuchsreihe und mit demselben Apparate habe ich schliesslich die Reibungsconstanten des Wassers für das ganze Temperaturgebiet 0—100° zu bestimmen gesucht. Diese letztgenannten Versuche wurden ausgeführt, theils weil Beobachtungen über die innere Reibung des Wassers in der Nähe des Siedepunktes — soweit mir bekannt — bisher nur von Rosencranz[2]) angestellt worden sind, theils auch um die Anwendbarkeit einer von mir im vorigen Aufsatze mitgetheilten Interpolationsformel für ein grösseres Temperaturintervall zu prüfen.

1. Beschreibung der Versuche und Berechnung der Constanten.

Der angewandte Apparat war bei diesen wie bei den vorigen Versuchen im wesentlichen nach der von Hrn. G. Wiedemann[3]) gegebenen und später von Sprung und anderen benutzten Anordnung eingerichtet. Doch sind folgende Veränderungen zu erwähnen. An dem Ausflussrohre (Fig. 3) war bei f ein Glasbehälter festgeschmolzen, innerhalb welchem das Rohr bei c ausmündete. Die Ausflussmündung befand sich, wie bei dem von Sprung benutzten Apparate, in derselben Höhe wie die Mitte der Kugel k. Die Mündung des Behälters war durch einen Kautschukstöpsel

1) Grotrian, Pogg. Ann. **160**. p. 238. 1877.
2) O. E. Meyer, Wied. Ann. **2**. p. 387. 1877.
3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **99**. p. 221. 1856.

geschlossen und in diesen zwei Glasröhren *d* und *e* in der Weise eingesetzt, dass das Ganze eine Spritzflasche bildete. Das Rohr *d* hatte eine solche Gestalt und Lage, dass seine Mündung durch eine leichte horizontale Drehung gerade über die Mündung *a* des Ausflussrohres gebracht werden konnte. Die in den Behälter ausgeflossene Flüssigkeit konnte somit sehr bequem in die Kugel zurückgebracht werden. Das Ausflussrohr mit dem Behälter und den übrigen zugehörigen Theilen war an einem Stative *s* befestigt und in einen mit Wasser gefüllten Kasten eingesetzt, der aus dickem Messingblech verfertigt und wie gewöhnlich mit Seitenwänden aus Glas versehen war. Das Capillarrohr befand sich im Kasten etwa 9 cm über dem Boden desselben. Die Erwärmung des Wasserbades wurde mit untergestellten Gasflammen bewerkstelligt. Störende Temperaturschwankungen konnten auch in dieser Weise sehr gut verhindert werden.

Die Beobachtungen wurden übrigens ganz in derselben Weise ausgeführt, wie die früher beschriebenen.

Das zu den Versuchen benutzte Chromsäureanhydrid enthielt ursprünglich etwa $15^0/_0$ Schwefelsäure. Um diese zu entfernen, wurde das Anhydrid zuerst mehrmals mit reiner Salpetersäure vom specifischen Gewichte 1,41 gewaschen und darauf in ein trichterförmig ausgezogenes Glasrohr, welches nach Bunsen's Vorschrift mit einem Bimssteinfilter versehen war, eingeführt. Hiernach wurde ein trockener, 60 bis 80^0 warmer Luftstrom mehrere Stunden durch das Rohr geleitet und so die Salpetersäure weggeschafft. Nach dieser Behandlung enthielt das Anhydrid nur unbedeutende Spuren von Schwefelsäure.

Das Kaliumcarbonat wurde als rein gekauft und ohne Umkrystallisirung zu den Versuchen benutzt.

Das Natriumcarbonat wurde mehrmals umkrystallisirt.

Die Phosphorsäure wurde in fester Form gekauft und in warmem Wasser aufgelöst.

Das Natriumorthophosphat wurde aus Na_2HPO_4 durch Versetzen mit NaHO bereitet und zweimal umkrystallisirt.

Um den Procentgehalt zu bestimmen, wurden die Lö-

sungen analysirt. Die Analysen von den Lösungen der Chromsäure wurden in derselben Weise ausgeführt, wie die Analysen bei den vorigen Versuchen, indem die Säure mit Alkohol reducirt, mit Ammoniak ausgefällt und schliesslich als Cr_2O_3 gewogen wurde.

Der Procentgehalt von den Lösungen der beiden Carbonate wurde durch Abdampfen und Glühen ermittelt. Zur Controle wurde ausserdem für zwei Lösungen des Kaliumsalzes das Kalium als K_2PtCl_6 und für zwei Lösungen des Natriumsalzes das Natrium als Na_2SO_4 bestimmt.

Bei den Lösungen der Orthophosphorsäure und des Natriumorthophosphates wurde die Säure zuerst von mir gewichtsanalytisch als $Mg_2P_2O_7$, dann zur Controle auch von Hrn. Mag. phil. Juslin mittelst Titriranalysen bestimmt. Später wurde noch eine gewogene Menge von der mit 4. bezeichneten H_3PO_4-Lösung durch Vertreiben des Wassers in Metasäure übergeführt und als solche gewogen. Der so erhaltene Procentgehalt stimmte mit den früher gefundenen befriedigend überein. — Für die dreibasische Phosphorsäure hat Watts [1]) eine Tabelle gegeben, in welcher das specifische Gewicht und der Gehalt an P_2O_5 für verschiedene Concentrationen zusammengestellt sind. Ich habe nach dieser Tabelle die Procentgehalte der von mir untersuchten Phosphorsäurelösungen aus der Dichte berechnet. Die so gefundenen Zahlen weichen aber, besonders für die stärkeren Concentrationen, von den aus den Analysen erhaltenen beträchtlich ab.

Folgende Tabelle enthält die Resultate der ausgeführten Analysen.

	H_2CrO_4				K_2CO_3			Na_2CO_3		
	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	1.	2.	3.
Gef.	18,67	33,61	45,60	58,78	16,31	28,66	39,00	5,95	11,51	15,85
Proc.	18,66	33,52	45,79	59,11	16,30	—	39,08	5,97	11,49	—

	H_3PO_4				Na_3PO_4	
	1.	2.	3.	4.	1.	2.
Gewichtsanalyse	8,51	17,65	34,41	47,99	4,88	9,02
Titriranalyse	8,41	17,75	33,98	47,58	4,72	8,79

1) Watts, Chem. News. 12. p. 160.

Die Dichten der Lösungen sind mit einem Pyknometer bei Zimmertemperatur bestimmt.

Zur Berechnung der Constanten habe ich die **Poiseuille-Hagenbach'sche** Formel angewendet, und zwar, um die Constanten in den gebräuchlichen Einheiten zu bekommen, in folgender Gestalt:

$$\eta = \frac{\pi h \delta g r^4}{8 v l} \cdot t - \frac{v d}{2^{10/3} \pi l} \cdot \frac{1}{t}. \tag{1}$$

In dieser Formel bedeutet:

η die Reibungsconstante,
v das in der Zeit t ausgeflossene Volumen,
r den Radius } des Capillarrohres,
l die Länge }
h die Höhe } der drückenden Wassersäule,
δ die Dichte }
d die Dichte der ausströmenden Flüssigkeit,
g die Beschleunigung der Schwere.

v wurde durch Auswägen mit Wasser bestimmt. Als Mittel dreier so gefundenen Werthe ergab sich:

$$v = 36{,}312 \text{ cm}^3.$$

Der Querschnitt des Capillarrohres wurde durch eingeführte Quecksilberfäden ermittelt und an verschiedenen Stellen des Rohres sehr nahe gleich gefunden. Drei Bestimmungen wurden ausgeführt und gaben nahe übereinstimmende Werthe. Es wurde so gefunden:

$$\pi r^2 = 0{,}001\,431\,9 \text{ cm}^2.$$

Die übrigen in (1) vorkommenden constanten Grössen waren:

$l = 31{,}74$ cm. $\delta = 0{,}999 \text{ g cm}^{-3}$
$h = 180$ cm. $g = 981{,}8 \text{ cm sec}^{-2}$.

Die Mittel der beobachteten Ausflusszeiten bezeichne ich mit τ. Dann ist, wie durch Vergleichung der von mir benutzten Secundenuhr mit einer Normaluhr ermittelt wurde:

$$t = 0{,}999\ \tau \text{ sec.}$$

zu setzen.

Werden diese Zahlen in (1) eingesetzt, so erhält man:

$$\eta_t = 0{,}000\,012\,484 \,.\, \tau - \frac{0{,}03617 \,.\, d}{\tau}, \tag{2}$$

welche Formel die Reibungsconstante in Einheiten liefert, deren Dimension ist $g\,cm^{-1}\,sec^{-1}$.

Bezeichnet z die sogenannte specifische Zähigkeit und η_0 die Reibungsconstante des Wassers bei 0°, so ist:

$$z = \frac{100 \,.\, \eta}{\eta_0}.$$

Bei meinen Versuchen wurde nicht die Ausflusszeit des Wassers genau bei 0° bestimmt. Um jedoch die specifischen Zähigkeiten für die von mir untersuchten Flüssigkeiten angenähert berechnen zu können, setze ich $\eta_0 = 0{,}018$, eine Zahl, die von dem wahren Werthe nicht sehr viel abweichen kann. Dann wird:

$$z = \frac{100\,\eta}{0{,}018}.$$

In den folgenden Tabellen sind die Resultate meiner Versuche zusammengestellt. T bezeichnet die Temperatur, p den Procentgehalt, d die Dichte, τ das Mittel aus den beobachteten Ausflusszeiten, η die Reibungsconstante und z die specifische Zähigkeit.

Bei der Berechnung von η und z für Wasser ist die Veränderlichkeit der Dichte mit der Temperatur in gehörigem Maasse berücksichtigt.

Wasser.

T	Die beobachteten Ausflusszeiten				τ	η	z
0,2°	1440,4	1440,2	—	—	1440,3	0,01796	99,8
10	1056,2	1055,3	1056,2	1056	1055,9	1315	73,1
20	812	811,8	811,5	811,5	811,7	1009	56,1
30	648,7	649	649	648,7	648,8	804	44,7
40	533,2	533,3	533,3	533,5	533,3	659	36,6
50,1	450,6	450	—	—	450,3	554	30,8
60,2	386	386,1	—	—	386	473	26,3
70,1	337,5	337	—	—	337,2	410	22,8
80,1	298,7	298,9	—	—	298,8	361	20,1
90	267,8	268,4	268,5	268,1	268,2	322	17,9
97	249,6	249,7	249,8	—	249,7	298	16,6

H_2CrO_4.

	1. p = 18,66 d = 1,125			2. p = 33,56 d = 1,2436		
T	τ	η	z	τ	η	z
10°	1184,7	0,01475	82	1423,5	0,01774	98,5
20	936,8	1165	64,7	1133,3	1411	78,4
30	762,6	947	52,6	926,4	1152	64
40	635,8	787	43,7	775,4	962	53,5

	3. p = 45,7 d = 1,3598			4. p = 58,94 d = 1,5145		
T	τ	η	z	τ	η	z
10°	1831,9	0,02284	126,9	2847,8	0,03553	197,4
20	1447,1	1803	100,2	2217,7	2766	153,7
30	1179,9	1469	81,6	1783,9	2224	123,5
40	983,7	1224	68	1472,8	1835	101,9

K_2CO_3.

	1. p=16,31 d=1,1509			2. p=28,66 d=1,2814			3. p=39,04 d=1,4026		
T	τ	η	z	τ	η	z	τ	η	z
20°	1219,6	0,01519	84,4	1934,3	0,02412	134	3333,5	0,04160	231,1
30	988,6	1230	68,3	1555,5	1939	107,7	2613,6	3261	181,2
40	819,7	1018	56,6	1282,2	1597	88,7	2109,9	2632	146,2

Na_2CO_3.

	1. p=5,96 d=1,0613			2. p=11,5 d=1,1215			3. p=15,85 d=1,1689		
T	τ	η	z	τ	η	z	τ	η	z
20°	1100,8	0,01371	76,2	1574,1	0,01963	109,1	2222,9	0,02773	154,1
30	874,8	1088	60,4	1227,8	1529	84,9	1697	2116	117,5
40	714,8	887	49,3	988	1229	68,3	1331	1658	92,1

H_3PO_4.

	1. p = 8,51 d = 1,0575			2. p = 17,65 d = 1,1241		
T	τ	η	z	τ	η	z
10°	1380,5	0,01721	95,6	1941,7	0,02422	134,5
20	1057,2	1316	73,1	1472,1	1835	101,9
30	839,2	1043	57,9	1157,9	1442	80,1
40	685,5	850	47,2	937,2	1166	64,8

	3. $p = 34{,}41$ $d = 1{,}259$			4. $p = 47{,}99$ $d = 1{,}3868$		
T	τ	η	z	τ	η	z
10°	4398,5	0,05490	305	11262	0,14059	781,1
20	3221,8	4021	223,4	7693	9603	533,5
30	2459,7	3069	170,5	5570	6953	386,3
40	1941	2421	134,5	4287,2	5288	293,8

Na_3PO_4.

	1. $p = 4{,}88$ $d = 1{,}0577$			2. $p = 9{,}02$ $d = 1{,}1086$		
T	τ	η	z	τ	η	z
10°	1436,3	0,01790	99,5	—	—	—
20	1095,9	1365	75,8	1484,5	0,01850	102,8
30	869,7	1081	60,1	1138,4	1418	78,8
40	698	866	48,1	932	1159	64,4

2. Zusammenstellung verschiedener Beobachtungen über die innere Reibung der Säure- und Salzlösungen.

Man sollte erwarten, dass die Lösungen der Chromsäure, wenn man sie in Bezug auf die innere Reibung mit den Lösungen der Schwefelsäure und der Salzsäure nach dem Procentgehalte vergleicht, sich zwischen die Lösungen der beiden letztgenannten Säuren stellen würden. Die Reihenfolge der Lösungen wird jedoch eine andere, wie folgende, den Beobachtungen von Graham[1]) und mir entnommene angenäherte Zahlen beweisen.

Temp.	Procentgehalt	Specifische Zähigkeit H_2SO_4	H_2CrO_4	HCl
20°	19,6	83	65	75,5
	30,8	109	75	97
	50	196,2	112	—

Bei gleichem Procentgehalte besitzen somit die Lösungen der Chromsäure eine geringere specifische Zähigkeit als die der Salzsäure, während doch die Lösungen der Chromate überhaupt eine grössere Zähigkeit zu besitzen scheinen, als die der Chloride.

1) Graham, Phil. Trans. 151. p. 373. 1861.

Eine Vergleichung der Zähigkeiten verschiedener Lösungen nach der Anzahl der aufgelösten Molecüle in der Volumeneinheit scheint in mehreren Fällen geeignet zu sein, die Abhängigkeit der Zähigkeit von der chemischen Beschaffenheit der aufgelösten Substanzen reiner darzustellen, als eine Vergleichung nach dem Procentgehalte. Bezeichnet d die Dichte einer Lösung, p den Procentgehalt und m das chemische Moleculargewicht des aufgelösten Stoffes, so ist:

$$n = \frac{pd}{m}$$

ein relatives Maass für die Anzahl der Molecüle, welche in der Volumeneinheit gelöst sind. Ich habe nach den Beobachtungen von Graham[1]), Grotrian[2]), Sprung[3]) und mir[4]) die specifischen Zähigkeiten von Lösungen verschiedener Säuren und Salze als Function der Molecülzahl graphisch dargestellt und mit Hülfe der so erhaltenen Curven die Zähigkeiten der Lösungen für gleiche Werthe von n näherungsweise bestimmt. Dabei habe ich zur Controle auch die von Wagner[5]) gefundenen specifischen Zähigkeiten für Lösungen von H_2SO_4, HCl und HNO_3 benutzt. Die so erhaltenen Zahlen sind natürlich nur als ungefähre Werthe zu betrachten; sie dürften aber doch wenigstens die Reihenfolge der Lösungen nach dieser Vergleichungsweise richtig angeben. In der folgenden Tabelle sind die so gefundenen specifischen Zähigkeiten dieser Lösungen für die Temperatur 20° und verschiedene Werthe von n zusammengestellt. Jede Zahl in der Tabelle bezieht sich auf eine Verbindung, deren Namen man erhält, wenn man in der überschriebenen Formel statt M das Zeichen einsetzt, welches vor der entsprechenden horizontalen Reihe steht.

---

1) Graham, l. c.

2) Grotrian, Pogg. Ann. **160.** p. 238. 1877; Wied. Ann. **8.** p. 529. 1879.

3) Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 4. 1876.

4) Slotte, Wied. Ann. **14.** p. 13. 1881.

5) Wagner, Wied. Ann. **18.** p. 259. 1883.

1000 n		MNO_3	MCl	M_2CrO_4	M_2SO_4	M_2CO_3	M_3PO_4
50	H	57	57	58	62	—	65
	NH_4	55	56	60	63	—	—
	K	56	56	61	63	65	—
	Na	58	59	70	69	72	91
100	H	59	59	60	68	—	75
	NH_4	54	55	65	69	—	—
	K	55	56	66	69	75	—
	Na	60	62	92	87	96	(170)
150	H	60	61	63	76	—	87
	NH_4	54	55	70	77	—	—
	K	55	56	73	—	89	—
	Na	62	65	—	—	132	—
500	H	70	72	96	132	—	275

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich zunächst, dass die beiden einbasischen Säuren und ihre Salze die geringste, die dreibasische Phosphorsäure und ihr Natriumsalz die grösste, die zweibasischen Säuren und ihre Salze eine mittlere Zähigkeit besitzen. Weiter ist ersichtlich, dass die Reihenfolge der specifischen Zähigkeiten für jede horizontale Reihe überhaupt dieselbe ist. Ausnahmen finden statt nur für Na_2CrO_4 und Na_2SO_4. Es zeigt sich auch, dass entsprechende Nitrate und Chloride fast gleiche Zähigkeit besitzen, und dass die Zähigkeit des Kaliumsalzes jeder Säure nur wenig von der Zähigkeit des Ammoniumsalzes derselben Säure abweicht.

Eine in dieser Weise angestellte Vergleichung der specifischen Zähigkeiten bei 40° gibt, so weit wie die Beobachtungen reichen, wesentlich dieselben Resultate.

3. Die Reibungsconstante des Wassers.

In Bezug auf meine Versuche mit Wasser will ich zunächst bemerken, dass die Dimensionen des Ausflussrohres und die angewandte Druckhöhe für genaue Bestimmungen der Reibungsconstante einer leicht beweglichen Flüssigkeit nicht ganz geeignet waren. Deshalb erreicht auch die Hagenbach'sche Correction bei der Berechnung von η aus meinen Beobachtungen für Wasser bei den höchsten Temperaturen eine beträchtliche Grösse.

Die von mir gefundenen Werthe der Reibungsconstante des Wassers stelle ich in der folgenden Tabelle mit den von O. E. Meyer[1]) aus Poiseuille's und Rosencranz' Versuchen berechneten zusammen.

	P.	S.		R.		S.
10°	0,01309	0,01315	50,3°	0,00552	50,1°	0,00554
20	1008	1009	60,7	484	60,2	473
30	802	804	80,1	399	80,1	361
40	653	659	89,4	345	90	322

Es ergibt sich hieraus, dass die Rosencranz'schen Werthe für die höheren Temperaturen erheblich grösser sind, als die aus meinen Beobachtungen hervorgehenden.

Um die Reibungsconstante als Function der Temperatur darzustellen, habe ich eine Formel von der allgemeinen Form:

$$\eta = \frac{c}{a + t} - b$$

aufgestellt. Durch Anwendung dieser Formel erhält man nach meinen Beobachtungen für Wasser:

$$\eta = \frac{0{,}52119}{26 + t} - 0{,}00131.$$

Wie die berechneten Werthe mit den beobachteten übereinstimmen, ergibt sich aus folgender Zusammenstellung:

	Ber.	Beob.		Ber.	Beob.
0,2°	0,01858	0,01796	60,2°	0,00474	0,00473
10	1317	1315	70,1	411	410
20	1002	1009	80,1	360	361
30	800	804	90	318	322
40	659	659	97	293	298
50,1	554	554			

Helsingfors, Juni 1883.

1) O. E. Meyer, Wied. Ann. 2. p. 393 und 400. 1877.

V. *Ueber einen Vorlesungsapparat zur Demonstration des Poiseuille'schen Gesetzes; von W. C. Röntgen.*

(Hierzu Taf. I Fig. 4).

In Anbetracht der Bedeutung, welche die Versuche über Reibung von Flüssigkeiten und Gasen in der letzten Zeit gewonnen haben, mag es gerechtfertigt erscheinen, wenn ich im Folgenden einen einfachen Apparat beschreibe, mit welchem man in der Vorlesung das Poiseuille'sche Gesetz demonstriren kann.

In Fig. 4 ist derselbe in $^1/_{20}$. der natürlichen Grösse abgebildet. *A* und *B* sind zwei Glaskugeln von 9 cm Durchmesser; die eine, *A*, besitzt bei *a* und *b* zwei diametral einander gegenüberliegende Ansatzröhrchen von 0,8 cm Weite und bei *c* einen Hals; die zweite, *B*, besitzt bei *d* ein und bei *f* drei in einer horizontalen Ebene liegende, parallele Ansatzröhrchen von ebenfalls 0,8 cm Weite und bei *g* einen Hals. *bd* ist eine Capillare von 38 cm Länge und 0,08 cm Durchmesser, welche in die Ansätze *b* und *d* eingesetzt ist und durch übergeschobene Kautschukröhrchen luftdicht mit den beiden Kugeln verbunden wird. In die drei Ansätze bei *f* wird je eine Capillare gesteckt, welche ebenfalls durch Kautschukröhrchen luftdicht mit der Kugel *B* verbunden sind. Die freien Enden dieser Capillaren sind durch Kautschukröhrchen mit knieförmig gebogenen Glasröhrchen von ungefähr 0,6 cm Weite verbunden, und von letzteren hängen Kautschukröhrchen in die rinnenförmige Wanne *GD* herab.

Die Capillaren haben folgende Dimensionen: von der ersten (I) beträgt die Länge 38 cm und der Durchmesser 0,08 cm, von der zweiten (II) 19 cm, resp. 0,08 cm, von der dritten (III) 38 cm, resp. 0,04 cm. Die erste ist auf einer möglichst grossen Länge von einem durch Kautschukstöpsel aufgesetzten, gläsernen Dampfmantel umgeben. Derselbe ist in Fig. 4 nicht gezeichnet.

Durch die Hälse *c* und *g* gehen an beiden Seiten offene verticale Glasröhren, die bis auf den Boden der Kugeln

reichen, und die durch Kautschukstöpsel eingesetzt sind. Dieselben dienen als Manometer, ihre Länge beträgt 75 cm und ihr lichter Durchmesser 0,3 cm; beide sind sehr dickwandig, damit die in denselben stehende Flüssigkeitssäule möglichst dick erscheine.

Von *a* führt ein Kautschukschlauch bei den Versuchen mit Flüssigkeiten zu einem weiten Reservoir *E*, welches an einer Stange auf- und abwärts geschoben und befestigt werden kann; bei den Versuchen mit Gasen ist der Schlauch mit einem Gasometer verbunden.

Der beschriebene Apparat ist in passender Weise auf einem weiss angestrichenen hölzernen Gestell befestigt, dessen Einrichtung zur Genüge aus der Zeichnung hervorgeht.

Die hinter jedem Manometer befindliche verticale Centimeterscala hat ihren Nullpunkt in dem Niveau der Flüssigkeit in der Wanne, wenn dafür gesorgt ist, dass diese bis zur Höhe von einigen auf der Innenfläche der Wanne angebrachten Marken gefüllt ist; dieses Niveau bleibt während der Versuche constant, da die aus den Capillaren ausströmende Flüssigkeit durch das Röhrchen *k* wieder abfliesst. Die an den Scalen abgelesenen Manometerstände geben folglich in Centimetern Flüssigkeit die in *A* und *B* vorhandenen Ueberdrucke über dem am Ende der Capillaren *f* existirenden Druck, wenn der ganze Apparat vollständig mit Flüssigkeit gefüllt ist; dies ist bei Versuchen mit Flüssigkeiten der Fall.

Als Versuchsflüssigkeit dient am besten gefärbtes, reines Wasser; mit demselben wird der Apparat zunächst gefüllt, was in folgender Weise geschieht. Nachdem das Reservoir *E* möglichst tief herunter gelassen ist, werden die Manometerröhren abgenommen und in *E* soviel Wasser eingegossen, bis dasselbe in dem Halse *c* steht, dann wird das Manometer *ch* eingesetzt und *E* gehoben. Um auch *B* und die Capillaren *f* mit ihren Ansätzen so zu füllen, dass nirgends Luft zurückbleibt, müssen die von den Enden der Capillaren herabhängenden Kautschukröhrchen nach oben gedreht werden; darauf wird mittelst eines Trichters in *B* soviel Wasser eingegossen, bis dasselbe aus den drei Kautschukröhrchen auszufliessen beginnt; diese werden dann durch Glasstäbchen

geschlossen und wieder abwärts gerichtet. Nach vollständiger Füllung von *B* wird das Manometer *gi* eingesetzt und die Wanne *CD* gefüllt.

Der Apparat ist nunmehr für die folgenden Versuche fertig:

1) Die Mündung der Capillare I wird durch Herausziehen des Glasstäbchens aus dem herabhängenden Kautschukröhrchen geöffnet, sofort fällt die Flüssigkeit in *ig* bis der Ueberdruck in *B* halb so gross geworden ist als in *A*, denn der Reibungswiderstand in der Capillare *bd* ist ebenso gross wie der in I, da beide dieselben Dimensionen haben. Ist das Reservoir *E* weit genug, so ändert sich der Druck in *A*, folglich auch in *B* während längerer Zeit kaum merklich, anderen Falles muss man durch Aufgiessen von Wasser oder oder durch Heben des Gefässes das Niveau in *E* constant erhalten.

2) Die Capillare I wird geschlossen und die halb so lange Capillare II geöffnet. Der Ueberdruck in *B* sinkt bis auf ein Drittel des Ueberdruckes in *A*, als Beweis dafür, dass der Reibungswiderstand in einer Röhre von der halben Länge nur halb so gross ist als in einer Röhre von der einfachen Länge.

3) Die Capillare II wird geschlossen und die engere Capillare III geöffnet. Das Wasser steigt in *gi*, bis in *B* ein Ueberdruck vorhanden ist, der sich zur Druckdifferenz zwischen *A* und *B* umgekehrt verhält wie die vierten Potenzen der Durchmesser der Capillaren I und III.

4) Die Capillare III wird geschlossen und I wieder geöffnet; das Manometer *gi* zeigt dann selbstverständlich denselben Stand wie beim ersten Versuch. Wird nun Dampf von siedendem Wasser durch den Mantel, welcher die Röhre I umgibt, geleitet, so bemerkt man sofort ein starkes Steigen des Druckes in *B*, welches der Zunahme der Reibung des Wassers mit der Temperatur entspricht.

Um nun auch den Nachweis zu liefern, dass der Reibungswiderstand bei der Transpiration von Gasen, speciell von atmosphärischer Luft, in der bekannten Weise von der Länge und dem Durchmesser der Capillaren, sowie von der Temperatur der Gase abhängt, kann man denselben Apparat benutzen. Zu diesem Zweck wird *A* durch den Kautschuk-

schlauch mit einem Gasometer in Verbindung gesetzt, in welchem Luft unter einem passenden, möglichst constant bleibenden Druck enthalten ist. Die Kugeln A und B werden nur soweit mit gefärbtem Wasser gefüllt, dass dasselbe zwar zur Füllung der auch jetzt als Manometer dienenden Röhren ch und gi ausreicht, die Capillaren aber trocken bleiben. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass die die Ueberdrucke in A und B bestimmenden Längen der Flüssigkeitssäulen in ch und gi nun von dem Niveau der Flüssigkeit in den Kugeln aus gemessen werden. Die Wanne ist bei diesen Versuchen überflüssig. Man wird die Versuche mit Luft etwa in derselben Reihenfolge anstellen, wie die mit Wasser, und die Gesetze der Transpiration mit einer für einen Demonstrationsversuch genügenden Genauigkeit leicht bestätigt finden.

Es wird empfehlenswerth sein, wenn man die Versuche mit Luft zuerst und die mit Wasser nachher anstellt, da alsdann der Apparat zwischen den beiden Versuchsreihen nicht auseinander genommen und getrocknet zu werden braucht.

Die Flüssigkeit in den Manometern stellt sich in allen Fällen sehr rasch ein, sodass die beschriebenen Versuche nur wenig Zeit beanspruchen; würde man viel engere Capillaren nehmen, damit das Poiseuille'schen Gesetz in aller Strenge anwendbar sei, so müsste man bis zum Eintritt der stationären Strömung entsprechend länger warten.

Die Schwierigkeit bei der Anfertigung des Apparates liegt lediglich darin, dass man nicht leicht drei Capillaren von genau gleichem Durchmesser erhält; kleine Differenzen in den Durchmessern lassen sich aber durch kleine Aenderungen der Länge corrigiren.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass, wenn die Billigkeit der Construction nicht in Frage kommt, manche Verbesserung und Verschönerung des Apparates, insbesondere was die Verbindung der einzelnen Theile anbetrifft, vorgenommen werden kann. Die Erfahrung lehrt aber, dass der Apparat auch in der angegeben Gestalt gut und sicher functionirt.

Giessen, im Juli 1883.

VI. Ueber die Herleitung der Krystallsysteme aus der Theorie der Elasticität; von Hermann Aron.

Die Discussion der Gleichungen der Elasticität mit Rücksicht auf die möglichen Symmetrieebenen ist bisher in vollständiger Weise noch nicht durchgeführt worden. Das Vollständigste darüber hat bisher Hr. Kirchhoff in der 27. Vorlesung seiner Mechanik § I gegeben, sich aber dabei doch beschränkt auf die Fälle, wo die Symmetrieebenen zueinander senkrecht liegen. Hier soll von jeder beschränkenden Annahme über die Lage der Symmetrieebenen abgesehen werden, um alle möglichen Fälle zu erhalten.

Die homogene Function zweiten Grades, welche die Arbeit bei elastischen Deformationen eines krystallinischen Mittels darstellt, habe die Form:

$$
\begin{aligned}
f = c_{11} x_x^2 & + 2 c_{12} x_x y_y + 2 c_{13} x_x z_z + 2 c_{14} x_x y_z + 2 c_{15} x_x z_x + 2 c_{16} x_x y_y \\
& + c_{22} y_y^2 + 2 c_{23} y_y z_z + 2 c_{24} y_y y_z + 2 c_{25} y_y z_x + 2 c_{26} y_y x_y \\
& + c_{33} z_z^2 + 2 c_{34} z_z y_z + 2 c_{35} z_z z_x + 2 c_{36} z_z x_y \\
& + c_{44} y_z^2 + 2 c_{45} y_z z_x + 2 c_{46} y_z x_y \\
& + c_{55} z_x^2 + 2 c_{56} z_x x_y \\
& + c_{66} x_y^2 .
\end{aligned}
$$

Hierin ist, wenn u, v, w die Verschiebungen im Punkte x, y, z darstellen:

$$
x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}
$$

$$
y_z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad z_x = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad x_y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
$$

Die letzten drei Grössen unterscheiden sich aus einem später anzugebenden Grunde um den Factor $\tfrac{1}{2}$ von der üblichen ihnen gegebenen Bedeutung.

Im allgemeinsten Falle bestehen für die Grössen c_{11} etc. keine speciellen Werthe; es entspricht dies dem am wenigsten regelmässigen Krystallsystem, dem asymmetrischen System.

Besteht dagegen eine Ebene der Symmetrie, und wählen

wir diese zur xz-Ebene, so müssen eine Anzahl der Coëfficienten c verschwinden[1]), nämlich:

$$c_{14}=0 \quad c_{24}=0 \quad c_{34}=0 \quad c_{45}=0$$
$$c_{16}=0 \quad c_{26}=0 \quad c_{36}=0 \quad c_{56}=0.$$

Es entspricht dies dem monosymmetrischen System. Dafür wird also der Ausdruck der Arbeit:

$$\begin{aligned} f = c_{11}x_x^2 &+ 2c_{12}x_x y_y + 2c_{13}x_x z_z + 2c_{15}x_x z_x \\ &+ c_{22}y_y^2 + 2c_{23}y_y z_z + 2c_{25}y_y z_x \\ &+ c_{33}z_z^2 + 2c_{35}z_z z_x \\ &+ c_{44}y_z^2 + 2c_{46}y_z z_x \\ &+ c_{55}z_x^2 + c_{66}x_y^2. \end{aligned}$$

Hat das System noch eine Ebene der Symmetrie, so nehmen wir die Schnittlinie dieser mit der ersteren zur z-Axe und verlegen das Coordinatensystem durch Drehung um diese Axe, sodass die neue Ebene der Symmetrie zur neuen xz-Ebene wird.

Betrachten wir zu diesem Zweck die Transformation der Function f durch eine allgemeine Coordinatenverlegung: die neuen Coordinaten bilden mit den alten die Winkel, deren Richtungscosinus:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \qquad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \qquad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3,$$

seien; die Grössen x_x, y_y etc. sollen nach ihrer Transformation durch x_x', y_y' etc. bezeichnet werden, dann ist[2]):

$$x_x = \alpha_1^2 x_x' + \alpha_2^2 y_y' + \alpha_3 z_z' + 2\alpha_2\alpha_3 y_z' + 2\alpha_3\alpha_1 z_x' + 2\alpha_1\alpha_2 x_y';$$

y_y und z_z erhält man, wenn man β, resp. γ an Stelle von α setzt:

$$\begin{aligned} y_z = \beta_1\gamma_1 x_x' + \beta_2\gamma_2 y_y' + \beta_3\gamma_3 z_z' \\ + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)y_z' + (\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3)z_x' + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)x_y', \end{aligned}$$

z_x und x_y werden daraus erhalten, wenn man γ und α, resp. α und β an Stelle von β und γ setzt.

Bei der Bedeutung, die wir hier den Zeichen y_z, z_x und x_y gegeben haben, bleiben auch die Formeln für die Coordinatenverlegung unverändert, wenn wir an Stelle der Dilatationen $x_x, y_y \ldots x_x', y_y' \ldots$, die Spannungen X_x, $Y_y \ldots X_x'$, $Y_y' \ldots$ setzen, sodass alle Beziehungen, die wir aus ihnen wegen der Symmetrie

1) Siehe Kirchhoff, Mechanik, l. c.

2) Siehe Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, deuxième édition Nr. 18.

der Körper für die Coëfficienten der Werth x_x etc. im Ausdrucke der Arbeit herleiten werden, auch noch für die entsprechenden Coëfficienten der homogenen Function zweiten Grades, die die Arbeit durch die Grössen X_x etc. darstellt, bestehen bleiben. Nehmen wir nun eine Drehung der Coordinaten um die z-Axe um den Winkel φ im positiven Sinne vor und setzen $\cos\varphi = a$, $\sin\varphi = b$, so ist:

$$x_x = a^2 x_x' + b^2 y_y' - 2ab\,x_y' \qquad y_z = a y_z' + b z_x'$$
$$y_y = b^2 x_x' + a^2 y_y' + 2ab\,x_y' \qquad z_x = -b y_z' + a z_x'$$
$$z_z = z_z' \qquad x_y = ab\,x_x' - ab\,y_y' + (a^2 - b^2)\,x_y';$$

Setzen wir diese Werthe in den Ausdruck für f ein, so erhält man:

$$f = c_{11}' x_x'^2 + 2c_{12}' x_x' y_y' + \cdots\cdots$$
$$+ c_{22}' y_y'^2 \quad + \cdots\cdots$$

Hierin ist: $\qquad + \cdots\cdots$

$$c_{11}' = c_{11}a^4 + 2c_{12}a^2b^2 + c_{22}b^4 + c_{66}a^2b^2$$
$$c_{12}' = c_{11}a^2b^2 + c_{12}(a^4 + b^4) + c_{22}a^2b^2 - c_{66}a^2b^2$$
$$c_{13}' = c_{13}a^2 + c_{23}b^2$$
$$c_{14}' = -c_{15}a^2b - c_{25}b^3 + c_{46}a^2b$$
$$c_{15}' = c_{15}a^3 + c_{25}ab^2 + c_{46}ab^2$$
$$c_{16}' = -2c_{11}a^3b + 2c_{12}ab(a^2 - b^2) + 2c_{22}ab^3 + c_{66}ab(a^2 - b^2)$$
$$c_{22}' = c_{11}b^4 + 2c_{12}a^2b^2 + c_{22}a^4 + c_{66}a^2b^2$$
$$c_{23}' = c_{13}b^2 + c_{23}a^2$$
$$c_{24}' = -c_{15}b^3 - c_{25}a^2b - c_{46}a^2b$$
$$c_{25}' = c_{15}ab^2 + c_{25}a^3 - c_{46}ab^2$$
$$c_{26}' = -2c_{11}ab^3 - 2c_{12}ab(a^2 - b^2) + 2c_{22}a^3b - c_{66}ab(a^2 - b^2)$$
$$c_{33}' = c_{33}$$
$$c_{34}' = -c_{35}b$$
$$c_{35}' = c_{35}a$$
$$c_{36}' = -c_{13}ab + c_{23}ab$$
$$c_{44}' = c_{44}a^2 + c_{55}b^2$$
$$c_{45}' = c_{44}ab - c_{55}ab$$
$$c_{46}' = 2c_{15}ab^2 - 2c_{25}ab^2 + c_{46}a(a^2 - b^2)$$
$$c_{55}' = c_{44}b^2 + c_{55}a^2$$
$$c_{56}' = -2c_{15}a^2b + 2c_{25}a^2b + c_{46}b(a^2 - b^2)$$
$$c_{66}' = 4c_{11}a^2b^2 - 8c_{12}a^2b^2 + 4c_{22}a^2b^2 + c_{66}(a^2 - b^2)^2.$$

Nehmen wir nun eine solche Drehung vor, wie wir sie beabsichtigt haben, dass nämlich die neue xz-Ebene in die neue Symmetrieebene fällt, so muss nun wieder:

$$c_{14}' = 0 \quad c_{24}' = 0 \quad c_{34}' = 0 \quad c_{45}' = 0$$
$$c_{16}' = 0 \quad c_{26}' = 0 \quad c_{36}' = 0 \quad c_{46}' = 0 \text{ sein.}$$

Dies ergibt acht Bedingungen, welche unter den Grössen c_{11} etc., resp. a und b bestehen müssen, und die wir nun entwickeln wollen.

1) Aus $c_{34}' = 0$ folgt $c_{35}' = 0$; wir könnten auch daraus folgern $b = 0$, aber dieser Fall kommt hier nicht in Frage, weil dies nur heissen würde, dass die neue Symmetrieebene wieder die ursprüngliche ist, während wir die Bedingungen der Existenz einer von der ersten verschiedenen untersuchen wollen. Von diesem Fall können wir also sowohl hier wie im folgenden absehen.

2) Wegen $c_{14}' = 0$ und $c_{24}' = 0$ folgt $c_{15} = -c_{25} = D$.

3) Wegen $c_{14}' = 0$, $c_{56}' = 0$ und $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$ folgt $c_{46} = -2D$.

4) Wegen $c_{14}' = 0$, $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$, $c_{46} = -2D$ folgt $D(3a^2 - b^2) = 0$.

Daher entweder α) $D = 0$ oder β) $3a^2 - b^2 = 0$.

5) Wegen $c_{36}' = 0$ folgt entweder α) $c_{13} = c_{23} = C$ oder β) $a = 0$.

6) Wegen $c_{45}' = 0$ folgt entweder α) $c_{44} = c_{55} = B$ oder β) $a = 0$.

7) Aus $c_{16}' = 0$, $c_{26}' = 0$, also $c_{16}' + c_{26}' = 0$, folgt entweder α) $c_{11} = c_{22} = A$ oder β) $a = 0$.

8) Aus $c_{16}' - c_{26}' = 0$ folgt $(c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66})ab(a^2 - b^2) = 0$, also entweder α) $c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66} = 0$ oder β) $a = 0$ oder γ) $a^2 = b^2$.

Haben nun a und b keinen der speciellen in diesen Gleichungen unter β) und γ) bezeichneten Werthe, so müssen, damit eine zweite Ebene der Symmetrie besteht, folgende Gleichungen bestehen.

1) $c_{35} = 0$ 2) $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$ 3) $c_{46} = -2D$ 4) $D = 0$
5) $c_{13} = c_{23} = C$ 6) $c_{44} = c_{55} = B$ 7) $c_{11} = c_{22} = A$ 8) $2A = 2c_{12} + c_{66}$.

Setzt man noch $c_{33} = A'$ $c_{66} = B'$ $c_{12} = C'$, bildet die Werthe für c_{11}' und setzt sie in den Ausdruck für die Arbeit ein, so erhält man:

$$f = A(x_x'^2 + y_y'^2) + A'z_z'^2 + B(y_z'^2 + z_x'^2)$$
$$+ B'x_y'^2 + 2C(y_y'z_z' + z_z'x_x') + 2C'x_x'y_y'.$$

Ausserdem besteht die Beziehung $2A = B' + 2C'$.

Die Coëfficienten hängen nun überhaupt nicht mehr von der Lage der Coordinaten ab, der Körper ist also um die z-Axe isotrop. Er ist völlig isotrop, wenn noch $A = A'$ $B = B'$ $C = C'$ ist.

Eine zweite Ebene der Symmetrie bedingt also im allgemeinen Isotropie rings um die Schnittlinie beider Symmetrieebenen; es sei denn, dass die Lage der zweiten Ebene gegen die erste die speciellen Werthe hat, welche den Bedingungen unter β) und γ) genügen; diese Fälle wollen wir jetzt discutiren. Es sei zunächst $a = 0$. Es sind alsdann die beiden Symmetrieebenen senkrecht zu einander, und die acht Bedingungsgleichungen werden durch folgende Werthe befriedigt.

1) $c_{35} = 0$ 2) $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$ 3) $c_{46} = -2D$
4) $D = 0$ 5) $a = 0$ 6) $a = 0$ 7) $a = 0$ 8) $a = 0$.

Es ist daher:

$$f = c_{11} x_x^2 + c_{22} y_y^2 + c_{33} z_z^2 + c_{44} y_z^2 + c_{55} z_x^2 + c_{66} x_y^2 + 2c_{12} x_x y_y + 2c_{13} x_x z_z + 2c_{23} y_y z_z,$$

daraus folgt, dass zwei zu einander senkrechte Ebenen der Symmetrie noch eine dritte zu beiden senkrecht Ebenen der Symmetrie bedingen[1]), es entspricht dies dem rhombischen System.

Die acht Bedingungsgleichungen für eine zweite Symmetrieebene können aber noch durch folgende Annahmen befriedigt werden:

1) $c_{35} = 0$ 2) $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$ 3) $c_{46} = -2D$ 4) $D = 0$
5) $c_{13} = c_{23} = C$ 6) $c_{44} = c_{55} = B$ 7) $c_{11} = c_{22} = A$ 8) $a^2 = b^2$.

Diese letztere Bedingung acht erfordert eine Symmetrieebene unter $\pm 45^0$. In diesem Falle ist:

$$f = A x_x^2 + A y_y^2 + c_{33} z_z^2 + B y_z^2 + B z_x^2 + c_{66} x_y^2 + 2c_{12} x_x y_y + 2C x_x z_z + 2C y_y z_z.$$

Es ist der Ausdruck von derselben Form wie für das vorige System, somit ist durch eine Symmetrieebene unter 45^0 gegen die xz-Ebene die yz-Ebene als Ebene der Symmetrie bedingt, aber der obige Ausdruck für die Arbeit

1) Siehe Kirchhoff, l. c.

ändert sich nicht, wenn man x mit y vertauscht, es ist also die xz-Ebene mit der yz-Ebene gleichartig; zwischen ihnen, ebenfalls durch die z-Axe gehend, liegen zwei Ebenen der Symmetrie, unter 45° gegen die Coordinatenebenen, das System hat eine Hauptaxe. Es entspricht dies dem tetragonalen System.

Ist ausserdem in dem obigen Ausdruck:

$$c_{33} = A \quad c_{66} = B \quad c_{12} = C,$$

so geht der Ausdruck für die Arbeit über in:

$$f = A(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + B(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) + 2C(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y).$$

Da nun der Körper in Bezug auf die drei Coordinatenaxen sich gleich verhält, so bestehen drei zu einander senkrechte Ebenen der Symmetrie mit drei Hauptaxen, durch welche je zwei Ebenen der Symmetrie unter 45° gegen je zwei der Hauptsymmetrieebenen gehen, dies entspricht dem regulären System.

Es können aber schliesslich die acht Bedingungsgleichungen für eine zweite Symmetrieebene noch erfüllt werden durch folgende Annahmen:

$$1)\ c_{35} = 0 \qquad 2)\ c_{15} = D c_{25} = -D \qquad 3)\ c_{46} = -2D$$
$$4)\ 3a^2 - b^2 = 0 \qquad 5)\ c_{13} = c_{23} = C \qquad 6)\ c_{44} = c_{55} = B$$
$$7)\ c_{11} = c_{22} = A \qquad 8)\ c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66} = 0.$$

Die Bedingung $3a^2 - b^2 = 0$ bedingt Ebenen der Symmetrie unter $n.60^0$ gegen die erste, wo n eine ganze positive oder negative Zahl ist. Es entspricht dies dem hexagonalen System.

Setzt man $c_{33} = A'$ $c_{66} = B'$ $c_{12} = C'$ und bildet die Werthe c_{11}', c_{22}' etc. bezogen auf irgend ein System der Coordinaten, das gegen das ursprüngliche um den Winkel φ um die z-Axe gedreht ist, so erhält man, bezogen auf dieses Coordinatensystem, den Ausdruck für die Arbeit:

$$\begin{aligned} f = & A x_x'^2 + A y_y'^2 + A' z_z'^2 \\ & + B y_z'^2 + B z_x'^2 + B' x_y'^2 \\ & + 2C y_y' z_z' + 2C z_z' x_x' + 2C' x_x' y_y' \\ & - 2Db(3a^2 - b^2)(x_x' y_z' - y_y' y_z' + 2 z_x' x_y') \\ & + 2Da(a^2 - 3b^2)(x_x' z_x' - y_y' z_x' - 2 y_z' x_y'), \end{aligned}$$

wobei noch die Bedingung besteht: $2A = B' + 2C'$.

Für $b = 0$ oder $3a^2 - b^2 = 0$ bestehen Symmetrieebenen, aber es sind nicht alle gleichwerthige Symmetrieebenen, denn für ein geradzahliges Vielfach von 60° ist $a(a^2 - 3b^2) = 1$ und für ein ungeradzahliges ist $a^2(a^2 - 3b^2) = -1$.

Eine Drehung um 60° hat denselben Einfluss, wie eine um 180°, als ob man also für x und y, resp. $-x$ und $-y$ setzt, dagegen ändert eine Drehung um 120° den Werth der Arbeit nicht. Somit bestehen gleichwerthige Ebenen der Symmetrie nur unter 120°; dies ist aber nur der Fall bei hemiëdrischen und tetartoëdrischen Formen des hexagonalen Systems[1]), die holoëdrischen dagegen verlangen gleichwerthige Ebenen unter 60°, also muss für sie $D = 0$ sein, daraus folgt aber, dass die holoëdrischen Formen des hexagonalen Systems sich hinsichtlich jeder Art der Elasticität isotrop rings um die Hauptaxe verhalten müssen und also in gewisser Beziehung sich einfacher als das reguläre System verhalten.

Dies mag die Thatsache erklären, die Naumann in seinem Buch „Elemente der Mineralogie“ § 36 so ausdrückt: „Es gibt verhältnissmässig nicht sehr viele hexagonale Mineralspecies, welche vollkommen holoëdrisch krystallisiren, denn selbst der Quarz und Apatit sind eigentlich, jener als eine tetartoëdrische, dieser als eine hemiëdrische Species zu betrachten, obgleich ihre gewöhnlichen Combinationen von holoëdrischen nicht unterschieden werden können;“ und an einer folgenden Stelle: „Allein die schon am gemeinen Quarz nicht seltene, am genannten Bergkrystall aber sehr gewöhnliche unvollkommene Ausbildung der hexagonalen Pyramide mit nur sechs (drei oberen und drei unteren) abwechselnden Flächen verkündet uns das Walten eines eigenthümlichen Bildungsgesetzes, kraft dessen diese Pyramide nur als ein Rhomboëder erscheint etc.“

Dieses eigenthümliche Bildungsgesetz erscheint uns aber vom Standpunkt der entwickelten Theorie der elastischen Verhältnisse gerade als das zu erwartende, während die holoëdrischen Formen von diesem Standpunkt viel merkwürdiger erscheinen. Wir sehen somit in der Untersuchung

1) Vgl. P. Groth, Physikal. Krystallographie. Leipzig 1876. p. 336.

des elastischen Verhaltens ein Mittel, auch die Formen, die äusserlich von holoëdrischen nicht unterschieden werden können, von solchen zu unterscheiden, und es scheint gewiss die Frage interessant, ob diejenigen Mineralien, die man bisher als holoëdrische ansah, sich auch durch ihr elastisches Verhalten als solche erweisen.

Schliesslich will ich bemerken, dass man, insbesondere mit Hülfe des hier bewiesenen Satzes: Zwei Symmetriebenen können sich nur unter 90°, unter 45° oder 60°, resp. deren ganzzahligen Multiplen schneiden, auch umgekehrt beweisen kann, dass keine anderen als die entwickelten Krystallsysteme existiren können.

Berlin, im Juni 1883.

VII. *Ueber das Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner; von Heinrich Hertz.*

(Hierzu Taf. I Fig. 5—6.)

Die Herren Rowland und Nichols[1]) haben gezeigt, dass in gewissen isolirenden Krystallen die dielectrische Polarisation nicht von electrischer Nachwirkung oder Rückstandsbildung begleitet ist; sie haben dieses Resultat gedeutet als günstig für diejenige Ansicht, nach welcher die Rückstandsbildung überhaupt nur eine nothwendige Folge mangelhafter Homogeneïtät der Isolatoren darstellt. Vor einigen Jahren hatte ich in dem Wunsche, Rückstandsbildung in einem sicher homogenen Leiter nachzuweisen, verschiedene Flüssigkeiten darauf hin geprüft. Die meisten derselben erwiesen sich als viel zu gut leitend für solche Versuche, das käufliche reine Benzin aber zeigte hinreichenden Widerstand und liess gleichzeitig einen nicht unbeträchtlichen Rückstand bemerken. Bei näherer Untersuchung ergab sich dann das im Folgenden beschriebene eigenthümliche Verhalten des Benzins, welches wohl in gleicher Weise wie das Verhalten der Krystalle ausgelegt werden kann. Ich

1) H. A. Rowland und E. H. Nichols, Phil. Mag. (5) 11. p. 414. 1881.

hatte die numerischen Resultate meiner Versuche nicht aufbewahrt; Hr. E. Heins hat nun die Freundlichkeit gehabt, diese Versuche zu wiederholen und mir die Benutzung seiner Resultate gütigst zu gestatten. Die numerischen Angaben des Folgenden sind den Versuchen Hrn. Heins entlehnt.

1. Die Methode ist einer von Hrn W. Giese[1]) benutzten nachgebildet. Das Benzin befand sich in einer Cuvette von Zink (*B* Fig. 5); in ihm und ganz von ihm umgeben hing an zwei Drähten eine Platte von Zinkblech von ca. 12 cm Länge und 8 cm Breite; diese Platte bildete die innere, die Cuvette selbst die äussere Belegung einer Leydener Flasche, deren isolirendes Medium das Benzin war. Die innere Belegung war mit dem nicht abgeleiteten Quadranten eines Electrometers verbunden und konnte durch den Unterbrecher α zur Erde abgeleitet werden; die äussere Belegung konnte entweder durch γ gleichfalls mit der Erde oder durch β mit dem Pol einer sehr constanten Kette von 100 kleinen Daniells verbunden werden, deren anderer Pol durch Ableitung auf dem Potential Null gehalten wurde. Gesetzt, es seien die Leitungen bei α und β geschlossen, bei γ unterbrochen, so steht offenbar die Electrometernadel in ihrer Ruhelage, und ein je nach dem Widerstande des Benzins mehr oder weniger starker Strom circulirt in der Leitung. Wird alsdann die Leitung bei α unterbrochen, so strebt die innere Belegung, sich auf das Potential der äusseren zu laden, und die Electrometernadel macht daher einen Ausschlag nach derjenigen Richtung, nach welcher sie sich bewegen würde, wenn der nicht abgeleitete Quadrant direct mit dem isolirten Pol der Batterie verbunden würde; diese Richtung soll die positive heissen. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Nadel ausweicht, gibt offenbar ein passendes Maass für den Widerstand des Benzins. Das Verhältniss der Capacität des Electrometers zu der des Benzincondensators war gleich 4,5 : 1[2]), das volle Potential der Batterie würde das Electrometer um 5500 Scalentheile aus seiner Ruhelage entfernt

1) W. Giese. Wied. Ann. 9. p. 160. 1880.

2) Die scheinbare Capacität der Quadranten ist so gross infolge der Wirkung der stark geladenen Electrometernadel.

haben; angenommen nun, man hätte eine Secunde nach der Unterbrechung bei α die Electrometerleitung bei δ aufgehoben und in dem Electrometer einen Ausschlag von a Scalentheilen vorgefunden, so wäre also in einer Secunde die Potentialdifferenz der Belegungen um $a/5500$ ihres Werthes herabgesunken, ohne das Electrometer wäre dieselbe $(4{,}5+1)$-mal so schnell, oder um $a/1000$ in einer Secunde, oder auch auf ihren $e^{4\pi}$-ten Theil in $4\pi . 1000/a$ Secunden abgefallen. Diese letztere Zeit hätten wir dann nur noch durch die Dielectricitätsconstante des Benzins zu dividiren, um den in absolutem electrostatischen Maass gemessenen specifischen Widerstand zu erhalten. Auf diese Weise also konnte der Widerstand gemessen werden; um den Rückstand zu beobachten, hob man durch β die äussere Belegung von der Batterie ab und verband sie durch γ mit der Erde; immer genau eine Secunde nach dem Schluss von γ wurde dann die Leitung bei α aufgehoben. Der noch vorhandene Rückstand gab dann einen negativen Ausschlag des Electrometers, der schnell wuchs, einen Maximalwerth erreichte und nun, indem die entstandene Ladung durch Leitung vernichtet wurde, langsam abfiel. Aus dem Verlauf der Ablenkung wäre ein exactes Maass des Rückstandes nur durch complicirte Rechnungen zu gewinnen, eine Schätzung über die Grösse desselben aber ergibt der erlangte Maximalwerth unmittelbar.

2. Wurde nun käufliches Benzin in die Flasche gefüllt, der Strom im allgemeinen geschlossen gehalten und nur von Zeit zu Zeit Widerstand und Rückstand geprüft, so ergab sich das Folgende: Zunächst war der Widerstand so klein, dass in wenigen Augenblicken nach Oeffnung von α die Scala aus dem Gesichtsfelde verschwand; der Rückstand war gleichzeitig ziemlich beträchtlich, sein Maximalwerth erreichte mehr als $10\,{}^0/_0$ der ursprünglichen Ladung, er verschwand infolge der starken Leitung verhältnissmässig schnell. Prüfte man nach ${}^1/_3$—${}^1/_2$ Stunde wieder, so fand man den Widerstand bequem messbar[1]), gleichzeitig war dann der Rückstand

1) Und zwar hatte derselbe abgenommen für beide Richtungen des Stromes.

viel kleiner geworden. In gleichem Sinne änderten sich beide Eigenschaften unausgesetzt weiter, nach 24 Stunden war das Benzin fast völlig isolirend geworden, Rückstandsbildung war kaum noch wahrzunehmen. Fig. 6 stellt numerisch richtig einen bestimmten Versuch dar; in die Abscissenaxe sind in Stunden und Minuten nach dem Beginn die Zeiten eingetragen; die senkrechten Ordinaten geben das zu den entsprechenden Zeiten aufgefundene Leitungsvermögen; die Curven geben den Verlauf der Rückstandsbildung, soweit dieselbe jedesmal verfolgt wurde. Die Maasse sind nur relative, die Leitungsfähigkeit zur Zeit 0 war zu gross, um gemessen zu werden.[1])

3. Die anfängliche Leitung und Rückstandsbildung beruht sicher auf Verunreinigungen. Denn einerseits kann dieselbe, nachdem sie verschwunden, durch alles dasjenige wieder hervorgerufen werden, was eine erneuerte Verunreinigung herbeiführen kann, also durch Umgiessen des Benzins in andere Gefässe, Umrühren desselben, Einblasen von feuchter Luft, Eintauchen eines Drahtes von oxydirbarem Metall, Einmischen geringer Mengen irgend eines Pulvers etc. Die so erneuerte Wirksamkeit wird dann ebenso zerstört wie das erste mal. Auf der anderen Seite konnte man ein sehr gut leitendes Benzin auch dadurch zu einem sehr schlecht leitenden machen, dass man es sehr sorgfältig über Chlorcalcium destillirte und nur mit solchen Gefässen in Berührung kommen liess, welche schon mit gereinigtem Benzin ausgespült waren. Aber niemals wurde auf diese Weise der höchste Grad des Isolationsvermögens erreicht.

4. Die Abnahme der Wirksamkeit ist wenigstens zum Theil eine Wirkung des Stromes. Zwar nahm dieselbe auch bei ruhigem Stehen des Benzins in dem Gefässe ab, aber weder so schnell, noch so weit, als wenn die Belegungen des

---

1) Man wird in Fig. 6 bemerken, dass nach jeder längeren Unterbrechung die Strömung zum Condensator wieder grösser ist, als sie vorher schon gewesen war. Diese Erscheinung beruht jedenfalls nur zum kleinsten Theile in einer erneuerten Abnahme des Widerstandes, vielmehr ist sie der Ausdruck der Thatsache, dass kurze Zeit nach jeder Unterbrechung zu der eigentlichen Strömung die rückstandsbildende sich addirt.

Gefässes mit den Polen der Batterie in Verbindung waren. Es scheint sich verschiedenes Benzin in dieser Richtung verschieden zu verhalten. Das von mir selbst untersuchte änderte ohne Stromwirkung seinen Widerstand nur sehr wenig, während die Leitungsfähigkeit des von Hrn. Heins benutzten schon durch ruhiges Stehen auf sehr kleine Werthe abfiel. Es kann sein, dass im ersteren Falle das Benzin mehr durch gelöste, im letzteren mehr durch suspendirte Substanzen verunreinigt war. Versuche, welche die besondere Natur der wirksamen Verunreinigungen ermitteln sollten, blieben erfolglos, ich bemerke in Bezug auf dieselben nur, dass dabei das Benzin zwischen Glaselectroden geprüft werden konnte, da der Widerstand der letzteren gegen den des Benzins verschwand.

5. Das electrisch gereinigte Benzin kommt in seinem Verhalten dem eines idealen flüssigen Isolators ganz ausserordentlich nahe. Von Rückstandsbildung ist kaum eine Spur wahrzunehmen, das Isolationsvermögen steht dem unserer besten Isolatoren nicht viel nach. Die Versuche konnten wegen der eingetretenen Verdunstung nicht viel über 24 Stunden ausgedehnt werden, in dieser Zeit war eine feste Grenze noch nicht erreicht, doch war die Isolationsfähigkeit schon so gross geworden, dass beispielsweise in einer Minute nach Unterbrechung der Erdleitung in α die Nadel des Electrometers nur um 6 Scalentheile aus ihrer Ruhelage gewichen war. Hieraus und aus dem angegebenen Verhältniss der Capacitäten berechnet man leicht, dass eine Leydener Flasche mit dem betreffenden Benzin als Isolator erst in ungefähr zwei Stunden die Hälfte ihrer Ladung verloren haben würde.

6. Der in unreinem Benzin auftretende Rückstand beruht auf einer nachwirkenden Polarisation (welcher Natur auch immer) und nicht auf einem Eindringen freier Electricität. Dies kann durch die folgenden Versuche gezeigt werden. Lässt man in dem Augenblick, wo nach Unterbrechung von α der Rückstand eben hervorzutreten beginnt, das Benzin durch eine Oeffnung des Bodens möglichst schnell und ruhig ab, so tritt der Rückstand plötzlich hervor, und

zwar mit dem gleichen Vorzeichen, welches er ohne das Ablassen gehabt haben würde. Beruhte der Rückstand auf einem Eindringen der Electricität in den Isolator, so hätte die Entfernung dieses Isolators zwar ebenfalls einen plötzlichen Ausschlag zur Folge haben müssen, aber derselbe würde das entgegengesetzte Vorzeichen, wie die mit dem Isolator entfernte Electricität, also wie der eigentliche Rückstand, gehabt haben. In einem anderen Versuche polarisirte ich unreines Benzin in einem grösseren Gefäss zwischen zwei Platten *A* und *B*, die mehrere Centimeter Abstand hatten. *A* und *B* wurden dann auf das Potential Null gebracht und sogleich in ihren Zwischenraum ein System von drei anderen Platten, 1, 2, 3, eingeschoben. Die äusseren Platten 1 und 3 waren zur Erde und zu einem Quadranten eines Electrometers abgeleitet; Platte 2, welche mit dem anderen Quadranten in Verbindung stand, war isolirt dicht auf 3 befestigt, derart, dass zwischen 2 und 3 kein Benzin eintrat, während zwischen 1 und 2 eine Schicht von einigen Centimetern Dicke sich befand. Sogleich beim Einschieben dieses Systemes erhielt man dann im Electrometer einen Ausschlag, dessen Richtung mit der Richtung der Polarisation des Benzins wechselte, und welcher einem Theil des Rückstandes entsprach, der sonst auf den Platten *A* und *B* sich entwickelt hätte. Es ist aber leicht einzusehen, dass das Vorzeichen dieses Ausschlages das entgegengesetzte sein muss, jenachdem im Benzin noch nachwirkende Polarisation vorhanden ist, oder von den Platten aus eingedrungene Electricität, denn die electrische Doppelschicht, welche zwischen die Platten 1 und 2 gelangt, wird in diesen Fällen entgegengesetztes Vorzeichen haben. Der Erfolg des Versuches zeigte nachwirkende Polarisation an. Da bei diesen Versuchen Reibung und unregelmässige Bewegungen, also Verwerfung der polarisirten Elemente unvermeidlich ist, so kann es nicht verwundern, wenn dieselben nicht sehr regelmässig verlaufen. In der That war der Ausschlag von sehr variabler Grösse, und hin und wieder gab selbst ein Versuch ein entgegengesetztes Resultat, doch rechtfertigte der Verlauf der weitaus überwiegenden Mehrzahl die ausgesprochene Behauptung.

VIII. *Ueber den Einfluss der galvanischen Polarisation auf die Reibung; von K. Waitz.*

(Hierzu Taf. I Fig. 7—8.)

Im Jahre 1874 entdeckte Edison[1]), dass die Reibung zwischen einem Metallstück und einem gegen dasselbe gedrückten porösen Körper (Papierstreifen, Kalkcylinder oder dergl.), der mit einer leitenden Flüssigkeit, z. B. Sodalösung, getränkt war, sich verminderte, wenn man durch diese Combination vom Papier zum Metall einen electrischen Strom schickte, ja dass eine Aenderung in der Reibung schon eintrat, wenn nur die Stärke des Stromes variirt wurde. Edison wandte diese Erfahrung zu verschiedenen technischen Erfindungen[2]): Der Construction des sogenannten Electromotographen, eines telephonischen Empfängers etc., an. Ueber die Ursache dieser Erscheinung findet sich in einem Aufsatz von Hrn. W. Siemens über Telephonie[3]) die Bemerkung, dass offenbar electrolytisch erzeugte Gase die Reibungsänderung hervorriefen. Diese Ansicht scheinen folgende, allerdings nur rohen, Versuche zu bestätigen. Ueber einen schräg gestellten Holzklotz wurde ein glattes langes Platinblech und darüber ein mit einer Flüssigkeit getränkter Papierstreifen gespannt; auf diesen wurde ein kleines glattes Platinblech gelegt, an dessen einem nach oben gebogenen Ende ein feiner sehr geschmeidiger Platindraht befestigt war, der zu einem Pol einer galvanischen Kette führte. Der andere Pol der Kette war mit dem unteren Platinblech verbunden Die Neigung des Klotzes gegen die Verticale wurde so gewählt, dass das obere Platinstück durch seine Reibung an dem feuchten Papier gerade noch am Herabgleiten gehindert war. Schickte man nun durch diese Combination den electrischen Strom, so begann das obere Blech stets herabzugleiten, bis der Strom wieder unterbrochen wurde, wenn

1) Edison, siehe Zetzsche, Handb. d. electr. Telegraphie. 1. p. 474. Anmerk.

2) Edison, Beibl. 3. p. 655. 1879. u. Compt. rend. 87. p. 270.

3) W. Siemens, Wied. Ann. 4. p. 485. 1878.

die Flüssigkeit im Papierstreifen so gewählt war, dass eine Gasabscheidung an dem oberen Platinstück stattfand, dagegen blieb das Blech ruhig liegen, wenn an ihm durch den Strom andere als gasförmige Sustanzen abgeschieden wurden. Als Batterie dienten zwei Daniell'sche Elemente, wandte man nur eines von ihnen an, so wurde kein Herabgleiten wahrgenommen.

Sehr ähnlich der von Edison entdeckten Erscheinung ist die von Hrn. K. R. Koch[1]) beobachtete Thatsache, dass die Reibung zwischen Platin oder Palladium und Glas, wenn zwischen letzteres und das Metall ein Flüssigkeitstropfen gebracht wird, sich stark ändert, sobald von dem Metall durch die Flüssigkeit ein electrischer Strom geschickt wird, dessen electromotorische Kraft selbst weit unter einem Daniell liegen darf. Hr. Koch konnte stets eine starke Zunahme der Reibung constatiren, wenn das reibende Metall als Anode diente, wurde es dagegen als Kathode verwandt, so zeigte sich keine Aenderung gegen den stromlosen Zustand. Ebenso änderte nach Hrn. Koch die galvanische Polarisation die Reibung zwischen Gold und der mit saurem Wasser bedeckten Glasfläche nicht.

Im Folgenden sollen Versuche beschrieben werden, welche die Beobachtungen Koch's erweitern und ergänzen. Als Uebergang von den durch Edison entdeckten Thatsachen zu den von Koch beschriebenen Erscheinungen lassen sich etwa nachstehende Versuche betrachten. Eine kleine Thonzelle eines galvanischen Elementes war zum grossen Theil mit saurem Wasser gefüllt und mit einem Kork verschlossen. Der Kork war in der Mitte durchbohrt, durch die Durchbohrung ging nach unten ein Platinblech, das in die Flüssigkeit eintauchte, nach oben ein starker gut eingekitteter Messingdraht, der mit dem Blech in leitender Verbindung stand. Der Draht trug einen leichten Spiegel und war oben in einen kleinen Magneten eingeschraubt, in dessen Mitte ein Messinghaken befestigt war. An diesem wurde der ganze Apparat mittelst eines dünnen, zwischen zwei

1) Koch, Wied. Ann. 8. p. 92. 1879.

Metallbacken eingeklemmten Platindrahtes aufgehängt. Die Thonzelle hing in ein Glasgefäss herab, das mit saurem Wasser von derselben Concentration und bis zu derselben Höhe angefüllt war, wie sie selbst. In die äussere Flüssigkeit tauchte ein verticaler Glasstreifen, über den ein kleines Platinblech glatt gespannt war, von diesem führte ein dünner Platindraht nach aussen. Der Glasstreifen war ausserhalb der Flüssigkeit an einen durch eine Mikrometerschraube beweglichen Schlitten befestigt, der ihn horizontal zu verschieben erlaubte, und der selbst wieder in einer verticalen Ebene gedreht werden konnte, sodass es leicht war, das über den Glasstreifen gespannte Platinblech in passender Stellung an die Thonzelle anzudrücken und diesen Druck zu variiren. Neben den kleinen Magneten wurde in geeignetem Abstand eine Drahtspirale gelegt, durch die man einen electrischen Strom schicken konnte, der dann die Drehung des ganzen Apparates bei schwacher Reibung der Thonzelle an dem anliegenden Platinblech bewirkte. Die Drehung wurde mit Fernrohr und Scala abgelesen. Verband man nun die metallische Aufhängeklemme und den aus der Flüssigkeit nach aussen führenden Platindraht mit zwei Daniells, so trat, mochte sich O oder H an dem äusseren Blech entwickeln, bei gleicher ablenkender Kraft eine sehr viel grössere Drehung des Apparates ein als ohne diese electrische Verbindung, d. h. die Reibung zwischen Thonzelle und Platin verminderte sich stark, wenn man einen electrischen Strom durch die Zelle gehen liess, dessen electromotorische Kraft ausreichte Wasser zu zersetzen. Bei Anwendung von einem Daniell liess sich keine Aenderung der Reibung feststellen. Der Gedanke lag nahe, dass bei der Reibungsänderung die Fortführung der Wassertheilchen durch die Thonzelle, wie sie bei der electrischen Endosmose beobachtet wird, eine Rolle spiele. Deshalb liess man den Strom nicht mehr durch die Zelle hindurchgehen, sondern benutzte ausser dem reibenden Platinblech ein anderes als Electrode, das an einer beliebigen Stelle in die äussere Flüssigkeit tauchte. Auch bei dieser Anordnung zeigte sich dieselbe Aenderung der Reibung wie vorher. Es ist also der Durchgang des Stromes durch die

Zelle für das Zustandekommen der Erscheinung gleichgültig, und dieselbe wird nur durch die Veränderungen bedingt, die an der reibenden Electrode vor sich gehen. Hiernach scheint es erlaubt, die von Edison und Koch entdeckten Thatsachen als principiell nicht verschieden anzusehen.

Da die Oberfläche der Thonzelle durchaus nicht die zu den Versuchen wünschenswerthe Glätte besass, und deshalb nur beträchtliche Aenderungen der Reibung sich mit ihr beobachten liessen, so wurde sie durch ein sorgfältig geschliffenes und polirtes cylindrisches Glasgefäss ersetzt, das durch Eingiessen von etwas Quecksilber geeignet beschwert wurde und sonst gerade so wie die Zelle an einem etwa $^1/_2$ m langen dünnen Draht möglichst centrisch aufgehängt war. Mit dieser Glasflasche wurde nun in verschiedenen Flüssigkeiten die Reibung gegen die Metalle Platin, Palladium, Gold und Nickel untersucht. Die reibende Metallelectrode war jetzt ein etwa ½ bis 1 mm starkes steifes Blech von ca. 7 cm Länge und 4 bis 6 mm Breite, das, zweimal rechtwinklig umgebogen, die Form ${}^a\text{L}^b_c$ hatte. Mit dem längeren Stiel *a* war es ausserhalb der Flüssigkeit an der Mikrometerschraube befestigt, und mit dem kürzeren, gut polirten verticalen Ende *c* drückte es gegen das Glasgefäss. Um die Polarisation des reibenden Metallbleches in bekannter Weise zu variiren, war meist die in Fig. 7 dargestellte, von Hrn. v. Helmholtz[1]) angegebene Anordnung getroffen. Neben der weiten Glasschale *C*, in die der geschliffene Glascylinder herabging, und in der die reibende Electrode sich befand, standen noch zwei Bechergläser *H* und *O*, die mit derselben Flüssigkeit wie die Schale gefüllt und mit ihr durch je ein Rohr *u* verbunden waren. In jedes der Bechergläser tauchte ein möglichst grosses Blech von gleichem Material wie der reibende Metallstreifen, (oft waren auch diese beiden Bleche direct in *C* eingesetzt), die mit den Enden *h* und *o* eines Rheostaten von 3000 S.-E. verbunden wurden, der eine Batterie *D* von zwei sogenannten hohen Daniells in sich schloss. Solange man mit einer und und derselben Flüssigkeit arbeitete, liess man alle electrischen

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. **11.** p. 737. 1880.

Verbindungen ausser der zu dem reibenden Metallblech führenden ununterbrochen, sodass stets ein Strom von zwei Daniells durch die zwei Electroden *H* und *O* und die Flüssigkeit ging. Durch die so beständig, aber unsichtbar, vor sich gehende Wasserzersetzung werden nach Hrn. von Helmholtz die zwei Electroden in einen Zustand constanter Polarisation versetzt, sodass sie sich verhalten, als wären sie unpolarisirbar. Indem man einen beliebigen Punkt *f* des Rheostaten mit dem reibenden Blech *C* verband, konnte man dasselbe einer Polarisation von 0 bis zu fast ± 2 Daniell unterwerfen. Der in Rechnung zu ziehende Widerstand der zwei Daniells von *a* bis *b* betrug etwa 60 S.-E. Gedreht wurde der Glascylinder, wie früher die Thonzelle, durch die Wirkung eines electrischen Stromes auf den mit ihr fest verbundenen Magneten.

Es war nun die Aufgabe, die Aenderung der Reibung zwischen der mit Flüssigkeit bedeckten Glas- und Metallfläche zu beobachten, wenn man methodisch die in *fC* vorhandene electromotorische Kraft *E* variirte; deshalb wäre es am einfachsten gewesen, man hätte die verschiedene Abnahme der Schwingungen der Glasflasche bestimmen können, die durch verschiedene Werthe von *E* hervorgerufen wurde. Das war aber unmöglich, weil, wenn auch die ablenkende Kraft nicht mehr auf den Magneten wirkte, die Glasflasche doch durch die Reibung an dem Metallstreifen in ihrer abgelenkten Stellung hängen blieb, oder nur langsam und ruckweise in die Gleichgewichtslage zurückkehrte. Man musste sich also auf die Bestimmung des ersten Ausschlages beschränken, der eintrat, wenn der ablenkende Strom ganz kurz geschlossen wurde. Um diese Ausschläge aber unter einander vergleichbar zu machen, war es nöthig, die auf den Magneten wirkende Kraft stets constant zu erhalten, d. h. den durch die Spirale gehenden Strom stets genau gleich lange zu schliessen. Das wurde mit Hülfe eines Pendels folgendermassen erreicht. Ein leichter Eisendraht (Fig. 8) *abcd*, an dessen Ende *d* ein Stück amalgamirten Kupferdrahtes angelöthet war, drehte sich leicht mit seiner horizontalen Axe bei *b* in einem hölzernen Lager und fiel, sich selbst überlassen, nach der Seite

cd herab, bis seine Spitze auf den Boden eines mit Quecksilber gefüllten Becherglases aufstiess. *a* war durch einen Faden *ah* mit dem unteren Ende eines schweren Pendels *P* verbunden, das durch eine Sperrfeder in abgelenkter Lage erhalten wurde. Bei dieser Stellung des Pendels war der Faden *ah* gespannt und *cd* aus dem Quecksilber herausgehoben. Drückte man die Sperrfeder herab, so vollführte das Pendel eine etwa 1,8 Secunden dauernde Schwingung, der Draht *cd* fiel in das Quecksilber und wurde erst wieder herausgezogen, wenn das Pendel fast in seine Anfangslage zurückgegangen war, wo es durch eine zweite vorspringende Feder festgehalten wurde. Diese Vorrichtung war durch Drähte, die zu dem Quecksilder in *g* und dem Draht *a* führten, in die Leitung von der Batterie nach der ablenkenden Drahtspirale eingeschaltet und erlaubte, da das Pendel stets aus derselben Höhe herabfiel, die auf den Magneten wirkende Kraft constant zu erhalten. Trotz dieses Hülfsmittels wird doch auch bei möglichst guter Politur der zwei reibenden Flächen nicht zu erwarten sein, dass die einzelnen Ausschläge völlig unter einander übereinstimmen, vielmehr darf man es als durchaus genügend ansehen, wenn unter gleichen Bedingungen die Ablenkungen nicht mehr unter einander differiren als in nachstehender Tabelle. Sie bezieht sich auf die Reibung von Platin in verdünnter Schwefelsäure gegen Glas. In der ersten Horizontalreihe sind die electromotorischen Kräfte E in Daniells angegeben, die in dem zum reibenden Platinblech führenden Zweig fC wirkten. Die senkrecht unter diesen E stehenden Zahlen geben die Scalentheile an, bis zu welchen die Glasflasche durch den einmaligen Stoss aus ihrer Gleichgewichtslage 23,0 abgelenkt wurde.

Gleichgewichtslage = 23,0.

	E: 0,00 D.	0,16 D.	0,33 D.	0,49 D.
	44,5	53,0	68,6	73,5
	43,9	54,4	68,9	74,3
	43,7	53,5	68,8	74,1
	43,4	53,9	69,8	74,1
	43,7	53,4	69,0	74,2
	43,5	53,5	68,9	74,5
	44,1	53,4	68,6	75,0
Mittel:	43,83	53,59	68,94	74,24

Um nach jedem Ausschlag die Glasflasche wieder in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen, musste man stets den ablenkenden Strom durch eine Wippe umkehren und ihn eine passende Zeit durch einen Taster schliessen.

Im Nachstehenden soll für jede untersuchte Combination aus Metall und Flüssigkeit wenigstens ein Beispiel angeführt werden, wie sich die Reibung mit der in fC wirkenden electromotorischen Kraft oder, wie wir kurz sagen wollen, mit der Polarisation ändert. Die Mitte des Rheostaten ho wollen wir als Nullpunkt nehmen und solche Polarisationen E von C als positiv, resp. negativ rechnen, bei denen die Ableitungsstelle f nach dem Kupfer, resp. Zinkpol verschoben ist, bei denen also C eine H-, resp. O-Polarisation erleidet. Die Gleichgewichtslage der Glasflasche soll stets mit Null bezeichnet werden; die Polarisationen E stehen in der ersten, die zu ihnen gehörigen Ausschläge in den folgenden Verticalreihen. Diese Ausschläge sind, wie die „Mittel" der obigen Tabelle, Mittelwerthe aus mindestens sieben Einzelbeobachtungen. Alle Ablenkungen, die in einer und derselben Verticalreihe angeführt werden, sind unter einander vergleichbar. Oft aber wurden die Ausschläge mit steigender positiver Polarisation der Electrode zu gross oder mit negativer Polarisation zu klein, als dass sie bei der Stellung des Fernrohres und der Scala noch hätten beobachtet werden können; darauf wurde entweder die ablenkende Drahtspirale verschoben oder der Druck zwischen Metall und Glas geändert, und die neuen Ausschläge sind dann mit den früheren nicht mehr vergleichbar.

I. Platin gegen Glas.

a. In verdünnter Schwefelsäure.

E	Ausschlag	
0,00	20,8	—
+0,03	22,5	—
+0,10	27,8	—
+0,16	30,6	—
+0,26	35,6	—
+0,33	45,9	—
+0,49	51,2	—
+0,66	—	36,5
+0,99	—	43,9
+1,32	—	47,7

E	Ausschlag	
0,00	29,0	26,8
−0,33	15,0	21,6
−0,49	13,7	—
−0,66	11,1	17,3
−0,99	7,1	10,6
−1,32	—	5,3

Diese Zahlen zeigen eine stetige Zunahme des Ausschlages, je mehr die reibende Platinelectrode dem Kupferpol der Batterie genähert wurde, d. h. eine Verminderung der Reibung bei wachsender H-Polarisation und eine Vermehrung bei wachsender O-Polarisation. Die Verstärkung der Reibung durch O-Polarisation verschwand viel langsamer, als die Verminderung durch H-Polarisation; hatte man nämlich eine Ableitung $-E$ gemacht und kehrte zur Ableitung Null zurück, so dauerte es geraume Zeit, ehe die frühere Grösse des Ausschlages wieder erreicht war, während nach einer Ableitung $+E$ der alte Ausschlag für die Nullstellung sehr bald wieder eintrat. Momentan erfolgte jedoch bei Aenderung der Polarisation die Aenderung des Ausschlages niemals, sondern es bedurfte stets einer kürzeren oder längeren Zeit, um die constante Grösse des neuen Ausschlages für die neue Polarisation zu gewinnen.

b. In Sodalösung.

E	Ausschlag
0,00	13,7
+0,16	19,1
+0,33	22,8
+0,49	25,4
+0,66	25,9
+0,82	30,7
+0,99	34,5
+1,16	37,7
+1,32	34,7

E	Ausschlag	
0,00	41,0	45,0
−0,16	33,4	—
−0,33	28,7	31,9
−0,49	28,8	—
−0,66	28,1	32,9
−0,99	—	33,3
−1,32	—	31,6

Hier bewirkt die H-Polarisation wieder eine stetige Abnahme der Reibung, die bei Aufhebung der Polarisation ziemlich rasch verschwindet. Durch O-Polarisation wird dagegen nur bis zu etwa $-{}^1/_3$ Daniell die Reibung vermehrt, dann bleibt dieselbe mehr constant, und nur ausserordentlich langsam nimmt diese Verstärkung wieder ab, wenn man die Ableitung Null wieder herstellt.

c. In Kalilauge.

E	Ausschlag	
0,00	26,1	17,2
+0,16	28,9	—
+0,33	27,5	—
+0,49	26,8	—
+0,66	24,8	17,4
+0,82	—	16,0
+0,99	—	17,5

E	Ausschlag
0,00	27,7
—0,16	25,8
—0,33	21,5
—0,49	20,4
—0,66	21,3
—0,99	21,9

Die H-Polarisation ergab hier keine merkliche Aenderung der Reibung, und auch die O-Polarisation zeigte nur einen sehr geringen Einfluss, der nicht einmal bei allen Beobachtungen scharf hervortrat.

d. Nicht so ausführlich untersucht wurden Lösungen von schwefelsaurem Kali, Kochsalz, verdünnte Salzsäure und reines, destillirtes Wasser; doch zeigten alle bei Ableitungen $+E$ eine deutliche Verminderung und bei $-E$ eine Vermehrung der Reibung.

e. In Lösung von Kaliumeisencyanür.

E	Ausschlag	
0,00	34,5	35,7
+0,16	27,6	—
+0,33	20,6	—
+0,49	21,8	—
+0,66	24,7	—
+0,82	—	29,9
+0,99	—	33,9
+1,16	—	36,6
+1,32	—	42,2

E	Ausschlag	
0,00	23,3	35,0
—0,16	30,1	—
—0,33	28,8	—
—0,49	27,4	—
—0,66	26,9	—
—0,99	23,8	—
—1,32	—	34,5
—1,63	—	34,2
—1,96	—	35,2

Die H-Polarisation bewirkte hier anfänglich ein Wachsen der Reibung bis zur Ladung von etwa $+\frac{1}{2}$ Daniell, dann nahm die Reibung wieder ab und erreichte bei $+1$ Daniell ihre ursprüngliche Grösse, um von da ab noch weiter zu sinken. O-Polarisation schien zuerst eine kleine Verminderung der Reibung zu bewirken, doch trat dieselbe nicht bei allen Beobachtungen scharf hervor, sondern manchmal war kaum eine Aenderung der Reibung bis zu Polarisationen von fast -2 Daniell wahrzunehmen. Bemerkenswerth war, dass, wenn man von der Ableitung Null zu H-Po-

larisationen, die grösser als + 1 Daniell waren, überging, dann stets die ersten Ausschläge eine Verstärkung der Reibung andeuteten, die nach kurzer Zeit verschwand, oder einer constanten Reibungsverminderung wich. Z. B. war für die Polarisation Null der mittlere Ausschlag = 36,0 und machte man jetzt $E = +1,16$, so erhielt man successive die Ausschläge 24,0 — 28,0 — 33,0 — 36,9 — 36,5 — 36,7.

II. Palladium gegen Glas.

a. In verdünnter Schwefelsäure.

E	Ausschlag	
0,00	44,8	—
+0,33	48,4	14,9
+0,66	50,9	—
+0,99	—	22,7
+1,32	54,7	29,1

E	Ausschlag	
0,00	31,6	—
—0,16	22,8	—
—0,33	17,0	40,1
—0.49	—	36,6
—0,66	—	32,9
—0,82	—	30,5
—0,99	—	27,3

Palladium verhielt sich ebenso wie Platin, d. h. auch bei ihm bewirkte die H-Polarisation eine Verminderung, die O-Polarisation eine Vermehrung der Reibung; nur scheinen diese Aenderungen nicht so gross zu sein, als sie es für Platin waren.

b. In Sodalösung.

E	Ausschlag
0,00	20,3
+0,66	22,2
+0,99	24,7
+1,32	28,8
+1,96	30,3

E	Ausschlag
0,00	39,2
—0,66	35,4
—1,32	33,5

Die sowohl durch die H- als durch O-Polarisation bewirkte Aenderung der Reibung war nur klein, und gelang es erst nach längeren Bemühungen sie zweifellos nachzuweisen.

c. In Kalilauge.

E	Ausschlag		E	Ausschlag	
0,00	17,6	19,2	+0,33	32,2	31,5
+0,03	19,8	—	+0,66	—	34,5
+0,10	22,9	—	+0,99	—	36,9
+0,16	24,3	—	+1,32	—	39,3
+0,26	29,2	—			

Hier bewirkte die H-Polarisation eine beträchtliche Verminderung der Reibung; die O-Polarisation wurde nicht ausführlicher untersucht, doch ergab sie eine kleine, deutliche Vergrösserung der Reibung.

III. Gold gegen Glas.

Wie schon angeführt, konnte Hr. Koch bei seinen Versuchen keinen Einfluss der electrischen Polarisation auf die Reibung zwischen Gold und Glas in saurem Wasser nachweisen. Die folgenden Beispiele werden denselben jedoch unzweideutig ergeben. Das Gold war als chemisch rein von Sy und Wagner in Berlin bezogen, und es war bei ihm die Erscheinung mindestens ebenso leicht und deutlich hervorzurufen als bei Platin.

a. In verdünnter Schwefelsäure.

E	Ausschlag	
0,00	39,9	29,2
+0,33	42,7	37,8
+0,66	45,1	40,6
+0,99	47,2	42,5
+1,32	48,3	43,6
+1,96	50,9	45,5

E	Ausschlag		
0,00	35,7	48,7	50,2
−0,33	30,5	37,2	—
−0,66	23,6	23,3	45,9
−0,82	—	—	41,8
−0,99	19,5	—	37,4
−1,32	—	—	36,2

Wie man sieht, ist die Aenderung der Reibung mit der Polarisation ziemlich beträchtlich, und auch hier verschwand, wenn man die Ableitung Null wiederherstellte, die Verstärkung der Reibung durch O-Polarisation viel langsamer als die Reibungsverminderung durch H-Polarisation. Doch war bei Gold die Nachwirkung der O-Polarisation entschieden kürzer als bei Platin und Palladium.

b. In Sodalösung.

E	Ausschlag	
0,00	40,8	26,1
+0,07	41,8	—
+0,20	43,6	—
+0,33	44,5	37,2
+0,66	47,4	45,5
+0,99	50,2	50,4
+1,32	53,7	57,4
+1,96	55,5	57,7

E	Ausschlag		
0,00	47,7	39,9	45,6
−0,07	—	38,8	—
−0,16	45,3	—	—
−0,20	—	35,2	—
−0,33	43,1	—	41,6
−0,66	32,8	—	30,4
−1,32	26,2	—	24,4

Auch hier ist die Reibungsveränderung mit der Polarisation gross und deutlich.

e. In Kalilauge.

E	Ausschlag	
0,00	21,9	14,0
+0,03	22,5	—
+0,16	26,7	—
+0,33	29,8	17,3
+0,49	31,6	—
+0,66	37,0	23,5
+0,99	41,1	—
+1,32	45,5	31,5

E	Ausschlag		
0,00	31,3	41,8	34,0
−0,03	29,7	—	—
−0,16	21,4	—	—
−0,33	11,4	24,8	17,8
−0,49	—	27,9	28,9
−0,66	—	31,1	30,7
−0,99	—	32,1	31,3
−1,32	—	32,5	31,6

Während hier die H-Polarisation wie gewöhnlich eine starke Verminderung der Reibung bewirkt, wächst diese mit der O-Polarisation nur bis etwa — $^1/_3$ Daniell sehr stark, um dann bei weiterer Vergrösserung von — E wieder allmählich abzunehmen.

IV. Nickel gegen Glas.

Weder in destillirtem Wasser noch in Kalilauge liess sich eine Aenderung der Reibung wahrnehmen, wohl aber gelang es, den Einfluss der H-Polarisation auf die Reibung nachzuweisen

in Sodalösung.

E	Ausschlag	
0,00	22,8	—
+0,33	—	29,2
+0,66	27,8	32,5
+0,99	—	36,8
+1,32	29,2	40,0

Bei allen angeführten Versuchen wurde die Aenderung der Polarisation theils so vorgenommen, dass man einfach die bestehende Ableitung zu dem Metallstreifen C unterbrach und statt ihrer eine andere machte, wobei also eine kurze Zeit lang kein Strom durch die reibende Metallelectrode ging, theils jedoch, um diese Stromlosigkeit zu vermeiden, in der Art, dass man die zweite Ableitung herstellte und

erst dann die erste aufhob. Sehr oft wurde auch nach jeder Ableitung wieder die Ladung Null eingeführt, d. h. der Draht fC bei f in die Mitte des Rheostaten eingesetzt und mit Herstellen einer neuen Ableitung gewartet, bis ein in fC eingeschaltetes Galvanometer keinen Strom mehr nachwies und somit zeigte, dass die electrische Differenz zwischen C und H wieder ebenso gross, aber entgegengesetzt geworden war, als zwischen C und O. Natürlich brauchte man zu dieser Art der Beobachtung sehr viel Zeit und war leicht der Gefahr ausgesetzt, dass zufällige Störungen die Beobachtungsreihe nicht vollenden liessen. Alle diese Modificationen änderten an dem Qualitativen der Erscheinung nichts. Statt der beschriebenen Aenderung mit drei Electroden wurde manchmal für O und H nur eine angewandt, die dann also sich entgegengesetzt polarisirte, wie C. Ehe man in diesem Falle die Versuche anstellte, schloss man natürlich die zwei Electroden tagelang in sich, bis ihre electrische Differenz möglichst ausgeglichen war. Auch bei diesem Verfahren zeigten sich dieselben Wirkungen.

Die vorstehenden Beobachtungen ergeben jedenfalls, dass nicht nur die O-Polarisation, wie Hr. Koch fand, sondern auch die H-Polarisation eine bedeutende Aenderung der Reibung zwischen den angeführten Körpern bewirkte, und zwar verursacht sie bei allen untersuchten Metallen und Flüssigkeiten eine mehr oder minder grosse Reibungsverminderung. Eine Ausnahme bildet nur Platin in Kalilauge, bei dem keine Aenderung der Reibung beobachtet wurde, doch mag dies wohl daher rühren, dass bei diesen Versuchen, wie sich nachher herausstellte, die Kalilauge nicht rein gewesen war. Auch in concentrirter Lösung von gelbem Blutlaugensalz zeigte Platin anfänglich bei H-Polarisation eine Zunahme der Reibung. Bei diesem Salz sind die durch Electrolyse ausgeschiedenen Producte aber nur theilweise gasförmig, und wir können deshalb wohl allgemein sagen, dass Platin, Palladium, Gold und Nickel in leitenden Flüssigkeiten, von denen sie chemisch nicht angegriffen werden, und deren Zersetzung Gase (H, O, Cl) an den Electroden entwickeln würde, bei H-Polarisation eine Verminderung, bei O-Polarisation eine

Vermehrung der Reibung gegen Glas zeigen, wenn die wirkende electromotorische Kraft so klein ist, dass sie die Flüssigkeit nicht zersetzt.

Für Platin gegen Glas in verdünnter Schwefelsäure hat schon Hr. Krouchkoll den Einfluss der H-Polarisation in einer Mittheilung[1]) festgestellt, die erschien, als die obigen Versuche noch nicht beendigt waren. Er sagt, dass eine electromotorische Kraft von $^1/_2$ Daniell genügte, um die Erscheinung nachzuweisen. Das Obige zeigt, dass unter günstigen Umständen viel kleinere electrische Kräfte die Wirkung hervorrufen. Ueberhaupt wird wohl nur die Unempfindlichkeit der angewandten Methode der Beobachtung des Phänomens bei kleinen Polarisationen eine Schranke setzen. Denn jenachdem die Politur der zwei reibenden Flächen mehr oder weniger gut war, und ihr Druck gegeneinander passend gewählt wurde, waren die Differenzen der Ausschläge bei Aenderung der Polarisation grösser oder kleiner, und es liessen sich bei günstigen Umständen dann auch kleinere Variationen der electromotorischen Kraft als die Reibung ändernd nachweisen. — Sehr oft musste die Glasflasche oder der Metallstreifen aus der Flüssigkeit genommen, abgewischt und gereinigt werden, um Staubtheilchen, Luftbläschen oder dergleichen, die sich an sie angehängt und zwischen sie geschoben hatten, zu entfernen. Bei der Neueinstellung gelang es dann natürlich nie genau, dieselben Stellen der reibenden Flächen und genau denselben Druck zwischen ihnen wieder zu treffen, sodass leider alle einzelnen Beobachtungsreihen untereinander nicht vergleichbar sind, und man sich darauf beschränken musste, das Qualitative der Erscheinung, die Ab- und Zunahme der Reibung zu constatiren. Dieser Unvergleichbarkeit der einzelnen Beobachtungsreihen wegen hätte die Angabe von mehreren derselben keinen Zweck gehabt, und durfte es deshalb im Obigen genügen, aus sehr vielen Versuchen stets nur ein oder zwei Beispiele anzuführen.

Sind die angewandten electromotorischen Kräfte so gross, dass sie die Flüssigkeit zu zersetzen vermögen, so kann eine

1) Krouchkoll, Compt. rend. 95. Jul. 1882.

Aenderung der Reibung zwischen Metall und Glas, die durch die Flüssigkeit getrennt sind, nicht Wunder nehmen. Denn in diesem Falle bleibt die Zusammensetzung der Flüssigkeit nicht mehr dieselbe, es werden sich gasförmige oder feste Producte der Electrolyse an die Metallfläche ansetzen, und hierdurch muss natürlich die Reibung geändert werden. In welchem Sinne das geschieht, lässt sich freilich nicht voraussetzen, nur darf man wohl annehmen, dass, sobald Gase an der Metallfläche auftreten, die Reibung vermindert werden wird, da dann die starke Adhäsion, welche eine dünne Flüssigkeitsschicht zwischen zwei festen Körpern bewirkt, theilweise aufgehoben wird. In der That zeigte sich die Glasflasche auch stets viel leichter beweglich als vorher, wenn man bei Flüssigkeiten, die H oder O ausschieden, eine electromotorische Kraft von etwa zwei Daniell anwandte, wo dann nach einiger Zeit auch sichtbare Gasblasen auftraten. — Anders ist es bei electromotorischen Kräften, die wenig über oder unter einem Daniell liegen; sie können die Flüssigkeit nicht zersetzen und ihre Zusammensetzung ändern, und der auch bei ihnen stets durch die Flüssigkeit hindurchgehende dauernde Strom wird, wie Hr. von Helmholtz gezeigt hat, nur durch den von einer zu der andern Electrode erfolgenden Transport der Gasvorräthe vermittelt, die in den Electroden oder der Flüssigkeit von früher her aufgespeichert sind oder während der Beobachtung aus der umgebenden Atmosphäre von ihnen absorbiert werden. Es lag deshalb die Vermuthung nahe, dass die Occlusion von Gas in der Electrode die Ursache der Reibungsänderung sei. Freilich sprach die Thatsache, dass auch Gold die Erscheinung, und zwar mindestens ebenso stark wie Platin und Palladium zeigte, nicht für diese Vermuthung, denn während Platin und Palladium bekanntlich H in beträchtlicher Menge verschlucken, ist es noch ungewiss, ob dies bei Gold überhaupt geschieht, und jedenfalls wird es in viel geringerem Maasse der Fall sein. Auch eine Aufnahme von O durch die Metalle erfolgt nur in sehr geringem Grade, und trotzdem zeigte schwache O-Polarisation einen sehr beträchtlichen Einfluss auf die Reibung. Um jedoch die genannte Annahme zu prüfen, entwickelte man mit vier

Daniells lange Zeit O an dem Metallstreifen *C*, der den etwa occludirten H möglichst entfernen und das Blech mit O sättigen sollte, drückte das Metall dann leicht an die Glasflasche an und stellte ihm als zweite Electrode ein grosses Metallblech gegenüber. Mit diesen zwei Electroden führte man nun eine Beobachtungsreihe aus, und bei ihr zeigte sich der Einfluss der H- und der O-Polarisation auf die Reibung deutlich. Hierauf wurde tagelang an dem reibenden Metallstreifen H entwickelt, die darauf ausgeführten Versuche ergaben jedoch wieder die früheren Resultate. Würde nun z. B. die Aufnahme von H durch das Metall die Verminderung der Reibung herbeiführen, so müsste, wenn es mit H gesättigt war und dann als negative Electrode bei den Versuchen verwandt wurde, keine Aenderung der Reibung zu bemerken gewesen sein, da eine Aufnahme von H nicht mehr geschehen konnte. Freilich bleibt noch der Einwand möglich, dass man nie sicher war, die Sättigung durch Gas völlig erreicht zu haben, jedenfalls jedoch hätte das Metall nur sehr viel langsamer als früher H aufnehmen können, und die Reibungsverminderung hätte viel kleiner sein und allmählicher erfolgen müssen, als bei einer vorhergehenden Behandlung mit O. Von derartigem war aber durchaus nichts zu bemerken. Demnach scheinen die Vorgänge der Gasocclusion und deren Beseitigung nicht die Ursache für unsere Erscheinung zu sein.

Eine andere Hypothese, die geprüft werden musste, war, ob die Bildung der electrischen Doppelschicht, wie sie die Polarisation an den Electrodenflächen hervorbringt, die äussere Reibung zwischen der gegen das Glas gedrückten Metallfläche und der von der bewegten Glasflasche mitgenommenen Flüssigkeit ändere, etwa eine grössere oder kleinere Gleitung hervorriefe. Dass überhaupt Gleitung zwischen Metall und Flüssigkeit stattfindet, haben die Versuche der Hrn. von Helmholtz und von Piotrowsky für Gold und Wasser gezeigt, und es wäre wohl denkbar, dass H-Polarisation dieselbe vergrösserte, O-Polarisation sie verminderte. Die Vermuthung wurde in der Art geprüft, dass man nach der Coulomb'schen Methode die Dämpfung untersuchte, die eine

verschieden polarisirte, in einer Flüssigkeit schwingende Metallplatte erlitt. Zu dem Zweck wurde eine sorgfältig abgedrehte Messingscheibe in ihrer Mitte durchbohrt und in die Durchbohrung ein starker Messingstiel von 10 cm Länge eingeschraubt, der durch die Holzunterlage eines kleinen Spiegels und durch die Mitte eines kleinen Magnetes ging. Von der Mitte des oberen Stielendes war eine feine, etwa $^1/_2$ cm lange, conische Durchbohrung nach der Seite geführt, durch welche man einen Messingdraht steckte, den ein kleiner in die seitliche Oeffnung geschobener Stift festhielt. Der Messingdraht war oben in einem an einem starken Gasarm befestigten Feilkloben eingeklemmt, sodass an ihm die Scheibe horizontal hing und um ihn sich centrisch drehen konnte. Die Scheibe und ihr Stiel wurden, nachdem dieser in sie eingeschraubt worden, galvanisch vergoldet. Der Durchmesser der schwingenden Scheibe, die durch kleine Ablenkungen des Magnetes in Bewegung gesetzt wurde, betrug im Mittel 150,26 mm, ihre mittlere Dicke war 2,89 mm; die Länge und Dicke des Aufhängedrahtes betrug 1010 und 0,290 mm. Der Apparat hing in eine weite Glasschale herab, auf deren Boden in einem Abstand von 2—3 cm von der Scheibe und centrisch zu ihr eine ebene runde Glasplatte von 23 cm Durchmesser horizontal befestigt war. Die Glasschale wurde etwa 9 cm hoch mit Flüssigkeit (saurem Wasser oder Sodalösung) gefüllt und an die Stelle der mittleren Glasschale in Fig. 7 gesetzt, sodass die schwingende Scheibe jetzt als Electrode diente. Wenn nun die Polarisation der Scheibe eine Aenderung in der äusseren Reibung zwischen Gold und Flüssigkeit hervorbrachte, so musste das logarithmische Decrement der Schwingungen der Scheibe sich mit der Polarisation ändern. Das war aber nicht merklich der Fall, wie folgende Versuche mit verdünnter Schwefelsäure, bei denen die Entfernung von Spiegel und Scala 2,27 m betrug, darthun:

E	log. Decrem.	E	log. Decrem.
+0,99	0,16084	−0,33	0,16063
+0,66	0,16089	−0,66	0,16048
+0,33	0,16107	−0,99	0,16051
0,00	0,16052		

Das Decrement ist in Brigg'schen Logarithmen angegeben und ist das Mittel aus vier einzelnen Decrementen, die aus neun beobachteten Umkehrpunkten berechnet sind und untereinander ebenso stark abweichen, wie es die obigen Mittelwerthe thun.

Für Sodalösung erhielt man:

E	log. Decrem.	*E*	log. Decrem.
+0,99	0,15016	−0,33	0,15016
+0,66	0,15026	−0,66	0,15031
+0,33	0,15004	−0,99	0,15015
0,00	0,14981		

Die grössten Abweichungen zwischen den angeführten logarithmischen Decrementen verschiedener Polarisationen betragen 0,4%, und es ergeben somit die Beobachtungen keinen Einfluss der Polarisation auf die Reibung der Flüssigkeit gegen die vergoldete Messingplatte. Allerdings muss bemerkt werden, dass die Verhältnisse zur Polarisation der schwingenden Scheibe nicht so günstig waren, wie bei der Polarisation des an der Glasflasche reibenden Metallstreifens, denn die grossen Dimensionen der Scheibe gestatteten nicht, ihr Electroden gegenüber zu stellen, die grösser als sie selbst waren, während bei den früheren Versuchen die Bleche *H* und *O* sehr viel bedeutendere Dimensionen hatten als der Streifen *C*, und dadurch dieser schon stark polarisirt wurde, während dies bei *H* und *O* noch nicht der Fall war. Deshalb wäre es immerhin noch denkbar, dass bei günstigeren Versuchsbedingungen sich der gesuchte Einfluss, jedoch wohl jedenfalls als nur von kleiner Grösse, nachweisen liesse. Bei den starken Einwirkungen der Polarisation auf die Reibung aber, wie sie die früheren Versuche zeigen, kann man die Aenderung der äusseren Reibung der Flüssigkeit an dem Metall wohl nicht als Grund unserer Erscheinung betrachten.

Während so die obigen Beobachtungen die Ursache des Phänomens nicht festgestellt haben, wäre es möglich, dass man mit Hülfe der Anschauungen, die Hr. von Helmholtz

in seinen „Studien über electrische Grenzschichten" [1]) entwickelt hat, zu einer Erklärung gelangen könnte. Nach der dort eingeführten Betrachtungsweise würden sich bei unserer Versuchsanordnung zwei electrische Doppelschichten nahe gegenüber stehen, die eine hervorgerufen durch den Contact zwischen Glas und Flüssigkeit, die andere an der polarisirten Metallelectrode gebildet. Der positive Theil der ersten Doppelschicht läge, wie die Versuche von Hrn. Quincke zeigen, fast stets in der Flüssigkeit, dasselbe wäre bei H-Polarisation für die Doppelschicht an der Metallelectrode der Fall, während O-Polarisation den negativen Theil derselben in die Flüssigkeit fallen machte. Da somit in den capillaren, mit Flüssigkeit erfüllten Raum, der sich zwischen Metallelectrode und Glasflasche befindet, bei H-Polarisation gleichnamige, bei O-Polarisation ungleichnamige Theile der zwei Doppelschichten fallen, so wäre es denkbar, dass die hierdurch bewirkte verschiedene Anordnung der Molecüle in dem Capillarraum die innere Reibung der Flüssigkeit in demselben so modificirte, wie es die beschriebenen Erscheinungen verlangten.

Ob dieser Erklärungsversuch berechtigt ist, hätten neue Beobachtungen womöglich mit einer Flüssigkeit zu entscheiden, die mit Glas eine Doppelschicht entwickelt, deren negativer Theil in die Flüssigkeit fällt, und bei der dann O-Polarisation eine Verminderung, H-Polarisation eine Vermehrung der Reibung bewirken müsste.

Die vorstehende Arbeit wurde, grösstentheils während des vorigen Jahres, im Laboratorium des Hrn. Geh.-Rath von Helmholtz ausgeführt, und sei es mir gestattet, demselben meinen aufrichtigen Dank zu sagen für die Anregung und die gütige Unterstützung mit Rath und That, die er mir stets gewährt hat.

---

1) v. Helmholtz Wied. Ann. 7. p. 337. 1879.

IX. *Ueber das Verhalten des Kalkspaths im homogenen magnetischen Felde; von Franz Stenger.*

(Hierzu Taf. I Fig. 9—12.)

Ueber das Verhalten krystallinischer Mittel in einem intensiven magnetischen Felde liegt allerdings schon eine Reihe von Untersuchungen vor; da sie aber alle die benutzten Krystalle nur in wenigen, besonders wichtigen Lagen der Hauptaxen oder Spaltungsebenen gegen die Kraftlinien des Feldes der Beobachtung unterwerfen, ist es wünschenswerth, für einen Körper wenigstens die Untersuchung auf die verschiedensten Lagen auszudehnen.

§ 1. Kurze historische Uebersicht über das vorhandene Beobachtungsmaterial und die aufgestellten Theorien über die magnetische Induction in nicht isotropen Körpern.

Die ersten von Plücker[1]) ausgeführten Beobachtungen sind allein darauf gerichtet, die verschiedensten Krystalle mit einer krystallographischen Hauptaxe auf die Art ihrer Einstellung im homogenen Felde zu betrachten und ihrem Verhalten entsprechend in mehrere Gruppen einzutheilen. Denselben Zweck verfolgen auch die einschlägigen Untersuchungen Faraday's[2]) und jene von Knoblauch und Tyndall.[3]) Die späteren Beobachtungen von Plücker[4]) in Gemeinschaft mit Beer beschäftigen sich vorwiegend mit Krystallen des monoklinen und triklinen Systemes, und zwar handelt es sich stets um die Bestimmung der beiden magnetischen Axen, d. h. der Richtungen im Krystall, um welche als Drehungsaxe eine Einstellung im homogenen Felde nicht stattfindet.

1) Plücker, Pogg. Ann. **72.** p. 315. 1847; **76.** p. 576. 1849; **77.** p. 447. 1849; **78.** p. 428. 1849.

2) Faraday, Exper. Researches. (22) 1848. § 2457 etc.

3) Tyndall, Pogg. Ann. **79.** p. 223. 1850; **81.** p. 481. 1850.

4) Plücker, Pogg. Ann. **81.** p. 115. 1850; **82.** p. 42. 1851. Phil. Trans. 1858 p. 570.. Pogg. Ann. **110.** p. 397. 1860.

Aus allen diesen Untersuchungen ergab sich der Schluss, dass Krystalle, die nicht dem regulären System angehören, verschieden stark inducirt werden, je nach ihrer Lage gegen die Kraftlinien des Feldes, dass sie also im homogenen Felde eine bestimmte Einstellung annehmen müssen, im nicht homogenen Felde dagegen eine verschieden starke Anziehung oder Abstossung erleiden. Für letzteren Fall sind von Tyndall[1]) und Hankel[2]) einige Beobachtungen vorhanden. Ausserdem suchten Rowland und Jacques[3]) unter Benutzung eines symmetrischen magnetischen Feldes die Constanten der diamagnetischen Induction, welche die Stärke der Abstossung nach verschiedenen Richtungen definiren, für Kalkspath und Wismuth zu bestimmen. Dabei sind sie jedoch (nach einer Mittheilung Rowland's an v. Ettingshausen ist bei der Berechnung ein Fehler begangen worden) zu Resultaten gelangt, die auf den ersten Blick sich als unmöglich richtig erweisen. Sie finden nämlich, dass bei beiden Körpern die diamagnetische Induction in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe am kleinsten ist; da sich aber die Axe des Kalkspathes senkrecht zu den Kraftlinien stellt, und stets die Richtung der schwächsten diamagnetischen Induction mit den Kraftlinien zusammenfällt, ist das für Kalkspath gewonnene Resultat genau das Gegentheil von dem, was man erwarten muss.

Alle bis jetzt über das Verhalten krystallinischer Mittel im homogenen Felde — auf welches wir unsere weiteren Betrachtungen beschränken wollen — aufgestellten Theorien kommen, so verschieden auch ihre Ausgangspunkte erscheinen, auf dasselbe hinaus, auf die Behauptung nämlich, dass eine Krystallkugel genau dieselben Erscheinungen darbieten soll, wie ein gewisses dreiaxiges Ellipsoid aus einem isotropen Mittel.

---

1) Tyndall, Pogg. Ann. 83. p. 400. 1851.

2) Hankel, Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-physik. Classe. 1851. p. 99.

3) Rowland u. Jacques, Amer. Journ. for Arts and Science. 18. p. 360. 1879.

Schon Poisson[1]) machte in seiner Theorie des Magnetismus auf die Möglichkeit aufmerksam, dass Krystalle nach verschiedenen Richtungen ein verschiedenes Verhalten im magnetischen Felde zeigen könnten, verfolgte aber den Gegenstand nicht weiter, weil man zu seiner Zeit magnet-krystallische Erscheinungen noch nicht beobachtet hatte.

William Thomson[2]) nahm nach der Veröffentlichung der ersten Plücker'schen Arbeiten über die magnetischen Eigenschaften der Krystalle den Gegenstand wieder auf, begründete aber seine Theorie nicht, wie Poisson, auf die Annahme zweier magnetischer Fluida, sondern benutzte als Grundlage bestimmte Erfahrungssätze, vor allem aber den für schwach magnetische und alle diamagnetischen Substanzen allgemein anerkannten Satz, dass man gegenüber den vom magnetischen Felde ausgeübten Kräften die vom inducirten Körper herrührenden vernachlässigen dürfe.

Eine ausführlichere Darstellung der Thomson'schen Theorie haben Mascart und Joubert in ihrem Lehrbuch über Electricität und Magnetismus gegeben.

Der einzige Versuch, eine Theorie der magnetischen Induction in Krystallen aufzustellen, welche den magnetischen Zustand des Körpers nicht nur von der Richtung und Intensität der magnetisirenden Kraft abhängig annimmt, sondern auch von dem Magnetismus des inducirten Körpers, ist von Beer in seiner „Einleitung in die Electrostatik, die Lehre vom Magnetismus und der Electrodynamik“ unternommen worden. Leider hat er jedoch bei der Entwicklung seiner Theorie einige Annahmen eingeführt, die mindestens ebenso zweifelhaft sind, als eine Berechtigung, die Selbstinduction der Molecüle aufeinander zu vernachlässigen. Um nämlich die Wirkung des inducirten Körpers selbst auf einen seiner Punkte zu bestimmen, legt er, wie üblich, eine kleine Fläche um denselben und drückt das Potential der ausserhalb dieser Fläche gelegenen Masse auf den betrachteten Punkt aus. Offenbar erhält man, wenn man die Dimensionen der Hülfsfläche gegen Null convergiren lässt, schliesslich das Potential

1) Poisson, Mém. de l'Inst. 5. p. 258. 1821/22.

2) W. Thomson, Phil. Mag. (4) 1. p. 177. 1851.

des im Körper inducirten Magnetismus auf den betrachteten Punkt, und zwar muss man zu einem Ausdrucke kommen, der von der Gestalt der Hülfsfläche unabhängig ist.

Beer dagegen nimmt von vornherein an, jene Fläche sei ein Ellipsoid, und verfügt sogar noch willkürlich über seine Axenverhältnisse, während es nöthig gewesen wäre, den Beweis zu führen, dass man zu demselben Resultate kommt, welche Form die Hülfsfläche auch haben mag. Dass sein Verfahren nicht einwurfsfrei ist, geht schon aus dem Umstande hervor, dass er unter Berücksichtigung der Selbstinduction zu demselben Resultate gelangt, wie die übrigen Theorien, welche eine Einwirkung der Theilchen aufeinander vernachlässigen.

Zu erwähnen ist endlich noch die Theorie von Plücker.[1]) Die Beobachtungen, welche Plücker an den Krystallen des rhombischen und monoklinen Systems in einem homogenen magnetischen Felde vorgenommen hatte, führten ihn einerseits zur Vernachlässigung der Selbstinduction, andererseits zu den beiden magnetischen Axen, senkrecht zu welchen die Stärke der Induction in allen Richtungen die gleiche war. Die unverkennbare Analogie, die sich in diesen Erscheinungen kund gab, zwischen dem Verhalten eines Krystalles — dessen Selbstinduction unberücksichtigt bleiben kann — und eines Eisenellipsoides, dessen Theilchen aufeinander inducirend wirken, veranlasste Plücker, eine Theorie aufzustellen, die beide Fälle umfassen sollte. Auf diese Weise erhielt er nicht nur die Bedingungen für das Gleichgewicht krystallinischer Körper in einem homogenen Felde, sondern auch Ausdrücke für die Schwingungsdauern des Eisenellipsoids, resp. des Krystalles um einen verticalen Durchmesser.

Es lag somit nahe, durch Beobachtung dieser Schwingungsdauern zu untersuchen, ob die Voraussetzungen, welche der Plücker'schen Theorie als Basis dienen, beizubehalten sind oder nicht. Die zu dem Zwecke von Plücker unternommenen Versuchsreihen sind auch besonders beachtenswerth, weil sie bisher die einzigen waren, die eine Prüfung

1) Plücker, Phil. Trans. 2. p. 570. 1858.

der Theorie in einfacher Weise ermöglichten. In der That zeigte sich nun, dass die Beobachtungsdaten den Verhältnissen entsprechend recht gut mit den aus seiner Theorie berechneten Werthen vereinbar waren. Man darf dabei jedoch Folgendes nicht vergessen: Einmal hat Plücker nur ganz wenige Lagen der Krystalle gegen die Kraftlinien untersucht, und vor allem war seine Bestimmung der Schwingungsdauern eine so rohe, dass man versucht ist, die zwischen Theorie und Erfahrung gefundene Uebereinstimmung für ein Spiel des Zufalles zu halten.

Eine Untersuchung, welche Krystalle eines und desselben Körpers in möglichst vielen verschiedenen Lagen in Bezug auf das magnetische Feld beobachtet und zugleich eine Vergleichung mit den Folgerungen einer der angeführten Theorien — ich werde mich im Folgenden an die Thomson'sche anschliessen — gestattet, dürfte daher nicht vergebens sein. Durch eine geeignete Wahl der Bedingungen des Versuches wird die Berechnung sogar eine sehr einfache.

Experimenteller Theil.

§ 2. Vorversuche.

Da genau genommen ein homogenes Feld nicht existirt, empfiehlt es sich, um sich von den Einflüssen der Gestalt des betrachteten Körpers möglichst zu befreien, denselben in der Form einer Kugel zu verwenden, und zwar wurde bei den folgenden Versuchen Kalkspath gewählt, weil er die magnet-krystallischen Erscheinungen in recht prägnanter Weise zeigt.

Zur Erzeugung des magnetischen Feldes, welches im weiteren Verlaufe sich als hinreichend homogen erwies, diente ein Ruhmkorff'scher Electromagnet mit flachen, im Durchmesser 17 cm messenden und um 8,8 cm voneinander entfernten Polplatten. Mitten zwischen diesen befand sich die zu untersuchende Kalkspathkugel von nahezu 4,4 cm Durchmesser an einer bifilaren Suspension. Die oberen Enden des dazu verwendeten etwa 3 m langen, sehr dünnen Silberdrahtes waren an die beiden Haken einer Suspensionsvorrichtung

geknüpft, während er in der Mitte, um eine gleichmässige Spannung der beiden Drahthälften zu erreichen, über eine kleine, leicht um ihre Axe drehbare Messingrolle geleitet war.

Letztere war (Fig. 9) an einem Messingstabe angebracht, der eine kreisförmige Glasplatte von etwa 4 cm Durchmesser trug. Mit dieser war eine zweite von etwas grösserem Umfang durch drei Fäden in paralleler Lage verbunden, welche schliesslich einen zur Aufnahme der betrachteten Kugel dienenden Glascylinder von 1 cm Höhe und $2^1/_2$ cm Durchmesser trug.

Die beiden Drähte waren mit einem weiten Glasrohr, die untere Aufhängung mit einem Kasten, der die beiden Windungen des horizontalen Electromagnetes umfasste, umschlossen, um den schädlichen Einfluss von Luftströmungen auf die Schwingungen der Aufhängung zu beseitigen.

Auf der Kalkspathkugel war die Richtung des der optischen Axe, welche zunächst ganz roh durch das Fehlen der Doppelbrechung bestimmt war, parallelen Durchmessers durch zwei schwarze Punkte markirt. Den nöthigen Strom endlich lieferten vier für jeden Versuch frisch zubereitete grosse Bunsen'sche Elemente.

Von der Constanz des den Electromagnet erregenden Stromes und damit der Stärke des magnetischen Feldes während der Beobachtung konnte man sich durch Ablesungen an einer in eine Zweigleitung eingeschalteten Tangentenbussole überzeugen.

Mit Spiegel und Scala wurde sodann die Schwingungsdauer des ganzen Systemes untersucht, welche dasselbe hatte bei erregtem Magnetismus oder allein infolge der Directionskraft der bifilaren Suspension, und zwar einfach durch Beobachtung der Zeiten, in welchen eine bestimmte Zahl von Schwingungen ausgeführt wurden. So wurden diese Schwingungsdauern bei den verschiedensten Lagen der Kugel auf dem Glascylinder beobachtet; es gelang jedoch auf diesem Wege durchaus nicht, mit Sicherheit die Abhängigkeit der Schwingungsdauern von der Lage der optischen Axe gegen die Kraftlinien nachzuweisen, jedenfalls, weil gegen das von der bifilaren Suspension ausgeübte Drehungsmoment das von

den magnetischen Kräften herrührende von zu geringem Einflusse ist.

Es wurde aus diesem Grunde nothwendig, die bifilare Aufhängung, so grosse Vorzüge sie auch vor einer unifilaren hat, aufzugeben und das System an einem Drahte aufzuhängen.

Ausserdem hatten sich bei diesen Vorversuchen eine Reihe von Missständen ergeben, deren Beseitigung im Interesse genauerer Resultate unumgänglich war. Einmal war der bei der Aufhängung benutzte Silberdraht auf eine Zwirnspule aufgewickelt gewesen und zeigte infolge dessen beim Abwickeln starke spiralige Torsionen, die nach der Herstellung der ganzen Suspension ausserordentlich langsam abnahmen, sodass die Ruhelage sich ununterbrochen änderte. Es war ferner, der bequemen Vergleichung wegen, nöthig, die Stärke des erregenden Stromes constant zu machen, die Abnahme des durch die verwendete Batterie gelieferten Stromes durch ein entsprechendes Ausschalten von Ballastwiderstand zu compensiren.

Ausserdem war es höchst störend, dass der unten an den drei Zwirnfäden hängende Theil der Suspension infolge seiner Beweglichkeit von der Directionskraft der bifilaren Aufhängung unabhängig pendelnde Schwingungen vollführte, sodass die Amplitude nicht, wie man hätte erwarten sollen, regelmässig abnahm, sondern zeitweise stark anwuchs. Auch waren Luftströmungen innerhalb des Kastens noch nicht völlig ausgeschlossen.

Endlich war ein Verfahren zu ermitteln, das die Bestimmung der optischen Axe im Kalkspath genau zu finden erlaubt.

§ 3. Beseitigung der angeführten Uebelstände.

Um dem Silberdraht jede Spur der ihm anhaftenden spiraligen Torsion zu nehmen, wurde er an seinem oberen Ende in die im Folgenden stets benutzte Torsionsvorrichtung, an seinem unteren Ende in ein mit einer gut amalgamirten Spitze versehenes Metallstück angeklemmt; die Spitze tauchte in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss. Letzteres stand mit dem einen, der Suspensionskopf mit dem anderen Pol einer

Batterie in leitender Verbindung. Infolge des bedeutenden Widerstandes, den der feine Silberdraht dem ihn durchfliessenden Strome entgegensetzt, erwärmte er sich stark und folgte alsdann leicht dem Zuge des angehängten Gewichtes. Dieser Process wurde solange fortgesetzt, bis die Beobachtung mit Fernrohr und Scala eine Veränderung der Ruhelage nicht mehr erkennen liess.

Was sodann die Constanz des Stromes und der Intensität des Feldes betrifft, so war ihre Herstellung ziemlich einfach; mit der Abnahme des Stromes wurde in entsprechender Weise Ballastwiderstand ausgeschaltet. Der starken angewandten Ströme wegen (es wurden bei den späteren Versuchen acht grosse Bunsen'sche Elemente angewandt) konnte ein gewöhnlicher Neusilber- oder Platindrahtrheostat nicht benutzt werden; für die groben Einstellungen diente daher ein Widerstandsapparat, wie man ihn für electrische Beleuchtungen braucht, um Widerstände nach Belieben zwischen $^1/_{10}$ und 6—10 Ohms ein- oder ausschalten zu können, für die genaue Einstellung dagegen ein mit Quecksilber gefülltes enges Glasrohr, in welchem einer der Leitungsdrähte auf und ab bewegt werden konnte. Die Unveränderlichkeit der Stromstärke wurde mit einem in einem Nebenschluss befindlichen Galvanometer mit astatischem Nadelsystem controlirt.

Als bestes Verfahren zur Auffindung der Richtung der optischen Axe der Kalkspathkugel wurde schliesslich das Folgende angewandt. Die Kugel wurde zwischen Polarisator und Analysator eines Polarisationsmikroskopes gebracht und so gestellt, dass die Mitte der auftretenden Ringfigur mit der Mitte des Ocularmikrometers coincidirte. Sodann wurden an die Kugel zwei Kartenblätter bis zur Berührung gebracht (und zwar senkrecht zur Sehlinie des Instrumentes) und solange in den entsprechenden Verticalebenen verschoben, bis durch zwei sehr feine, in ihnen befindliche Oeffnungen die Mitte der Ringfigur sichtbar war. Offenbar gehören dann dem dünnen Lichtkegel, der beide Oeffnungen durchsetzt, auch diejenigen Strahlen an, welche parallel der optischen Axe durch den Krystall gegangen sind. Indem man die

Oeffnungen hinreichend verkleinert, kann man daher die Richtung der optischen Axe sehr genau bestimmen. Um sie zu fixiren, wurden mit einem feinen Haarpinsel die Stellen der Kugel mit Tusche markirt, an welchen die Oeffnungen der Kartenblättchen anlagen. Dabei ist indessen wohl zu beachten, dass man so nicht den der optischen Axe parallelen Durchmesser, sondern nur eine ihr parallele Sehne findet.

Weitaus die meisten Schwierigkeiten bereitete die Herstellung des Theiles der Aufhängung, welcher zur Aufnahme der Kalkspathkugel dienen sollte. Seine einzelnen Stücke mussten nach den früheren Bemerkungen starre Verbindungen bilden, um nicht für sich schwingen zu können; ausserdem durfte die Aufhängung allein ohne die Kalkspathkugel infolge der magnetischen Kräfte nicht gerichtet werden, ohne welche Annahme die im Folgenden gegebene Berechnung des Problemes ausserordentlich verwickelt werden würde. Metalle konnten für die Construction von vornherein nicht in Betracht kommen, weil sie wegen der beim Schwingen des Systemes im magnetischen Felde in ihnen inducirten Ströme so stark dämpfend auf die Bewegung gewirkt hätten, dass eine genaue Bestimmung der Schwingungsdauer unmöglich gewesen wäre. Hartgummi ferner wurde als nicht eisenfrei befunden; es wurde daher ein Versuch mit Pockholz in folgender Form unternommen. Zwei daraus gedrehte hohle Halbkugeln konnten mit vier kleinen Holzstiftchen aneinander gefügt werden und fassten dann in ihrem Inneren einen kugelförmigen Raum, der genau der Grösse der Kalkspathkugel entsprach. Auf diese Hohlkugel war ein dünner Holzstab, der zugleich den Spiegel für die Fernrohrablesungen trug, aufgeschraubt und konnte mit Hülfe eines Bajonnetverschlusses an die untere Klemmvorrichtung des langen Silberdrahtes befestigt werden.

Mit Leichtigkeit hätte sich auf der inneren Fläche der kugelförmigen Höhlung eine Theilung anbringen lassen, welche unmittelbar den Neigungswinkel der optischen Axe gegen die verticale Drehungsaxe angegeben hätte.

Leider zeigten die angestellten Beobachtungen, dass

diese Holzhohlkugel eine weit stärkere magnet-krystallische Induction erfuhr, als die Kalkspathmasse. Auch ein zweiter Versuch mit Apfelbaumholz ergab kein günstiges Resultat, obgleich die Richtung der Holzfasern mit der Drehungsaxe der Suspension parallel war. So blieb denn weiter nichts übrig, als den dünnen Holzstab (Fig. 10) direct mit ein wenig Wachs und Colophonium auf die Kugel in den verschiedensten Richtungen gegen die optische Axe aufzukitten. Freilich war dann die Controle darüber, dass die Axe des Stabes durch den Mittelpunkt der Kugel ging, nicht mehr so sicher; es war das Aufkitten dieser Bedingung gemäss nicht ohne Mühe und Zeitverlust und auch dann nicht genau zu erreichen. Ausserdem ist bei diesem Verfahren die Bestimmung des Winkels der optischen Axe gegen die Drehungsaxe wegen der Dicke des Stabes (etwa 3 mm) weniger zuverlässig. Trotzdem aber wird sich im Folgenden zeigen, dass die erhaltenen Resultate mit Rücksicht auf die angeführten Fehlerquellen eine gute Uebereinstimmung untereinander zeigen und einen sicheren Schluss auf die Anwendbarkeit der Thomson'schen Theorie gestatten.

§ 4. Erste Beobachtungsreihe.

Fig. 11 zeigt in schematischer Ausführung die Einrichtung des Apparates für die Beobachtung der Schwingungsdauern.

P ist die stromgebende, aus acht grossen Bunsen'schen Elementen bestehende Batterie, *A* und *B* sind die horizontalen Schenkel des Ruhmkorff'schen Electromagnetes, *a b c d* die Enden seiner Drahtumwickelungen. Ferner bezeichnet *M* das mit Quecksilber gefüllte Glasrohr, *N* den Widerstandsapparat (beide dienten zur Erhaltung der Constanz des Stromes), *O* das in einen Zweigschluss eingeschaltete Galvanometer. In der Mitte des Feldes hängt die Kalkspathkugel *C*, aufgekittet auf den mit dem Spiegel *s* versehenen Holzstab *D*. An *D* schliesst sich mit einem Bajonnetverschluss die untere Klemmvorrichtung des Silberdrahtes *F* an, der mit seinem oberen Ende in den cylindrischen Messingstab *G* eingeklemmt, mit Hülfe des Hebels *H* tordirt werden kann. Dieser ganze obere Theil bildet so einen Torsionskopf, der

fest an die Wand des Zimmers angeschraubt ist. Die ganze Aufhängung ist theils vom Holzkasten L, der in seiner vorderen Wandung zur Beobachtung der in s gespiegelten Scala eine mit einer Glasplatte verschlossene Oeffnung besitzt, theils von der Röhre E nach aussen abgeschlossen. Um alle Luftströmungen innerhalb des Kastens zu verhüten, sind alle undichten Stellen mit Watte sorgfältig ausgekleidet.

Die einzelnen Beobachtungen wurden nun in folgender Weise vorgenommen. Zunächst wurde der Holzstab D auf die Kugel centrisch aufgekittet, und zwar bei den verschiedenen Beobachtungen unter den verschiedensten Neigungen gegen die optische Axe. Sodann wurden Kugel und Stab an ihren Platz im magnetischen Felde gebracht und durch Drehung des Hebels H am Torsionskopfe bewirkt, dass die mit Fernrohr und Scala aus den Schwingungen beobachtete Ruhelage der gesammten Aufhängung sich nicht änderte, wenn der Electromagnet erregt wurde, dass also in der von den Torsionskräften allein bedingten Ruhelage die optische Axe des Kalkspathes sich bereits in der Aequatorebene des Electromagnetes befindet. Wie grosse Vereinfachung diese Bedingung im Gefolge hat, wird aus den späteren Betrachtungen ersichtlich werden.

Nunmehr wurde die Schwingungsdauer bei erregtem Magnetismus gemessen, und zwar stets in vier Sätzen nach dem Gauss'schen Verfahren. In den Pausen zwischen den einzelnen Sätzen wurde die Constanz des Stromes controlirt. Danach wurde die Schwingungsdauer allein unter dem Einflusse der Torsion in genau derselben Weise bestimmt. Endlich war noch der Winkel zu messen, den die optische Axe bei diesem Versuche mit der Drehungsaxe gebildet hatte. Zu dem Zwecke wurde die Kugel um den Stab herum mit Tusche geschwärzt, dann der Stab abgerissen und die Mitte des kleinen schwarzen Kreises auf der Kugel bestimmt; die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieses Kreises und der Kugel war dann die Drehungsaxe. Bezeichnet man nun mit M den Mittelpunkt der Kugel, mit B_1 und B_2 die auf der Kugel markirten Endpunkte der der optischen Axe parallelen Sehne, endlich mit C die Mitte der Kittstelle, so

bestimmt sich aus den Winkeln $B_1MB_2 = \alpha$, $B_1MC = \beta$, $B_2MC = \gamma$ der gesuchte Winkel ϑ der optischen Axe gegen die Drehungsaxe durch die Gleichung:

$$\cos\vartheta = \frac{\cos\beta - \cos\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Es erübrigte also nur noch, die Winkel $\alpha\beta\gamma$ zu bestimmen. Dazu wurde in ein Stück Pockholz (Fig. 12) eine halbkugelförmige Oeffnung von demselben Durchmesser wie die Kalkspathkugel gedreht und auf dem Umfange derselben eine Theilung angebracht. Die Kugel wurde einfach in die Höhlung gelegt, nacheinander die Punkte B_1 und B_2, resp. B_1 und C, B_2 und C in die Randebene der Höhlung gebracht und so die verlangten drei Winkel direct abgelesen.

In dieser Weise wurde eine grössere Zahl von Beobachtungen gemacht, bei denen der Winkel ϑ die verschiedensten Werthe zwischen 0 und 90° hatte.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate dieser ersten Beobachtungsreihe zusammengestellt; in ihr bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der optischen Axe und der Drehungsaxe, T und T' die zugehörigen Schwingungsdauern des Systemes, ohne, resp. mit Strom, endlich A eine aus $\vartheta TT'$ berechnete Grösse, deren Bedeutung erst später erörtert werden wird, welche indessen schon hier Aufnahme gefunden hat, um nicht die ganze Tabelle noch einmal vollständig anführen zu müssen.

ϑ	T' in Sec.	T	A	ϑ	T' in Sec.	T	A
82,749°	34,908	64,128	0,000 587	38,498°	45,706	64,290	0,000 611
82,248	35,034	64,065	0,000 582	30,715	49,403	64,452	0,000 648
75,000	36,053	64,387	0,000 566	29,501	50,775	64,379	0,000 605
64,452	37,414	64,380	0,000 581	24,944	53,059	64,420	0,000 642
58,232	39,260	64,367	0,000 563	16,006	57,454	64,425	0,000 816
57,256	38,725	63,950	0,000 570	15,385	58,183	64,255	0,000 756
54,235	39,819	64,266	0,000 590	4,07	61,866	64,289	0,003 84
47,993	41,705	64,385	0,000 604	3,76	62,021	64,457	0,004 48
44,974	42,642	64,184	0,000 615				

Wie man sieht, sind die Schwingungsdauern T und T' ziemlich gross, eine Folge davon, dass der Silberdraht sehr lang (etwa 2 m) gewählt worden war, um das Drehungsmoment der Torsion abzuschwächen; es war damit für die

Beobachtungsmethode die Vorschrift gegeben, einerseits die anfängliche Amplitude der Schwingungen möglichst gross zu wählen und andererseits die Sätze nach dem Gauss'schen Verfahren in geringen Intervallen einander folgen zu lassen, um den Durchgang durch die Ruhelage scharf beobachten zu können.

Die Betrachtung der dritten Columne zeigt, dass die Torsion (wir sehen von der geringen Abweichung der Kalkspathmasse von der Kugelgestalt ab) ziemlich bedeutend in ihrer Grösse variirt, theils infolge von Temperaturänderungen, theils durch die von der elastischen Nachwirkung herrührende continuirliche Ausdehnung des Drahtes, dass man also nicht berechtigt ist, anzunehmen, dass T' und das zugehörige T gleichen tordirenden Kräften entsprechen. Es ist deshalb nöthig, der Bestimmung von T' eine solche für T vorangehen und auch folgen zu lassen, um durch Interpolation den dem Zeitpunkte der Beobachtungen von T' entsprechenden Werth von T zu finden. Ob von Versuch zu Versuch T sich ändert, ist für unseren Zweck gleichgültig, wie die späteren Entwickelungen zeigen werden; es kommt nach diesen nur darauf an, dass T und T' gleichen Torsionen entsprechen.

Ferner ist die Winkelbestimmung, wie sie hier angewandt wurde, zu mangelhaft. Es wurden daher noch zwei in dem angegebenen Sinne verbesserte Versuchsreihen angestellt, und zwar mit zwei Kalkspathkugeln von etwas verschiedener Grösse.

§ 5. Zwei neue Beobachtungsreihen.

Auf das Tischchen eines Meyerstein'schen Spectrometers wurde ein kleiner Glasdreifuss mit den Füssen nach oben so aufgekittet, dass eine auf die Füsse gelegte Kugel genau centrirt war. Wie vorher handelte es sich auch jetzt um die beiden mit Tusche bezeichneten Endpunkte $B_1 B_2$ der der optischen Axe parallelen Sehne und den mit Tusche auf der Kugel abgegrenzten Querschnitt des Holzstabes D, dessen Mitte C mit dem Kugelmittelpunkt M verbunden die jeweilige Drehungsaxe bei der Beobachtung der Schwingungs-

dauern abgegeben hatte. Zur Einstellung auf diese Punkte, resp. den kleinen hellen Kreis auf schwarzem Grunde, diente das am Spectrometer befindliche Mikroskop, das eine solche Vergrösserung besass, dass der Rand des kleinen Kreises fast an die Grenze des Gesichtsfeldes reichte, und man daher genau auf seine Mitte einstellen konnte; die Punkte $B_1 B_2$ dagegen wurden mit dem genau centrirten Fadenkreuz eingestellt, und zwar wurde die Lage der Kugel im Dreifuss solange geändert, bis alle drei Punkte $B_1 C B_2$ sich in einer zur Drehungsaxe des Instrumentes senkrechten Ebene befanden, also bei der Drehung des Tischchens nacheinander die Mitte des Fadenkreuzes passirten.

Weil $B_1 B_2$ eine Sehne der Kugel ist, wird im allgemeinen $B_1 C B_2$ kein grösster Kreis sein; um daher den von $B_1 B_2$ und CM gebildeten Winkel ϑ zu finden, wurde noch mit einem dem Spectrometer gegenübergestellten Kathetometer der Abstand dieses Kreises $B_1 C B_2$ vom höchsten und tiefsten Punkt der Kugel gemessen.

Bezeichnet man nun mit R den Kugelradius, mit $h_1 < R$ den Abstand jenes Kreises vom höchsten oder tiefsten Punkte, so hat man für die Bestimmung zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Liegen 1) $B_1 C B_2$ auf einem Halbkreise, und zwar C zwischen B_1 und B_2, so sei mit α der kleinere, mit β der grössere der Bogen $B_1 C$, $B_2 C$ bezeichnet. Alsdann ist:

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2 h_1 R - h_1^2}}{R} \sin\frac{\beta - \alpha}{2}.$$

2) Für jede andere Gruppirung von B_1, C, B_2 sei der Bogen $B_1 B_2$ mit α, der kleinere der Bogen $B_1 C$, $B_2 C$ mit β bezeichnet. Dann ergibt sich für $\cos\vartheta$ der Werth:

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2 h_1 R - h_1^2}}{R} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right).$$

Die Winkel $\alpha \beta$ sind direct am Spectrometer, h_1 am Kathetometer beobachtet, und zwar wurde jede Bestimmung mehrfach ausgeführt.

Für jede Beobachtung in einer bestimmten Lage der optischen Axe gegen die Verticale wurden demgemäss die einzelnen Operationen in folgender Reihenfolge ausgeführt. Be-

stimmung der Schwingungsdauer ohne Strom; dann wurde durch Drehen am Torsionskopf das Zusammenfallen der Ruhelagen mit und ohne Strom bewirkt, die Schwingungsdauer mit Strom und nochmals ohne Strom beobachtet. Darauf wurde die Kugel mit dem Stabe abgenommen, mit Tusche der Rand des Stabes markirt, der Stab abgerissen und die Kugel auf dem Tische des Spectrometers so justirt, dass $B_1 C B_2$ in einem Kreise senkrecht zur Drehungsaxe des Instrumentes lagen. Darauf wurden die Winkel $\alpha\beta$ und die Höhe h_1 abwechselnd mehrmals gemessen.

Während der ganzen Beobachtungsreihe wurden beide Kalkspathkugeln abwechselnd benutzt. Wie zu erwarten war, lieferte die Beobachtung der Schwingungsdauer T nach der von T' einen grösseren Werth als die vor T' vorgenommene, infolge der Verlängerung des Drahtes durch das spannende Gewicht. Um daher das dem Augenblick der Beobachtung von T' entsprechende T zu finden, wurde zwischen den beiden für T erhaltenen Werthen nach dem Verhältniss der zwischen den drei Schwingungsdauerbeobachtungen verflossenen Zeiträume interpolirt.

Die beiden folgenden Tabellen, im übrigen genau dieselben Grössen enthaltend, wie die frühere, setzen für T diesen interpolirten Werth (T).

I. Erste Kugel.

ϑ	T'	(T)	A
81,6°	34,773	63,812	0,000 594
81,586	34,775	64,0[illegible]6	0,000 596
79,41	35,048	64,041	0,000 590
69,445	35,908	63,966	0,000 606
59,244	38,406	63,764	0,000 585
50,247	40,543	63,858	0,000 614
30,444	48,734	63,953	0,000 688
25,832	51,582	64,049	0,000 696
20,502	53,944	63,799	0,000 799
13,07	58,855	63,922	0,000 860
9,633	60,595	64,367	0,001 11

II. Zweite Kugel.

ϑ	T'	(T)	A
86,431°	33,527	59,766	0,000 612
84,157	33,556	59,843	0,000 608
76,10	33,989	59,903	0,000 623
65,273	35,464	59,675	0,000 623
57,375	36,864	59,444	0,000 638
48,08	39,746	59,849	0,000 639
35,869	44,610	59,361	0,000 637
27,48	47,930	59,616	0,000 723
23,961	49,037	59,540	0,000 830
12,23	54,934	59,825	0,001 16
11,583	55,318	59,857	0,001 18
6,07	57,184	59,913	0,002 43

Zum Theil zeigen sich in diesen Tabellen bedeutende Abweichungen der Werthe für (T) voneinander, eine Folge

davon, dass ich mehrmals genöthigt war, den Silberdraht zu verkürzen, weil er an seinem unteren Ende durch häufige Torsionen brüchig wurde.

Bevor wir Schlüsse aus diesen Resultaten ziehen, wollen wir die Thomson'sche Theorie der Induction für den betrachteten Fall entwickeln und Gleichungen aufstellen, die eine Vergleichung von Theorie und Beobachtung zulassen.

Theoretischer Theil.

§ 6. Herleitung der Hauptgleichung.

Es werde im homogenen Felde die Mitte zwischen den Polplatten zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, die Richtung der Kraftlinien sei die x-Axe, die z-Axe vertical. Ferner mögen (wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall magnetisch zweiaxiger Krystalle) $k_1\, k_2\, k_3$ die Constanten der Magnetisirung für die drei Hauptaxen der Krystallkugel bezeichnen, F die Grösse der magnetisirenden Kraft des Feldes, $\lambda\, \mu\, \nu$ die Richtungscosinus derselben gegen die Hauptaxen, endlich σ das Volumen der Kugel. Alsdann ist nach Thomson[1]) das Gesammtdrehungsmoment, das die Kugel infolge der magnetischen Kräfte erfährt:

$$M = \sigma F^2 \{\mu^2 \nu^2 (k_2 - k_3)^2 + \nu^2 \lambda^2 (k_3 - k_1)^2 + \lambda^2 \mu^2 (k_1 - k_2)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ausserdem sind die Richtungscosinus der Axe dieses Drehungsmomentes, ebenfalls auf die Hauptaxen bezogen:

$$l = \frac{\mu \nu (k_2 - k_3)}{D}, \quad m = \frac{\nu \lambda (k_3 - k_1)}{D}, \quad n = \frac{\lambda \mu (k_1 - k_2)}{D},$$

wo: $D = \{\mu^2 \nu^2 (k_2 - k_3)^2 + \nu^2 \lambda^2 (k_3 - k_1)^2 + \lambda^2 \mu^2 (k_1 - k_2)^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Da meine Versuche voraussetzen, dass die Kugel sich nur um einen verticalen Durchmesser drehen kann, kommt von dem angegebenen Gesammtdrehungsmoment allein die Componente nach der z-Axe zur Wirkung. Wir wollen daher jene Ausdrücke, die sich auf die magnetischen Hauptaxen als Coordinatensystem beziehen, auf das von uns zu Grunde gelegte Axensystem reduciren. Zu dem Zwecke seien mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$, $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ die Richtungscosinus der Haupt-

1) Mascart et Joubert, Électricité et Magnétisme. 1. p. 427.

axen gegen die Coordinatenaxen bezeichnet, mit $a\ b\ c$ der Richtung der Kraftlinien, endlich mit $l_1\ m_1\ n_1$ der Axe des Gesammtdrehungsmomentes.

Daraus ergibt sich:

$$n_1 = \frac{\gamma_1 (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2)(a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3)(k_2 - k_3) + \cdots}{D}$$

und als Componente des Drehungsmomentes nach der Verticalen:

$$D_1 = \sigma F^2 D n_1$$
$$= \sigma F^2 [\gamma_1 (a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2)(a\alpha_3 + b\beta_3 + c\gamma_3)(k_2 - k_3) + \cdots].$$

Die bisher angeführten Gleichungen gelten für magnetisch zweiaxige Körper. Für unseren Fall handelt es sich um den magnetisch einaxigen Kalkspath; wir werden daher $k_2 = k_3$ setzen und erhalten alsdann, weil:

$$a = 1, \quad b = c = 0, \quad \alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 = \pm \beta_1 \quad \text{ist:}$$
$$D_1 = \pm \sigma F^2 \alpha_1 \beta_1 (k_1 - k_2).$$

Wir wollen auch diesen Ausdruck noch in seiner Gestalt verändern, indem wir α_1 und β_1 durch zwei andere für das Experiment bequemere Grössen ersetzen, nämlich den schon mehrfach genannten Winkel ϑ und den Winkel ψ, den die durch die Richtung der optischen Axe und die verticale Drehungsaxe gelegte Ebene mit der Aequatorebene des Electromagnetes bildet. So nimmt D_1 die Form an:

$$D_1 = \pm \sigma F^2 (k_1 - k_2) \sin^2 \vartheta \sin \psi \cos \psi.$$

Für einen positiven Krystall mit diamagnetischer Masse, wie unter anderen Kalkspath, ist die Induction in der Richtung der Hauptaxe ein Maximum, also $k_1 < k_2$, weil k_1 und k_2 negativ sind.

Ausser diesen magnetischen Kräften ist die Kugel noch dem Einflusse der Torsion unterworfen, welche der Silberdraht, an dem die Kugel hängt, bei ihren Bewegungen erfährt. Durch die bei den angeführten Versuchen beobachtete Regel, dass stets die Ruhelage des Systemes die gleiche ist, mag der Electromagnet erregt sein oder nicht, wird die Berechnung ausserordentlich vereinfacht.

Bezeichnen wir nämlich das Trägheitsmoment der Kugel nebst ihrer Aufhängung mit K, ihre Schwingungsdauer unter dem Einflusse der Torsion allein mit T, so übt bei einer

Ablenkung aus der Ruhelage um den Winkel ψ die Torsion ein Drehungsmoment von der Grösse $\pi^2 K\psi / T^2$ aus. Wird gleichzeitig der Electromagnet von einem kräftigen Strome durchflossen, der dem Felde die Intensität F verleiht, so üben zugleich die Torsion und die magnetischen Kräfte Drehungsmomente von gleichem Sinne auf die Kugel aus, sodass in jedem Augenblick beiden Momenten dasselbe Vorzeichen zukommt. Da nun in unserem Falle $k_1 - k_2 < 0$ ist, hat man dem Gesammtdrehungsmoment die Gestalt zu geben:

$$- \sigma F^2 (k_1 - k_2) \sin^2 \vartheta \sin \psi \cos \psi + \frac{\pi^2 K \psi}{T^2}.$$

Andererseits ist dieses Drehungsmoment durch die Winkelbeschleunigung augedrückt:

$$- K \frac{d^2 \psi}{d t^2},$$

wo ψ stets den oben definirten Winkel bezeichnet.

Die Lösung unserer Aufgabe ist damit zurückgeführt auf die Integration der folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$K \frac{d^2 \psi}{d t^2} = - \frac{\pi^2 K}{T^2} \psi + \sigma F^2 (k_1 - k_2) \sin^2 \vartheta \sin \psi \cos \psi.$$

Allgemein ist die Lösung dieser Gleichung nicht angebbar, und wollen wir uns daher auf den Fall unendlich kleiner Schwingungen beschränken. (Selbstverständlich sind die in den drei früheren Tabellen angeführten Werthe von T, resp. T' auf unendlich kleine Bogen reducirt.)

Diese Voraussetzung ermöglicht eine Integration in endlicher Form und liefert uns für die Schwingungsdauer T' der Kugel unter dem Einflusse der magnetischen und der Torsionskräfte die Beziehung:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{K}{\frac{\pi^2 K}{T^2} - \sigma F^2 (k_1 - k_2) \sin^2 \vartheta}}$$

oder endlich:

$$k_1 - k_2 = - \pi^2 K \frac{\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}}{\sin^2 \vartheta \, . \, \sigma F^2} = - \frac{\pi^2 K}{\sigma F^2} A.$$

Diese Gleichung nun soll uns dazu dienen, die Thomson'sche Theorie auf ihre Gültigkeit zu prüfen.

Weil während der ganzen Beobachtungsreihen F constant erhalten worden ist, ergibt sich sofort die Folgerung: Ist die Thomson'sche Theorie zur Erklärung der Induction magnetisch einaxiger Krystalle hinreichend, so muss die Grösse A in obiger Gleichung, da alle anderen Grössen, die darin vorkommen, von der Lage der optischen Axe gegen die Kraftlinien unabhängig sind, einen und denselben Werth für alle derselben Beobachtungsreihe angehörigen Systeme $TT'\vartheta$ haben.

Eine nähere Betrachtung der drei vorstehenden Tabellen zeigt nun sofort, dass A durchaus nicht als constant zu betrachten ist, während ϑ zwischen 0 und 90° variirt. Vielmehr behält A, abgesehen von den infolge der fehlerhaften Winkelbestimmungen auftretenden Schwankungen, nahezu denselben Werth, solange ϑ nicht unter 30° herabsinkt, während mit einer weiteren Abnahme gegen Null hin entschieden eine Vergrösserung von A eintritt.

Dieses Ergebniss ist ganz zweifellos, denn es wäre nicht allein höchst unwahrscheinlich, dass bei allen Versuchen die Beobachtungsfehler einen Einfluss im gleichen Sinne ausübten (das nicht genau centrische Aufkitten des Stabes auf die Kugel und die Fehler in der Bestimmung der Winkel $\alpha\beta$ lassen den Winkel ϑ je nach den Umständen zu gross oder zu klein erscheinen), sondern es ist die Constanz von A aus folgenden Gründen unbedingt unmöglich: Alle Beobachtungsfehler beeinflussen, wie wir annehmen können, nur die Bestimmung des Winkels ϑ, während wir die Beobachtung von T und T' als fehlerfrei betrachten dürfen. Wäre nun A constant, und entnehmen wir diesen constanten Werth c aus den Beobachtungen, bei welchen der Einfluss einer fehlerhaften Bestimmung von ϑ ein geringer ist, also für ϑ zwischen 90 und 60°, so liefert uns die Berechnung von ϑ aus der Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}}{\sin^2\vartheta} = c$$

für die Versuche, wo T, T' wenig voneinander verschieden sind, Werthe, welche von den entsprechenden beobachteten

Werthen von ϑ um 4—5° abweichen; die Constanz von A würde also Fehler in der Winkelbestimmung voraussetzen, wie sie unmöglich gemacht worden sind.

§ 7. Folgerungen.

Es ergibt sich somit die unabweisliche Folgerung, dass die Thomson'sche Theorie in ihrer gegenwärtigen Form durchaus ungenügend ist zur Erklärung der magnet-krystallischen Phänomene. Vor allem handelt es sich also darum, die Anfechtbarkeit der Hypothesen zu erwägen, die wir unserer Berechnung zu Grunde gelegt haben.

Zunächst ist dabei ein homogenes Feld angenommen; ein solches existirt natürlich strenge genommen nicht. Indessen wird in einem späteren Abschnitt gezeigt werden, dass innerhalb des Raumes zwischen beiden Schenkeln des Electromagnetes, in dem sich die Kugeln befanden, eine Variabilität der Intensität des Feldes mit dem Orte nicht nachweisbar war.

Ferner setzt Thomson voraus, dass der magnetische Zustand des inducirten Krystalles in einer bestimmten Lage gegen die Kraftlinien von früheren magnetischen Inductionen unabhängig ist, also mit anderen Worten das Fehlen einer Coercitivkraft. Vor allem aber vernachlässigt die Thomson'sche Theorie die Induction der einzelnen Theilchen auf einander.

Eine Entscheidung darüber, welche von diesen Hypothesen beseitigt werden muss, um eine Uebereinstimmung von Theorie und Erfahrung zu erreichen, lässt sich aus meinen Beobachtungen nicht treffen; dazu müssen neue, genauere Untersuchungsmethoden angewandt werden. Besonders bedenklich scheint mir die Vernachlässigung der Selbstinduction zu sein für krystallinische Mittel, denen doch eine regelmässige Anordnung der Theilchen zukommt.

§ 8. Bestimmung der Intensität des Feldes in absolutem Maasse.

Um eine Vergleichung der gegebenen Resultate mit späteren, gleiche Ziele verfolgenden Untersuchungen zu ermöglichen, wurde das benutzte magnetische Feld nicht nur

auf seine Constanz geprüft, sondern auch seine Intensität in absolutem Maasse gemessen (cm, g, sec).

Ausserdem mögen hier noch einige zu Vergleichungen ebenfalls wichtige Daten einen Platz finden. Es ergab sich für die grössere Kugel ein Gewicht von 129,079 g, ein Volumen von 47,226 ccm, berechnet aus dem vielfach bestimmten Radius, und ein Trägheitsmoment von 259,6 g cm^2; für die kleinere Kugel hatten dieselben Grössen die Werthe 119,096 g, 43,654 ccm und 227,3 g cm^2. Aus diesen Daten und den Schwingungsdauern T, die man für beide Kugeln erhalten hatte, erhält man für das Trägheitsmoment der ganzen Aufhängung (Kugel und Holzstab mit Klemmvorrichtung) 259,63, resp. 227,33 g cm^2, sodass man bei der Berechnung des ganzen Trägheitsmomentes nur die Kugel zu berücksichtigen braucht.

Zur Untersuchung des magnetischen Feldes wurde eine mit feinem Draht bewickelte Inductionsrolle von 14 mm äusserem und 6,9 mm innerem Radius verwandt, welche also etwa den Raum ausfüllte, den vorher die Kalkspathkugeln eingenommen hatten; diese Rolle war auf einem Gestell befestigt, das ihre Aufstellung an den verschiedenen Stellen des Feldes ermöglichte. Ausserdem war sie um eine horizontale Axe um 90° drehbar, sodass man sie leicht aus einer Stellung, wo ihre Windungen senkrecht gegen die Kraftlinien waren, in eine andere drehen konnte, wo die Ebene der Windungen der magnetisirenden Kraft parallel war.

Wurde diese Drehung schnell ausgeführt, so durchfloss während des dazu nöthigen kleinen Zeitraumes ein Inductionsstrom die Rolle und eine mit ihr zu einem Stromkreise verbundene Gaugain'sche Bussole mit Spiegelablesung. Bezeichnet man nun den Ausschlag der Nadel durch den Stromstoss (als Einheit ist der Winkel 57,3° zu wählen) mit α, den Reductionsfactor der Bussole in magnetischem Maasse mit C, die Schwingungsdauer ihrer Nadel mit t, ihr Dämpfungsverhältniss mit k, so ist bei der geringen Dämpfung, die das benutzte Galvanometer besitzt, die gesammte während der Drehung der Rolle aus der einen in die andere Lage bewegte Electricitätsmenge $C t \alpha \sqrt{k} / \pi$.

Dieselbe ist andererseits $= f . F / w$, wo F die Intensität

des Feldes, f die Windungsfläche der Rolle und w der Widerstand des ganzen Stromkreises ist. Aus dieser Gleichung erhält man daher sofort:

$$F = \frac{C t \alpha \sqrt{k w}}{\pi f}.$$

Die Bestimmung von C, α, f wurde in einem Zimmer des physikalischen Institutes vorgenommen, in welchem bereits mehrfach Beobachtungen der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus gemacht worden waren. Als Mittel hatten diese, höchstens 1% voneinander abweichenden Bestimmungen:

$$T = 0{,}190 \frac{g^{\frac{1}{2}}}{cm^{\frac{1}{2}}\, sec}$$

geliefert.

Ferner ergab sich $k = 1{,}044$, $t = 4{,}162$ sec, $w = 7{,}833$ S.-E. Die Bestimmung von α geschah in der Weise, dass je drei Ausschläge durch den Inductionsstrom gemessen wurden, wenn die Inductionsrolle

in der Mitte des Feldes	in der Mitte
rechts von der Mitte	rechts oben von der Mitte
in der Mitte	in der Mitte
oben über der Mitte	

aufgestellt war.

Die so für die verschiedenen Stellen des Feldes erhaltenen Resultate differiren voneinander nicht mehr, als die für dieselbe Stelle vorgenommenen Beobachtungen, sodass sich das Feld als homogen erwies, soweit die Genauigkeit eines derartigen Verfahrens reicht. Im Mittel wurde α, auf den Winkel 57,3° als Einheit bezogen, = 0,005 096 gefunden. Der Reductionsfactor war ferner: = 0,01619 (cm, g, sec).

Die Bestimmung der Windungsfläche f endlich geschah nach der von F. Kohlrausch[1]) angegebenen Methode. Dabei durfte, der Kleinheit der Rolle wegen, durch die schon vorher genannte Tangentenbussole nur ein Theil des gesammten Stromes geleitet werden, und musste ausserdem die Beobachtung möglichst schnell ausgeführt werden, weil mit

1) Kohlrausch, Wied. Ann. **18.** p. 513. 1883.

der Dauer des Stromschlusses der Widerstand der Rolle infolge der Erwärmung schnell zunahm. Danach war:

$$f = 1831{,}872 \text{ qcm},$$

und schliesslich die Intensität des Feldes in absolutem Maass:

$$F = 58{,}098 \frac{g^{\frac{1}{2}}}{cm^{\frac{1}{2}} \sec}.$$

Physik. Inst. d. Universität Strassburg i. E.

X. *Mittheilung über einen photometrischen Apparat; von Leonhard Weber.*

(Hierzu Taf. I Fig. 18.)

Versteht man unter der Intensität einer Lichtquelle eine rein physikalisch, etwa als gesammte kinetische Energie der sichtbaren Strahlen zu definirende Grösse, so gestatten es die bisher angewandten photometrischen Methoden

1) eine Vergleichung der Intensitäten zweier als punktförmig betrachteter Lichtquellen von gleicher Farbe mit zum Theil sehr grosser Genauigkeit vorzunehmen, also ein relatives oder conventionelles Maass der Intensität zu gewinnen.

2) für zwei Lichtquellen verschiedener Farbe mittelst des Glan-Vogel'schen Photometers das Intensitätsverhältniss der einzelnen Theile ihrer Spectra und allenfalls durch Summation das Verhältniss der totalen Intensisäten zu ermitteln.

Fragt man ferner nach der Fähigkeit einer Lichtquelle, in gegebener Entfernungseinheit aufgestellte Objecte, wie z. B. Schriftzüge, feine Schraffirungen etc. bis zu ihrer deutlichen Wahrnehmung durch das Auge zu beleuchten, d. h. der etwa als Beleuchtungskraft B einer Lichtquelle zu bezeichnenden Fähigkeit, so kann die Bestimmung dieser Grösse für die unter 1) angeführten Fälle ebenfalls als in gewissem Sinne ausgeführt betrachtet werden. Dagegen ist deren Ermittelung für die

unter 2) angeführten Fälle von den bisherigen photometrischen Methoden wenig oder gar nicht berücksichtigt.

Die so definirte Beleuchtungskraft B ist nun nicht blos von der physikalischen Grösse der Intensität, sondern auch von physiologischen Momenten abhängig und kann z. B. auch nach der Verschiedenheit der Augen individuell variabel sein. Es werden mithin unter den Argumenten der Function B einmal physikalische von den Intensitäten der einzelnen Farben herrührende Werthe $i_1\ i_2 \ldots i_n$ eventuell ein dafür zu setzendes Integral und zweitens gewisse physiologische Werthe $p_1\ p_2 \ldots p_n$ auftreten, sodass allgemein:

$$B = B(p_1\ p_2 \ldots p_n,\ i_1\ i_2 \ldots i_n),$$

sein wird. Beseitigt man hierin die Argumente p dadurch, dass man sich auf ein normales Auge unter normalen Verhältnissen beschränkt, so wird der physiologische Einfluss auf die Function B sich nur auf deren Form erstrecken, also:

$$B = \varphi(i_1 i_2 \ldots i_n), \tag{1}$$

gesetzt werden können. Ein specieller Werth der Grösse B etwa bei bestimmter Totalintensität der Lichtquelle sei β. Es werde sodann die stets einer Controle zugängliche Voraussetzung gemacht, dass bei variabeler Totalintensität einer Lichtquelle oder in den dafür zu supponirenden Fällen, in welchen nach bekannten Gesetzen Abschwächungen z. B. durch Nicol'sche Prismen, Vergrösserung der Entfernung, oder Absorption durch weisse Körper stattfinden, immer nur eine alle Farben gleichmässig betreffende Intensitätsänderung auftrete. Wollte man alsdann die weitere Annahme machen:

a) dass bei variabler Totalintensität J einer Lichtquelle die physiologische Concurrenz der den einzelnen Farben entsprechenden Intensitäten in Bezug auf die Erkennbarkeit von Objecten immer in derselben Weise stattfinde, so würde:

$$B = \psi(\beta,\ J) \tag{2}$$

sein. Bei noch weiterer Annahme, dass

b) die Beleuchtungskraft einer Lichtquelle proportional ihrer Totalintensität sei, würde:

$$B = J . \beta \tag{3}$$

sein. Von den gemachten Annahmen scheint a) nur näherungsweise zuzutreffen, wie aus den Purkinjé'schen[1]) Beobachtungen hervorgeht. Indessen wird für kleine Intensitätsunterschiede jene Annahme als zutreffend betrachtet werden können. Die Annahme b) dagegen ist sogar höchst wahrscheinlich unrichtig und müsste durch eine dem Fechner'schen Gesetz entsprechende andere Function ersetzt werden. Wenn man trotzdem nach Gleichung (3) die Beleuchtungskraft einer Lichtquelle berechnet, so wird das Resultat absolut genommen zwar unrichtig sein, dagegen wird es besagen: Würde man die Intensität der Lichtquelle in dem Verhältniss $J:1$ abändern, so würde die letztere eine Beleuchtungskraft β haben. Es erfordern nun eine Reihe der von der Praxis gestellten Fragen lediglich eine Beantwortung in letzterem Sinne. Wenn z. B. nach der Beleuchtungskraft der Sonne oder einer electrischen Lampe gefragt wird, so wird es genügen, anzugeben, dass dieselbe gleich derjenigen von n Normalkerzen ist und also darunter nur zu verstehen, dass eine Aenderung der Intensität von Sonne oder Lampe um $1/n$ eine Beleuchtungskraft gleich derjenigen einer Normalkerze geben würde. Die Gleichung (3) kann demnach zur Grundlage einer weiteren Betrachtung dienen, falls wir die Interpretation derselben in dem angegebenen Sinne vornehmen und bei der Bestimmung verschiedener Grössen β so kleine Intensitätsintervalle innehalten, dass die Annahme b) als zulässig erscheint.

Seien $B_1\ J_1\ \beta_1\quad B_2\ J_2\ \beta_2$ bezogen auf zwei Lichtquellen verschiedener Farbe, so wird:

$$B_1 = J_1\beta_1, \quad B_2 = J_2\beta_2$$

sein. Schwächt man nun die Intensität einer oder der beiden Lichtquellen soweit, dass $B_1 = B_2$ wird, was experimentell zu ermitteln ist, und nennt man die nun vorhandenen Intensitäten i_1 und i_2 so wird:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}. \tag{4}$$

Eine experimentelle Bestimmung von i_1/i_2 ergibt daher, wenn

1) v. Helmholtz, Physiol. Optik, p. 317.

man etwa das auf ein Normallicht bezogene $\beta_1 = 1$ setzt, einen Werth für β_2, den man als die specifische Beleuchtungskraft der betreffenden Lichtquelle bezeichnen kann.

Zu einem vollkommen analogen Resultat würde man gekommen sein, wenn man in Gleichung (2) statt der Totalintensität J die Intensität einer bestimmten Farbe oder eines durch absorbirende Medien bestimmt charakterisirten Farbencomplexes, z. B. der durch ein rothes Glas gegangenen Strahlen gesetzt hätte. Nennt man diese Intensität $J^{(r)}$, so würde zufolge der gemachten Voraussetzung (p. 327) J prop $J^{(r)}$ sein. Die Bedeutung von β wird natürlich nun auch eine andere, und zwar wird die Aenderung umgekehrt proportional derjenigen von J sein. Sei $\beta^{(r)}$ der neue Werth von β, so wird für zwei Lichtquellen:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} B_1 &= J_1^{(r)} . \beta_1^{(r)} \\ B_2 &= J_2^{(r)} . \beta_2^{(r)}. \end{aligned} \right.$$

Macht man wieder $B_1 = B_2$ und nennt die nun vorhandenen Intensitäten $i_1^{(r)}$ und $i_2^{(r)}$, so wird:

$$(6) \qquad \frac{i_1^{(r)}}{i_2^{(r)}} = \frac{\beta_2^{(r)}}{\beta_1^{(r)}},$$

und die durch Setzung von $\beta_1^{(r)} = 1$ gewonnene Definition der specifischen Beleuchtungskraft $\beta_2^{(r)}$ wird jetzt eine von dem angewandten rothen Glase mit abhängige Grösse sein. Dagegen behalten in den Gleichungen (5) B_1 und B_2 dieselbe Bedeutung wie vorher, und das Verhältniss derselben wird entweder sein:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{B_2}{B_1} &= \frac{J_2}{J_1} . \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{J_2}{J_1} . \frac{i_1}{i_2} \quad \text{oder:} \\ \frac{B_2}{B_1} &= \frac{J_2^{(r)}}{J_1^{(r)}} . \frac{\beta_2^{(r)}}{\beta_1^{(r)}} = \frac{J_2^{(r)}}{J_1^{(r)}} . \frac{i_1^{(r)}}{i_2^{(r)}} . \end{aligned} \right.$$

Hieraus geht hervor, dass die Bestimmung der Beleuchtungskraft einer Lichtquelle nicht durch alleinige Ermittelung ihrer Totalintensität oder derjenigen eines bestimmten Farbencomplexes gewonnen werden kann, dass vielmehr als weiteres Element noch die Bestimmung ihrer specifischen Beleuchtungs-

kraft erforderlich ist. Der auf p. 327 unter a) gemachten Annahme wird entsprochen werden, wenn die zu beobachtenden Intensitäten i_1 und i_2, resp. $i_1^{(r)}$ und $i_2^{(r)}$ innerhalb eines nicht zu grossen Helligkeitsintervalles gehalten werden, so nämlich, dass bei wiederholten Versuchen die Aenderungen der einzelnen dieser Grössen keine beträchtlichen sind.

Die bisherigen photometrischen Methoden nehmen, wie bereits bemerkt, auf die Bestimmung der specifischen Beleuchtungskräfte theils gar keine, theils ungenügende[1]) Rücksicht. Ich erlaube mir deswegen auf einen Apparat hinzuweisen, den ich vor einem halben Jahre in Breslau anfertigen liess, und der in einer verbesserten Form von den Herren Fr. Schmidt und Hänsch in Berlin hergestellt wird. Derselbe gestattet es, eine den obigen Ausführungen entsprechende und, wie mir scheint, sehr bequeme Berücksichtigung der specifischen Beleuchtungskräfte bei Vergleichungen von Lichtquellen vorzunehmen, wobei den Beobachtungen die zweite der Gleichungen (7), bezogen auf ein rothes Glas, zu Grunde gelegt wird. Gleichzeitig ist der Apparat dazu bestimmt, die von der Photometrie bisher wenig oder gar nicht beachtete Frage nach der Intensität und Beleuchtungskraft des diffusen Lichtes zu beantworten, eine Frage, die zwar weniger für weitere physikalische Forschungen als vielmehr für hygieinische und meteorologische Beobachtungen von Interesse sein dürfte.

Die Einrichtung und Benutzung des Apparates ist aus der schematischen Skizze Fig. 13 ersichtlich. In einem horizontalen feststehenden Tubus A befindet sich ein Hülfsnormallicht n; dasselbe erleuchtet die in a befindlichen und längs A in messbarer Weise verschiebbaren Glasplatten, welche ihrerseits aus einer oder mehreren Milchglasplatten und einer rothen annähernd monochromatischen Glasplatte bestehen. In dem um die Längsaxe von A drehbaren Tubus B befindet sich ein Reflexionsprisma p, ferner ein zweiter Satz von den beschriebenen Glasplatten bei b und ein Diaphragma d.

1) Vgl. Crova u. Lagarde, Compt. rend. **93.** p. 512. 1880. u. **95.** p. 1271. 1882.

Wird der Tubus *B* entweder auf eine Lichtquelle oder auf die beleuchtete Fläche eines weissen Schirmes gerichtet, so erblickt der bei *o* hineinblickende Beobachter ein durch die linke vertikale Kante des Prismas in zwei gleich gross und gleichgeformte Hälften getheiltes Sehfeld, dessen linke Seite von dem durch *b* und dessen rechte Seite von dem durch *a* gegangenen Licht erleuchtet wird. Durch Verschiebung von *a*, Vermehrung oder Verminderung der Milchglasplatten in *b*, eventuell auch durch Aenderung von *n* lässt sich in beiden Theilen des Gesichtsfeldes gleiche Helligkeit herstellen, und beide Theile erscheinen von gleicher Farbe.

Die Beurtheilung gleicher Helligkeit zweier unmittelbar nebeneinander liegender Flächen derselben Farbe kann bekanntlich mit sehr grosser Schärfe vom Auge gemacht werden und scheint für rothe Farben besonders leicht zu sein. Die benutzten rothen Glassorten (durch Kupferoxydul gefärbtes sogenanntes überfangenes Glas) zeigten vollkommen gleiche Farbe in den Hälften des Gesichtsfeldes, wenn *n* Kerzenlicht war, und die Platten *b* von Sonnenlicht oder electrischem Bogenlicht erleuchtet waren. Die Drehbarkeit des Tubus *B* sammt Prisma *p* lässt eine äusserst bequeme Einstellung auf Lichtquellen in verschiedener Höhe oder auf Flächen verschiedener Neigung zu.

Als Hülfsnormallicht habe ich die im Handel weit verbreiteten Benzinkerzen benutzt. Die Flamme derselben zeichnet sich nicht allein durch ungemeine Gleichmässigkeit des Brennens aus, sondern besitzt auch, wie ich aus wiederholten Messungen und deren graphischer Darstellung schliessen konnte, die sehr brauchbare Eigenschaft, dass sich die Intensität i als eine sehr einfache Function der Flammenhöhe l innerhalb gewisser Grenzen darstellen lässt. Wenn nämlich a und b zwei Constanten sind, so fand ich, dass:

$$i = a + bl$$

gesetzt werden kann innerhalb eines Intervalles von etwa $l = 1$ cm bis $l = 4$ cm. Am genauesten scheint die Formel in den Grenzen $l = 1{,}5$ cm bis $l = 3$ cm für die benutzten Kerzen zu gelten, da für kleinere l die Formel ihrer Natur nach unzutreffend sein muss und für grössere l durch ein

unruhigeres Brennen die Genauigkeit der Ablesung von l gestört wird. Innerhalb der genannten Grenzen lässt sich mittelst einer mit Spiegelfolie belegten Glasscala s eine Abmessung von l nach bekanntem Verfahren bis auf 0,1 mm leicht erreichen. Die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Constanten a und b waren für die von mir untersuchten Kerzen fast genau dieselben. Wenn nun auch für Flammenhöhen sehr verschiedener Grösse die Formel nur als Näherungsformel richtig ist, so kann man doch für nicht sehr verschiedene l eine den sonstigen Genauigkeitsgrenzen vollkommen entsprechende Richtigkeit annehmen.

Bezüglich der mit dem Apparate anzustellenden Messungen mögen folgende Bemerkungen hier Platz finden.

I. Vergleichung der Intensitäten und der Beleuchtungskräfte zweier Lichtquellen von gleicher Farbe. Man richtet den Tubus B auf die Lichtquelle 1 und stellt den Apparat durch Verschiebung von a ein, d. h. man bringt beide Theile des Gesichtsfeldes auf gleiche Helligkeit. Man beobachtet hierbei die Entfernung R_1 der Lichtquelle von b, ferner den Abstand r_1 der Platten a von n und die Höhe l_1 der in n befindlichen Benzinkerze. Bei einem zweiten Versuch richtet man B auf die Lichtquelle 2, stellt ein und beobachtet $R_2 r_2$ und nöthigenfalls l_2 falls die Flammenhöhe absichtlich oder unabsichtlich geändert ist. Für beide Versuche bleiben die Absorptionsconstanten der Milchgläser und des Prismas dieselben; die abgeänderte Länge des Weges von a durch das Prisma zum Auge ist, wie leicht zu zeigen, ohne Einfluss, und es berechnet sich demnach in einfacher Weise aus den beobachteten Grössen:

$$\frac{J_2^{(r)}}{J_1^{(r)}} = \frac{R_2^2 \cdot r_1^2 (a + b l_2)}{R_1^2 \cdot r_2^2 (a + b l_1)}.$$

Für diesen Fall gehen die Gleichungen (7) über in:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{J_2^{(r)}}{J_1^{(r)}},$$

sodass die Bestimmung des Intensitätsverhältnisses unmittelbar auch das Verhältniss der Beleuchtungskräfte ergibt. Für praktische Anwendungen wird man es vorziehen, an

Stelle des ersten etwa auf ein Normallicht N von der Intensität J_1 bezogenen Versuches wiederholte Vorversuche anzustellen, durch welche das Verhältniss der Absorptionsconstanten in beiden Theilen des Gesichtsfeldes, sowie die Beziehung des Hülfsnormallichtes n zu dem Normallicht N ermittelt wird. Die Messung einer Lichtquelle 2 wird dann durch einen einzigen Versuch beendet sein, für dessen Berechnung:

$$\frac{J_2^{(r)}}{J_1^{(r)}} = \frac{J_2}{J_1} = C \frac{R_2^2 (a + b l_2)}{r_2^2},$$

gilt, worin C eine durch ebenso leicht anzustellende Vorversuche ermittelte Constante ist. Dieses Verfahren, die Beleuchtungskraft einer Lichtquelle auf diejenige eines Normallichtes von gleicher Farbe zurückzuführen, bietet demnach eine wesentliche Abweichung von anderen bekannten Methoden, z. B. der Bunsen'schen nicht.

II. Vergleichung der Beleuchtungskräfte des von zwei Lichtquellen gleicher Farbe herrührenden diffusen Lichtes. Zur Beantwortung dieser Frage bedarf es zunächst einer Definition darüber, was unter der an einer Stelle eines von diffusem Lichte erfüllten Raumes herrschenden Beleuchtungskraft dieses Lichtes zu verstehen ist. Eine den praktischen Bedürfnissen und den obigen Ausführungen sich unmittelbar anpassende Definition würde die folgende sein. An der betreffenden Stelle sei eine ebene Fläche aufgestellt und dem diffusen Licht ausgesetzt. Die Beleuchtungskraft des letzteren sei alsdann eine Grösse, welche der Erkennbarkeit feiner auf der Fläche angebrachter Charaktere proportional ist, eine Grösse also, auf welche die obigen für die Beleuchtungskräfte punktförmiger Lichtquellen gemachten Ausführungen ebenfalls gelten. Ein Maass dieser Beleuchtungskraft sei dadurch gewonnen, dass man eine Vergleichung vornimmt mit derjenigen Beleuchtung, welche ein in bestimmter Entfernung (etwa 1 m) aufgestelltes Normallicht bei senkrechter Incidenz jener Fläche ertheilt. Hiernach würde die Angabe, dass die Beleuchtungskraft des diffusen Lichtes an einer Stelle eines Raumes gleich derjenigen von n Normalkerzen sei, besagen, dass

eine Aenderung der Helligkeit des diffusen Lichtes im Verhältniss n:1 für eine an der betreffenden Stelle angebrachte Fläche dieselbe Beleuchtungskraft bewirken würde wie ein in der Entfernungseinheit bei normaler Incidenz die Fläche beleuchtendes Normallicht, oder dass die Erkennbarkeit feiner Charaktere auf der Fläche in beiden Fällen dieselbe sei. Hieraus ist unmittelbar ersichtlich, dass die so definirte Beleuchtungskraft des diffusen Lichtes abhängig sein wird von der Lage jener Fläche. Man wird demnach nur von der Beleuchtungskraft an einer Stelle für eine bestimmt gelegene Fläche sprechen können, also beispielsweise, wenn es sich um die Untersuchung der Beleuchtungskraft des diffusen Lichtes in bewohnten Räumen handelt, von einer horizontalen, verticalen oder maximalen Beleuchtungskraft sprechen, darunter die Beleuchtungskraft des diffusen Lichtes für eine horizontale, verticale oder derartig aufgestellte Fläche verstehend, dass dieselbe das Maximum der Helligkeit erfährt.

Der beschriebene Apparat erlaubt diese Messung in folgender Weise. Man stelle an der fraglichen Stelle des Raumes in der beabsichtigten Lage einen Schirm aus mattem weissen Carton auf und richte auf denselben den beweglichen Tubus B des Apparates. Hierbei ist es, was bei Beobachtung von sehr schwachem diffusen Licht in Betracht kommt, nicht nothwendig, dass sich bei b in dem Apparate ausser der durchsichtigen rothen Glasplatte noch eine Milchglasplatte befindet. Bei Beobachtung von stärkerem diffusen Licht sind dagegen ein oder mehrere Milchgläser bei b anzubringen, und es ist ausserdem ein Conus k vor diese Platten zu setzen, der es bewirkt, dass die letzteren nur von Stellen des Schirmes, nicht auch von anderen seitlichen Gegenständen Licht empfangen. Die Entfernung des Apparates vom Schirm ist in beiden Fällen ohne merklichen Einfluss auf die Beobachtung, wie leicht ersichtlich. Nur wird man dieselbe so zu wählen haben, dass die Wirkung des Conus nicht illusorisch wird, noch auch durch den Apparat selbst ein merklicher Schatten auf dem Schirm entsteht, was meistens ohne Schwierigkeit ausführbar ist. Man verschiebt alsdann die

Platten *a*, bis gleiche Helligkeit im Gesichtsfeld eintritt. Darauf wird ein zweiter Versuch gemacht, bei welchem im verdunkelten Zimmer derselbe weisse Schirm durch ein Normallicht in der Entfernungseinheit und unter normaler Incidenz beleuchtet wird. Man richtet abermals den Tubus *B* auf den Schirm und macht die Einstellung der Platten *a* unter jedesmaliger Ablesung ihrer Abstände *r* von der im Apparat befindlichen Benzinkerze und der Flammenhöhe der letzteren. Aus beiden Versuchen ergibt sich dann leicht das gesuchte Verhältniss der Beleuchtungskräfte. Für praktische Anwendungen kann wiederum der letzte Versuch unterbleiben, wenn durch Vorversuche die Constanten des Apparates jetzt incl. der Diffusions- und Albedoconstante des Schirmes ein für allemal ermittelt sind, was durch eine einzige Beobachtung oder für eine abgeänderte Zahl der Milchglasplatten durch eine entsprechende Zahl von Vorversuchen erreicht wird. Es würden für alle Abstufungen des Lichtes von der Dämmerung bis zu einer dem intensivsten Sonnenschein äquivalenten Helligkeit 0 bis 5 dünne Milchglasplatten bei *b* genügen, während man bei *a* mit einer einzigen auskommt, wie aus den von mir angestellten Versuchen hervorgeht, bei welchen eine unter IV zu besprechende Vergleichung des diffusen Tageslichtes mit dem Normalkerzenlichte gemacht wurde.

III. Vergleichung der Intensitäten und der Beleuchtungskräfte zweier als punktförmig betrachteter Lichtquellen verschiedener Farbe. Genau so wie unter I ist zunächst das Verhältniss derjenigen Intensitäten $J_1^{(r)}$ und $J_2^{(r)}$ der beiden Lichtquellen zu ermitteln, welche den durch das rothe Glas hindurchgelassenen Strahlen entsprechen. Alsdann sind folgende zwei Versuche zu machen. Eine auf weissem Schirme angebrachte, etwa den Raum einiger Quadratcentimeter einnehmende Zeichnung, welche eine Reihe feiner Schraffirungen verschiedener Stärke oder eine Stufenfolge verschieden grosser und verschieden leicht zu erkennender Schriftzeichen enthält, beleuchte man in sonst abgedunkeltem Zimmer lediglich durch die Lichtquelle 1. Man beobachte jene Zeichnung durch ein Fernrohr und ändere

die Helligkeit der Beleuchtung so lange, bis eine bestimmte Art der genannten Schraffirungen oder Schriftzeichen gerade noch erkennbar ist, die nächst feinere dagegen nicht mehr. Gleichzeitig richte man den Tubus B des Apparates auf den durch die Zeichnung nicht wesentlich modificirten Schirm und stelle die Platten a ein. Der Abstand zwischen a und n sei r_1, die Flammenhöhe l_1. Bei einem nun folgenden zweiten Versuch beleuchte man die Zeichnung lediglich durch die Lichtquelle 2, ändere die Stärke der Beleuchtung wieder soweit, dass dieselbe Art der Schraffirung wie vorher deutlich erkennbar ist, und stelle gleichzeitig den Apparat ein. Sind dann l_2 und r_2 die jetzt beobachteten Grössen, so ist der in Gleichung (6) und (7) angegebene Quotient:

$$\frac{\beta_2^{(r)}}{\beta_1^{(r)}} = \frac{i_1^{(r)}}{i_2^{(r)}} = \frac{r_2^2 (a + b l_1)}{r_1^2 (a + b l_2)} = k.$$

Ist ferner das aus den beiden erstgenannten nach dem Verfahren I gemachten Versuchen ermittelte Verhältniss der Intensitäten der beiden Lichtquellen $J_2^{(r)} / J_1^{(r)}$, so wird das Verhältniss der Beleuchtungskräfte:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{J_2^{(r)}}{J_1^{(r)}} \cdot k$$

und ist also unabhängig von der Natur des in dem Apparate befindlichen rothen Glases.

Es sei noch bemerkt, dass sich an Stelle der zur Bestimmung von k erforderlichen beiden Versuche zwei andere anstellen lassen werden, bei welchen jene Zeichnung nicht auf dem Schirme, sondern im Inneren des Apparates auf der dem Beobachter zunächst liegenden Milchplatte des Satzes b angebracht wird. Da ich jedoch diesen voraussichtlich mit noch grösserer Sicherheit des Urtheils verbundenen Weg noch nicht praktisch erprobt habe, so glaube ich, das genauere dem vorigen äquivalente Verfahren übergehen zu sollen.[1]) Dagegen möge hervorgehoben werden, dass die Sicherheit des Urtheils über die deutliche Sichtbarkeit der Zeichnungen eine grössere ist, als man von vornherein anzunehmen geneigt ist.

1) Während des Druckes hat sich dieses modificirte Verfahren als brauchbar erweisen.

IV. Vergleichung der Beleuchtungskräfte des von zwei Lichtquellen verschiedener Farbe herrührenden diffusen Lichtes. Man bestimmt zunächst genau wie unter II das Verhältniss der dem rothen Lichte des Apparates entsprechenden Beleuchtungskräfte, ermittelt sodann, genau wie unter III angegeben, den Factor k, mit dem jenes erste Verhältniss zu multipliciren ist.

Bei photometrischen Messungen, bei denen man es immer mit Lichtquellen von constanten Färbungen zu thun hat, kann man natürlich eine Bestimmung jenes Factors k durch Vorversuche machen, wobei die Unsicherheit einer Beobachtung durch eine grössere Zahl von Vergleichungen entsprechend herabgemindert wird. Man hat dann für die eigentlichen photometrischen Messungen nicht blos den Vortheil schnellerer Beobachtung, sondern auch anderen photometrischen Methoden gegenüber den Vortheil, nur Intensitätsunterschiede gleicher Farbe beobachten zu brauchen. Dieser letztere Vortheil wird dort ganz besonders ins Gewicht fallen, wo es sich nur um relative Helligkeitsunterschiede einer und derselben mit dem Normallicht verglichenen Lichtart handelt, wie z. B. bei der Untersuchung der Helligkeit des diffusen Lichtes an verschiedenen Stellen eines bewohnten Raumes oder der nach verschiedenen Richtungen variabelen Intensität des electrischen Bogenlichtes.

Breslau, 3. Juli 1883.

XI. *Ueber „Die Darlegung der Abhandlung über das Licht" von Ibn al Haiṯam; von Eilhard Wiedemann.*

Vor einem Jahre etwa ist in der Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft[1]) der Text, sowie die Uebersetzung der Abhandlung über das Licht von Ibn al Haiṯam oder al Hazen, aus der ich selbst schon früher einige Bruchstücke mitgetheilt habe, von Hrn. Baar-

1) Z. d. D. M. G. **36.** p. 195. 1882.

mann publicirt worden. Die Uebersetzung ist nur mit Vorsicht zu benutzen und ich beabsichtige später in dem obigen Journal einige Berichtigungen zu geben, auf die näher einzugehen hier nicht der Ort ist. Statt einen Auszug derselben in den Beiblättern mitzutheilen, ziehe ich es vor, hier eine Uebersetzung der „Darlegung des Inhaltes der Abhandlung über Licht" (تحرير مقالة الضوء) von Ibn al Haiṯam zu publiciren, welche uns arabisch in einem Codex der Leydener Bibliothek[1]) erhalten ist und in Kürze alle Hauptpunkte der grösseren Schrift enthält.

Hrn. Geheimrath Fleischer in Leipzig, der mich bei der Uebersetzung auf das Freundlichste unterstützte, erlaube ich mir meinen besten Dank zu sagen.

Darlegung der Abhandlung über das Licht.

Zwölf Abschnitte.

Einleitung. Er sagt (nämlich Ibn al Haiṯam), dem Gott barmherzig sei, wisse, dass die Erörterung über das Was des Lichtes in die Naturwissenschaften gehört und die Erörterung über das Wie des Leuchtens des Lichtes der Mathematik bedarf und zwar wegen der Linien, längs deren sich das Licht fortpflanzt.

Ebenso gehört die Untersuchung über das Wie der Strahlen in die Naturwissenschaft und diejenige über seine Form und Erscheinung in die Mathematik. Ebenso verhält es sich mit dem Was der Durchsichtigkeit und dem Fortschreiten des Lichtes, deren Erörterung in die Naturwissenschaft und die Mathematik gehört. Und wir sagen:

1) Jedes Merkmal, das an einem natürlichen Körper gefunden wird, gehört zu den Merkmalen, aus welchen sich das Was dieses Körpers zusammensetzt. Dieses Merkmal heisst eine wesentliche Eigenschaft seines Wesens. Denn das Wesen dieses Körpers setzt sich aus allen Merkmalen zusammen, welche in ihm enthalten sind. Keines derselben kann von dem Körper losgetrennt werden, ohne dass sich

1) Cod. 201 Gol. fol. 316 v bis 318 r Catal. Codicum orientalium bibliothecae academiae Lugduno Batavae. 3. p. 61.

sein Wesen verändert. Das Licht aber eines jeden selbstleuchtenden Körpers gehört zu diesen wesentlichen Merkmalen. Dagegen ist das zufällige Licht, welches auf den durchsichtigen Körpern erscheint und ihnen von einem anderen zugestrahlt wird, eine accidentelle Eigenschaft. Dies ist die Ansicht der in der Philosophie gründlich bewanderten.

Was die Mathematiker anbelangt, so glauben sie, dass das von einem Selbstleuchter ausgehende Licht feurige Hitze darstelle und in dem Selbstleuchter enthalten sei. Denn sie fanden, dass, wenn das Sonnenlicht von einem Hohlspiegel (المرآة المقعرة) reflectirt (انعكس) wird, und in einem Punkte sich sammelt, in welchem sich ein entzündlicher Körper befindet, dieser Feuer fängt. Dass ferner, wenn das Licht eine Zeit lang auf die Luft oder einen anderen Körper scheint, dieser warm wird. Sie glauben, dass alle Lichtarten[1]) von gleicher Natur seien und sich nur durch ihre Stärke und Schwäche unterscheiden. Diejenigen, welche Feuer erzeugen, thun dies infolge ihrer Stärke und bei denen, welche dies nicht thun, geschieht dies infolge ihrer Schwäche; wie man ähnliches auch bei der Hitze des Feuers findet.

2) Die Selbstleuchter, welche die Sinne wahrnehmen, gehören zu zwei Gattungen, den Sternen und dem Feuer. Ihr Licht scheint auf die sie umgebenden Körper, und ein jeder Körper, auf welchen Licht trifft, hat die Fähigkeit, Licht aufzunehmen.

3) In einigen Körpern schreitet das Licht fort und dies sind die durchsichtigen, in anderen schreitet es nicht fort und dies sind die undurchsichtigen. Die Eigenschaft des Fortleitens des Lichtes in den Körpern ist die Durchsichtigkeit und sie gehört zu den Eigenschaften, aus welchen das Was der Durchsichtigkeit sich zusammensetzt. Die Durchsichtigkeit ist ein Merkmal der Substanz der durchsichtigen Körper.

4) Die durchsichtigen Körper sind nach ihrer Durchsichtigkeit und ihrer Aufnahmefähigkeit für das Licht verschieden, wie wir erläutern werden.

---

1) Nicht Lichterscheinungen, wie Hr. **Baarmann** in der oben citirten Abhandlung übersetzt.

5) Die Art des Fortschreitens des Lichtes durch die umgebenden durchsichtigen Körper geschieht, so weit als es möglich ist, in der Art, dass das Licht von einem jeden Punkte nach allen Seiten in der Richtung gerader Linien fortschreitet bis dahin, wo es endigt.

6) Die Körper, welche man gewöhnlich durchsichtig nennt, bilden zwei Kategorien. Die eine enthält diejenigen Körper, bei denen das Licht alle Theile durchdringt, wie bei der Luft, dem Wasser, dem Glas, dem Bergkrystall (بلور), und die zweite diejenige, bei denen das Licht nur durch einige Theile hindurchgeht, wie bei feinen Geweben und diesen ähnlichen Stoffen. Bei ihnen geht das Licht durch die Löcher zwischen den Fäden. Da aber die Fäden von feinen Geweben sehr dünn sind, so kann das Auge nicht das Licht, welches durch die Löcher geht, von demjenigen unterscheiden, das auf die Fäden fällt.

Die zuerst besprochene Durchsichtigkeit ist eine andere als die zuletzt erörterte und die Durchsichtigkeit im strengen Sinne des Wortes ist die erste. Die zweite ist der ersten ähnlich. Das Licht wird an allen Stellen eines Körpers erkannt, heisst, dass, wenn man an eine Stelle einen undurchsichtigen Körper bringt, man auf ihm Licht erblickt. Aus dem, was wir erörtert haben, geht mit Nothwendigkeit hervor, dass alle Körper die Fähigkeit besitzen, Licht aufzunehmen und in allen durchsichtigen die Fähigkeit vorhanden ist, das Licht fortzuleiten, d. h. dass es nicht gehindert ist, auf allen geraden Linien fortzuschreiten, welche wir in diesen Körper ziehen.

7) Das Licht, welches in dem durchsichtigen Körper auf geraden Linien fortschreitet, heisst „Strahl". Die geraden Linien sind gedachte (mathematische) Linien, die nicht gefühlt werden können. Sie selbst nebst dem auf ihnen fortschreitenden Lichte bilden die Strahlen. Die Strahlen sind ein Bild des Wesens des Fortschreitens auf geraden Linien.

8) Die Mathematiker nennen Sehstrahlen (Gesichtsstrahlen) Strahlen, die denen der Sonne und des Feuers ähnlich sind; da die Alten von ihnen glaubten, dass das

Sehen in Strahlen bestehe, die von dem Auge zu dem angeschauten Gegenstande gehen. Es soll ferner die Sehkraft eine feurige Kraft von der Art des Lichtes sein. Sie soll vom Auge aus auf geraden Linien fortschreiten, deren Anfang der Mittelpunkt des Auges ist. Wer aber glaubt, dass das Sehen mittelst eines Bildes stattfinde, welches von dem Gesehenen zu dem Auge sich fortpflanze, der nimmt an, dass die Strahlen, nähmlich diejenigen, vermittelst deren die Wahrnehmung stattfindet, das von dem erblickten Körper auf geraden Linien fortschreitende Licht ist, welches in dem Mittelpunkt des Auges von der Seite des Lichtes her zusammentrifft. Denn diejenigen, welche diese Ansicht haben, glauben, dass das Auge von Natur aus zu dem Empfinden nur dieser Lichtarten bestimmt sei. Das Licht auf diesen gedachten Linien mit ihnen zusammen, heisst Strahl und die Sehstrahlen sind bei allen Mathematikern das Licht, welches auf diesen Linien fortschreitet. Das Licht ist Licht der Sterne oder des Feuers oder des Blickes.

9) Dann sagen wir, dass die durchsichtigen Körper in zwei Abtheilungen getheilt werden, die ätherischen und die unterhalb des Aethers. Die ätherischen bestehen aus einer einzigen Art, da sie nur eine einzige Beschaffenheit besitzen. Die unter dem Aether befindlichen bestehen aus drei Classen. Erstens der Luft, zweitens dem Wasser und den durchsichtigen Flüssigkeiten, zu denen das Eiweiss und die durchsichtigen Flüssigkeiten des Auges gehören und drittens den durchsichtigen Steinen, wie dem Glas und dem Bergkrystall. Und dies sind die verschiedenen Arten der durchsichtigen Körper.

10) Die vorher genannten Körper zeigen Verschiedenheiten in der Durchsichtigkeit und jede Art derselben ist wieder in sich verschieden, eine Ausnahme macht die Durchsichtigkeit des Aethers. Auch die Durchsichtigkeit der Luft ist verschieden. Es gibt dichte, wie dicker Nebel und Rauch, und die mit Staub und Rauch gemengte Luft, und es gibt dünne Luft, wie die Luft zwischen Mauern[1]) und die Luft nahe

1) Diese Angabe beruht wohl auf der Beobachtung, dass, wenn wir auf eine Landschaft zwischen zwei Mauern hinblicken, diese uns infolge

am Aether. Ebenso zeigen das Wasser und die durchsichtigen Flüssigkeiten Verschiedenheiten in ihrer Durchsichtigkeit. Dünner (feiner) ist das Seewasser, dichter dagegen das fliessende Wasser und das Wasser, zu dem ein Farbstoff gefügt ist. Aber die Sachen lassen sich besser bei den durchsichtigen Flüssigkeiten und Steinen erkennen.

11) Alle durchsichtigen Körper unter dem Aether besitzen auch eine gewisse Undurchsichtigkeit. So oft nämlich auf sie das Licht der Sonne trifft, senden sie secundäres Licht (wörtlich ein zweites Licht[1])) aus, nur dass dieses secundäre Licht um so schwächer ist, je dünner der Körper. Dass auch von der Luft Licht reflectirt wird, ergibt sich aus dem Licht der Morgendämmerung. Dass auch von dem Wasser und den durchsichtigen Körpern Licht ausgeht, das kann man mit den Sinnen wahrnehmen, wenn man ihnen einen weissen Körper von der anderen Seite nähert, als derjenigen, nach welcher das auftreffende Licht fortschreitet. Man findet dann auf dem Körper unter diesen Umständen Licht, das vorher nicht vorhanden war, freilich ist es nur schwach.

Das secundäre Licht geht ebenso gut von den durchsichtigen wie den undurchsichtigen Körpern aus: freilich ist es bei ersteren schwächer und je grösser die Durchsichtigkeit, um so schwächer wird es.

Es ist sicher, dass das secundäre Licht nicht etwa von dem Lichte ausstrahlt, welches den durchsichtigen Körper durchdringt, denn letzteres bewegt sich in Richtungen, die von der Lichtquelle abgewandt sind, während man findet, dass das secundäre Licht sich gerade nur in Richtungen fortpflanzt, die diesen entgegengesetzt sind. In einem durchsichtigen Körper ist aber kein anderes Licht vorhanden, als das hindurchgehende und das darin bleibende, daher muss das secundäre Licht von dem im Körper verbleibenden herrühren. Das Bleiben des Lichtes in dem Körper hat aber als einzigen Grund die Undurchsichtigkeit. Besitzt ein

---

der Abblendung des seitlichen Lichtes heller erscheint, als wenn wir sie direct betrachten.

1) Es ist dies diffus an der Oberfläche oder im Inneren der Körper reflectirtes Licht.

Körper den äussersten Grad der Durchsichtigkeit und gar keine Undurchsichtigkeit, so durchdringt ihn das Licht vollkommen und es bleibt gar kein Licht in ihm. In den Körpern unterhalb des Aethers ist Durchsichtigkeit und Undurchsichtigkeit gemischt.

12) Nach der Ansicht des Logikers (sc. Aristoteles) hat derAether die grösstmögliche Durchsichtigkeit und es gibt keinen durchsichtigeren Körper, als ihn, dagegen glauben die Mathematiker, dass die Durchsichtigkeit keine Grenze besitze, und dass es in Bezug auf einen jeden durchsichtigen Körper möglich sei, dass es einen noch durchsichtigeren als ihn gebe. Dies hat Abû Sa'îd al'Alâ ben Sahl[1]) bewiesen und zwar auf geometrischem Wege. Wir wollen dies beweisen, indem wir die Hauptpunkte seines Beweises stärker hervorheben und die Quintessenz desselben ist in dem Folgenden enthalten.

Wir nehmen einen durchsichtigen Körper von mittlerer Feinheit und umgeben ihn mit einem anderen von anderer Dichtigkeit, die aber grösser als die seinige ist. Ziehen wir dann einen Strahl, der in dem Dichteren auf die Oberfläche des Dünnen unter einem bestimmten Einfallswinkel schief auftrifft, so wird er von dem Lothe abgelenkt und es entsteht der sogenannte Brechungswinkel.

---

1) Ueber die Person des oben erwähnten Gelehrten ist uns nichts bekannt, (bei Hrn. Baarman heisst er Ibn Suhail, was mit ben Sahl so gut wie identisch ist) dagegen ist uns die von Ibn al Haiṯam erwähnte Schrift erhalten. In seinem Katalog der Handschriften des orientalischen Institutes zu St. Petersburg bemerkt Baron von Rosen nach dem Wortlaut eines dort befindlichen Codex.

„Den Beweis, dass der Aether nicht die äusserste Durchsichtigkeit besitzt, hat Abû Sa'd Al'Alâ ben Sahl bei der Durchsicht des Buches des Ptolemäus über die Optik entwickelt und er wollte diese genau in der Darlegung des fünften Buches dieses Werkes behandeln.“ Nach Rosen fängt die Schrift an: „Er sagt es sei die Kugel der Elemente اب und ihr Mittelpunkt der Punkt ح und die Oberfläche des Himmels ده etc.

In der That behandelt das fünfte Buch des Ptolemäus die Brechung des Lichtes, also gerade Gegenstände, die mit den von Abû Sa'd erörterten sich nahe berühren.

Interessant ist obige Mittheilung noch deshalb, weil sie uns einen weiteren Beweis dafür liefert, dass die Araber die Optik des Ptolemäus benutzt haben.

Wenn wir aber die Durchsichtigkeit des dünnen Körpers grösser wählen, so wird der Ablenkungswinkel[1]) grösser und der Brechungswinkel[2]) kleiner und für jede Kategorie der Dünnheit des dünneren tritt entsprechend einem bestimmten Einfallswinkel ein besonderer Ablenkungs- und Brechungswinkel auf. Haben wir eine Reihe von Durchsichtigkeiten, so unterscheiden sie sich entsprechend den Ablenkungs- und Brechungswinkeln. Der Brechungswinkel eines bestimmten Einfallswinkels ist der Theilbarkeit ins Unendliche fähig und so oft er kleiner wird, wird die Durchsichtigkeit grösser. Es gibt daher keine Durchsichtigkeit, in Bezug auf welche nicht eine noch grössere Durchsichtigkeit gedacht werden könnte. Die Durchsichtigkeit hat daher keine Grenze, bei welcher sie stehen bliebe. Dies ist die Ansicht der Mathematiker.

Die Naturforscher sagen, dass die an Naturkörpern beobachteten natürlichen Eigenschaften sich bis zu einer bestimmten Grenze erstrecken und dass der Winkel, der am Naturkörper sich findet, wohl in der Einbildung, nicht aber in der Wirklichkeit bis zu jeder Grenze getheilt werden kann. Ebenso ist auch der Körper, an welchem der Winkel angenommen wird, nicht ins Unendliche theilbar. Denn der Naturkörper ist bis zu einer bestimmten Grenze theilbar und dies beruht auf einer ihm eigenthümlichen Eigenschaft, wenn er sich aber weiter theilen liesse, verlöre er seine Eigenschaft. Der Logiker (sc. Aristoteles) meint, dass unter den Naturkörpern keiner gefunden wird, der durchsichtiger sei als der Aether; es ist aber nicht denkbar, dass dies wirklich eintritt, weil ja angenommen wird, dass alle Naturkörper, deren Existenz überhaupt möglich ist, auch wirklich in das Dasein getreten sind. An und für sich sind beide Annahmen denkbar.

Dies was wir gesagt haben, genügt für die Wissenschaft über die Zustäne des Lichtes und der Durchsichtigkeit. —

---

1) زاوية الانعطافية. 2) زاوية الباقية. Diese beiden Ausdrücke sind nicht stets von Hrn. Baarmann richtig wiedergegeben.

Wenn nun auch der Inhalt der obigen Schrift vollkommen sich selbst erklärt, so möchte ich doch auf zwei Punkte aufmerksam machen.

Einmal auf die scharfe Gegenüberstellung der Ansichten der Mathematiker und der Naturforscher und ferner, dass Ibn al Haitam die Bedeutung der Lichtstrahlen unabhängig von den Sehstrahlen gar nicht als etwas besonderes hinstellt. In der That war diese Auffassung des Lichtes, wie ich bei einer späteren Gelegenheit zeigen werde, im elften Jahrhundert im Orient vielfach vertreten.

XII. *„Die Kölner Luftpumpe v. J. 1641"; eine historische Notiz von Dr. G. Berthold in Ronsdorf.*

„Die Luftpumpe wurde um das Jahr 1650 von O. von Guericke erfunden", heisst es in den landläufigen Compendien. „Das eigentliche Jahr der Erfindung ist unbekannt," setzte jedoch bereits Lichtenberg hinzu. Zu letzterem Resultate ist auch Hr. Gerland gelangt[1]), welcher neuerdings sich vielfach, wiewohl vergeblich, in dieser Sache bemüht hat. Im Gegensatz zu dem vorsichtigen Verhalten Hrn. Gerland's stellt Hr. Zerener mit grosser Emphase die Behauptung auf[2]), „die Entdeckung der Luftleere, Erfindung der Luftpumpe und anderer anschliessender Apparate sind aber ganz entschieden vor das Jahr 1646 zu datiren," ohne im Stande zu sein, auch nur ein einziges authentisches Document beizubringen. Seine ganze Beweisführung läuft vielmehr darauf hinaus, es sei unwahrscheinlich, dass Guericke, mit Geschäften überhäuft und zu dem in den Jahren 1646 bis 1660 meistens von seiner Vaterstadt abwesend, die

1) Bericht über die wissensch. Apparate auf der Londoner internationalen Ausstellung i. J. 1876. Braunschweig 1878. p. 33. — Beiträge zur Geschichte der Physik. Halle 1882. Fol. p. 5. Anm. 1. — Der leere Raum, die Constitution der Körper u. der Aether. Berlin 1883. p. 37. Anm. 3.

2) Historisches Nachwort, beigefügt einer Reimpression eines Theiles von Otto von Guericke's Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica. Leipzig, W. Drugulin. 1881. Fol. p. VI.

nöthige Musse gehabt habe, in dieser Zeit seine physikalischen Untersuchungen anzustellen, seine Entdeckungen seien also vor diese Jahre zu setzen. Einer ähnlichen Argumentation Biedersee's gegenüber hatte bereits Hoffmann bemerkt[1]): „so möchte sich mit gutem Grunde dagegen einwenden lassen, dass diese Missionen O. v. Guericke nicht fortwährend von Magdeburg entfernt hielten, dass er nach Beendigung der einen nicht sofort eine andere übernehmen musste, sondern bald längere, bald kürzere Zeit (einmal über anderthalb, ein anderes mal beinahe vier volle Jahre) wieder in seiner Vaterstadt verweilt, und dass seine Geschäfte ihm da Musse genug übrig liessen, sich mit seinen Lieblingsstudien zu beschäftigen. Ja wir dürfen wohl, da einmal die Neigung für die Naturwissenschaften und für mechanische Arbeiten in ihm erwacht war, als ausgemacht annehmen, dass er sich gleich so vielen anderen Männern während seiner ganzen Lebenszeit, freilich mit längeren oder kürzeren Unterbrechungen, diesen Studien und Beschäftigungen hingegeben habe."

Eine nüchterne Prüfung der Sachlage ergibt nun, dass unser Wissen sich vollständig auf das beschränkte, was Otto von Guericke selbst in seinem Werke berichtet; er schreibt nämlich in der Vorrede[2]), durch die Streitigkeiten der Philosophen über den leeren Raum veranlasst, habe er, um der Sache auf den Grund zu kommen, nachdem er die nöthige Musse erlangt hatte, eine experimentelle Prüfung versucht. Dies sei von ihm auf verschiedene Weise versucht, auch sei sein Bemühen nicht vergeblich gewesen, sodass ihm die Erfindung einiger Maschinen gelang, welche geeignet waren, jenen stets geleugneten leeren Raum zu demonstriren. Später (postea) auf dem Reichstage zu Regensburg (1654) habe er auf Wunsch einiger Liebhaber solcher Sachen, welche von den erwähnten Experimenten gehört hatten, seine Versuche vorgeführt. Im Jahre 1657 habe dann C. Schott die Luftpumpe nebst den betreffenden, von letzterem als „Magdeburger" benannten Versuchen durch den Druck bekannt gemacht. Er (Guericke) selbst habe niemals im

---

1) Otto von Guericke, etc. Ein Lebensbild. Von Fr. W. Hoffmann. Herausgegeben von J. O. Opel. Magdeburg 1874. p. 203.

2) Otto von Guericke, Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de Vacao Spatio etc. Amstelodami 1672. Fol. Praefatio (p. X).

Sinne gehabt, irgend etwas von diesen Sachen drucken zu lassen, doch hätten die widersprechenden Urtheile über den leeren Raum ihn schliesslich veranlasst, seinen vollständigen Tractat de spatio vacuo, der bereits am 14. März 1663 beendet gewesen sei, herauszugeben.

Aus Guericke's eigenem Berichte ist also zu entnehmen, dass die Erfindung der Luftpumpe jedenfalls vor das Jahr 1654 zu setzen ist, ob dieselbe aber kurz vor dieses Jahr fällt, oder ob der Termin weiter zurück liegt, darüber besagen unsere Quellen nichts, ausgenommen allerdings eine einzige, sehr späte Literaturangabe, welche diesen Termin mindestens bis zu dem Jahre 1651 zurückschiebt. Es ist dies die vielberufene Angabe Muncke's, welcher i. J. 1831 in Gehler's physikalischem Wörterbuche berichtet[1]): „Uebrigens hat Otto v. Guericke mehrere (sc. Luftpumpen) verfertigen lassen, namentlich eine, welche er schon 1651 dem Magistrate in Cöln zum Geschenke machte. S. Hindenburg's Magaz. Heft X p. 120." Diese Angabe Muncke's hat eine sehr verschiedene Aufnahme bei den Autoren gefunden. Hr. Zerener nimmt sie ohne weiteres als gesichert an und baut seine Schlüsse darauf.[2]) Reservirter zeigt sich Hoffmann, indem er zugleich fragt: „Was bestimmte ihn (sc. Guericke), den Vätern dieser Stadt eine derartige Auszeichnung zu Theil werden zu lassen? Geschah dies auf ihren Wunsch oder aus eigenem Antriebe? Und wenn das letztere der Fall war, hatte er irgend welche Verbindlichkeiten gegen sie? Oder waren sie durch Bande der Freundschaft mit ihm verknüpft? Alles das sind Fragen, auf welche keine Antwort ertheilt werden kann." [3]) Hr. Gerland endlich verhält sich vollständig ablehnend dagegen, indem er Muncke's Citat einfach für falsch erklärt.[4])

---

1) Gehler's physikalisches Lexicon. Leipzig 1831. 6. p. 527. Anm. 1.

2) l. c. p. 6.

3) l. c. p. 211.

4) Bericht etc. p. 33. — Der leere Raum etc. p. 37. Anm. 3. An letzterem Orte schreibt Hr. Gerland: „Die von Muncke in Gehler's physikal. Lexicon, 6. p. 527 angeführten Citate sind falsch." Dies ist jedoch ein Irrthum; wie es sich mit dem Citat in Betreff der Kölner Luftpumpe verhält, werden wir weiter oben sehen. Das andere Citat in Betreff der Berliner Luftpumpe ist vollkommen richtig; in dem von Muncke citirten Werke, Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der berühmtesten Mathematiker. In alphabetischer Ordnung. Erster Theil, welcher die bis jetzt bereits Verstorbenen enthält. Münster, bei Philipp Heinrich Perrenon 1788. kl. 8°. p. 121

Wenn sich nun auch das Citat als unrichtig erwies, so musste es doch einen eigenen Reiz gewähren, der Angabe selbst näher zu treten und zuzusehen, ob sich auch diese als falsch erwiese, oder ob sie sich verificiren lasse. Meine eigenen, darauf bezüglichen Nachforschungen führten nun alsbald zu dem gewünschten Resultate. Ich machte nämlich zunächst ausfindig, dass Muncke seine Angabe aus Busch, Handbuch der Erfindungen, entlehnt hat, und dass es sich bei dem Citate lediglich um einen Schreibfehler Muncke's handelt. G. C. Busch berichtet nämlich[1]: „In Cöln befindet sich eine Luftpumpe, die Guericke selbst machte und im Jahre 1651 dem Magistrat zum Geschenk überschickte. Archiv für die reine und angewandte Mathematik von Hindenburg, 10. Heft, p. 132." Also nicht das Magazin Hindenburg's, wie Muncke citirt, sondern das *Archiv* war die richtige Quelle, wie ein Nachschlagen sofort zeigte. Eine Vergleichung der Urquelle in Hindenburg's Archiv ergab nun aber eine höchst überraschende Abweichung, indem hier nicht, wie bei Busch (und nach diesem bei Muncke) das Jahr 1651, sondern das Jahr 1641 angegeben ist.

Im zehnten Hefte von Hindenburg's Archiv sind einige Briefe von Christian Kramp v. J. 1799 an Hindenburg abgedruckt. Kramp war in diesem Jahre zunächst als Professor der Mathematik, später als Professeur de Chimie et de Physique expérimentale á l'Ecole centrale du Département de la Roer in Cöln angestellt worden. Er war eifrig mit der Ordnung und Completirung des physikalischen Cabinets beschäftigt und so glücklich gewesen, für die Centralschule das schöne physikalische Cabinet des Professors Schurer in Strassburg zu erwerben. Von Strassburg aus,

---

(Artikel Guerike) heisst es: „Die Luftpumpe des Otto von Guerike ist noch zu Berlin auf der königlichen Bibliothek zu sehen; ihre Einrichtung ist von der jetzt gewöhnlichen sehr verschieden und gewissermassen noch unvollkommen."

1) Handbuch der Erfindungen. Eisenach 1816. Th. VIII. p. 223. Uebrigens findet sich auch bei Busch ein Druckfehler, indem dort Hindenburg's Archiv, Heft X p. 132 steht, während es p. 232 heissen muss. — Höchst auffallend ist es, dass Hoffmann, l. c. p. 211. Anm. 3, obschon er Gehler's phys. Lex. citirt, doch Hindenburg's Archiv druckt (nicht Magazin, wie im Gehler steht), und gleichfalls, wie Busch, p. 132 setzt, während im Gehler p. 120 steht.

wohin sich Kramp begeben hatte, um das Einpacken und den Transport der Schurer'schen Sammlung zu besorgen, schreibt er nun in einem d. 20. Floréal VII. datirten Briefe: „In Cölln selbst ist bereits eine artige Sammlung physikalischer Sachen: eine Querickische Luftpumpe, von ihm selbst gemacht und im Jahre 1641 dem Magistrate von Cölln zum Präsent geschickt; eine neuere Nolletische, eine ganz neue Smeatonische, nebst dazu gehörigem, vollständigem Apparate. . . . Kurz wir haben nunmehr eine der vollständigsten Sammlungen, die in der Republique anzutreffen.“[1])

Diese Mittheilung Kramp's ist geeignet, unser höchstes Interesse zu erwecken. Findet sich die als i. J. 1799 in Cöln noch vorhanden bezeichnete Luftpumpe noch gegenwärtig dort? Welches sind die Beweise für ihre Echtheit? Und vor allem, lässt sich authentisch nachweisen, dass diese Luftpumpe bereits i. J. 1641 von Guericke nach Cöln geschickt wurde?[2]) Das sind Fragen, die sich Jedem sofort aufdrängen. Hr. Dr. Becker, Oberbürgermeister von Cöln, hatte die ausserordentliche Gefälligkeit, auf meine Bitte an Ort und Stelle Nachforschungen vorzunehmen. Es gelang jedoch nicht, von der Luftpumpe auch nur eine Spur aufzufinden; Hr. Becker vermuthet, dass die Luftpumpe in der französischen Zeit abhanden gekommen ist; in dem amtlichen Verzeichniss der nach Paris entführten Sachen ist sie übrigens nicht mit aufgeführt. Ob noch ein altes Verzeichniss der physikalischen Sammlung der ehemaligen Centralschule zu Cöln vorhanden ist, und ob sich im Stadtarchiv von Cöln Schriftstücke von Guericke oder sonstiges Actenmaterial

---

1) C. F. Hindenburg, Archiv der reinen und angewandten Mathematik. Leipzig, 1799. Zehntes Heft. p. 232.

2) Ich will hier ausdrücklich bemerken, dass sich ein Druckfehlerverzeichniss des zehnten Heftes von Hindenburg's Archiv nicht findet, auch nicht in dem 11. Hefte, für welches ein solches (für Heft X) versprochen war; ebenso wenig findet sich bei Busch ein Druckfehlerverzeichniss. Es bleibt unaufgeklärt, ob es sich bei Busch in Bezug auf das Jahr um einen Druckfehler handelt, oder ob Busch willkürlich die Jahreszahl geändert hat, um dieselbe conformer mit dem gewöhnlich als Zeitpunkt der Erfindung der Luftpumpe angenommenen Jahre 1650 zu machen. — Die Möglichkeit, dass es sich in Bezug auf die Jahreszahl 1641 bei Kramp, ganz abgesehen von einem etwaigen Druck- oder Schreibfehler, um einen Gedächtnissfehler handeln kann, ist natürlich nicht ausgeschlossen, zumal da Kramp von Strassburg und nicht von Cöln aus seine Mittheilung an Hindenburg machte.

vorfindet, welches zur Aufklärung der Sache dienen könnte, darüber konnte ich leider keine Auskunft erhalten.[1])

Unter so bewandten Umständen bleibt nichts anderes übrig, als die Angabe Kramp's vorläufig einfach zu registriren. Als ein historisches Factum von unzweifelhafter Sicherheit vermögen wir dieselbe nicht zu betrachten, da die authentischen Beweise für ihre Richtigkeit fehlen. Wir schliessen, indem wir den Ausspruch Lichtenberg's dahin modificiren: Es ist nicht nur das eigentliche Jahr der Erfindung der Luftpumpe durch Otto von Guericke vollständig unbekannt, sondern sogar der ungefähre Zeitpunkt der Erfindung hat bis jetzt nicht festgestellt werden können.

XIII. *Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. Christiansen: „Einige Versuche über die Wärmeleitung"; von A. Winkelmann.*

Hr. Christiansen hat unter dem obigen Titel einige Versuche mitgetheilt[2]), welche u. a. auch die Abhängigkeit der Wärmeleitung der Luft von der Temperatur bestimmen. Die Methode, deren sich Hr. Christiansen bediente, war die folgende: Drei runde, gleich grosse Kupferplatten waren durch je drei kleine Glasstückchen voneinander getrennt; die untere Platte wurde durch kaltes, die obere durch warmes Wasser auf einer constanten Temperatur gehalten, und die Temperatur der drei Platten durch Thermometer bestimmt. Sind die Platten gleich weit (e) voneinander entfernt, wie es bei den Versuchen mit Luft der Fall war, so hat man folgende Gleichung (5) nach Hrn. Christiansen:

$$S.k\left(1+\frac{T_1+T_2}{2}\alpha\right)\frac{T_1-T_2}{e}-Sk\left(1+\frac{T_2+T_3}{2}\alpha\right)\frac{T_2-T_3}{e}$$
$$=h.A.(T_3-T_0).$$

Hier bezeichnet:

S die Grundfläche einer Platte,
k die Leitungsfähigkeit der Luft bei 0°,
h die äussere Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers,
A die cylindrische Oberfläche der mittleren Platte,

---

1) Hr. Dr. Becker theilt mir mit, dass der Stadtarchivar gegenwärtig mit anderen Arbeiten vollauf beschäftigt und daher jetzt und in nächster Zeit nicht in der Lage sei, die bezüglichen Nachforschungen vorzunehmen. — Ich behalte mir vor, zu gelegener Zeit selbst diese Nachforschungen im Stadtarchiv auszuführen.

2) Christiansen, Wied. Ann. 14. p. 28. 1881.

T_1, T_2, T_3 die Temperatur der oberen, mittleren und unteren Platte,

T_0 die Temperatur der umgebenden Luft,

α den Temperaturcoëfficienten der Wärmeleitung der Luft.

Aus obiger Gleichung leitet Hr. Christiansen:

$$(5_a) \qquad \delta + (s^2 + \delta T_2) = \frac{h.A.e}{k.S}(T_2 - T_0) \qquad \text{ab, wo:}$$

$\delta = (T_1 - T_2) - (T_2 - T_3)$ und $s = \frac{1}{2}(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}(T_2 - T_3)$ ist.

Wenn nun Hr. Christiansen:

$$\alpha = 0{,}001\,504 \quad \text{und} \quad \frac{h}{k} = 1{,}43$$

setzt, so findet eine gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den durch die Gleichung (5_a) berechneten Werthen von δ statt. Da Hr. Christiansen betreffs des Werthes 0,001 504 bemerkt: „die Sache bedarf wohl einer näheren Untersuchung, besonders mit Rücksicht auf die Wärme, die durch Strahlung von der einen zur anderen Platte geht, so habe ich bei einer früheren Erwähnung[1]) der Christiansen'schen Arbeit anderweitige Bedenken, welche ich gegen die obige Berechnung hegte, unterdrückt. Vor kurzem hat nun Hr. Christiansen weitere Versuche über die Bestimmung des Emissions- und Absorptionsvermögens der Wärme mitgetheilt und kommt hier zu dem Resultat[1]), dass sein früher gefundener Werth $\alpha = 0{,}001\,504$ für den Temperaturcoëfficienten der Wärmeleitung bestätigt sei. Dieser Auffassung kann ich nicht beistimmen, und zwar aus folgenden Gründen.

In der obigen Gleichung (5), resp. (5_a), welche zur Bestimmung vor α dient, ist angenommen, dass die Wärme, welche der mit der äusseren Luft in Berührung befindliche Theil der mittleren Kupferplatte verliert, proportional der constanten Grösse h und der Temperaturdifferenz der Platte und der Umgebung sei. Diese Annahme ist nur angenähert richtig und in einer Gleichung, welche die Abhängigkeit der Wärmeleitungsfähigkeit der Luft von der Temperatur liefern soll, nicht gestattet. Denn die Wärme, welche nach aussen abgegeben wird, wächst schneller, als die Temperaturdifferenz. Setzt man daher die fragliche Wärmemenge mit Hrn. Christiansen gleich:

$$h.A.(T_2 - T_0),$$

so nimmt h mit wachsender Temperaturdifferenz zu. Bei den verschiedenen Versuchen des Hrn. Christiansen variirt diese Differenz zwischen 2,3 und 15,8°.

1) Winkelmann, Wied. Ann. **19.** p. 654. 1883.
2) Christiansen, Wied. Ann. **19.** p. 282. 1883.

Hr. Christiansen hat dann in der zweiten Arbeit die Wärmemengen einzeln bestimmt, welche die Platte einerseits durch Strahlung, andererseits durch Leitung und Convection verliert. Die letztere Grösse, bezogen auf 1 qcm, 1 sec. und die Temperaturdifferenz 1^0 nennt Hr. Christiansen (p. 282) f und findet:

$$f = 0{,}000\,067\,5\,.$$

Diesen Werth vergleicht Hr. Christiansen mit dem in seiner ersten Arbeit gefundenen:

$$\frac{h}{k} = 1{,}43,$$

indem er $k = 0{,}000\,048\,38$ setzt und daraus:

$$h = 0{,}000\,069$$

berechnet. Da nun f und h nahe übereinstimmen, so glaubt Hr. Christiansen, darin eine Bestätigung seines Werthes $\alpha = 0{,}001\,504$ gefunden zu haben.

Dagegen ist zu bemerken, dass die Grössen f und h, welche Hr. Christiansen als identisch ansieht, eine verschiedene Bedeutung haben. Während nämlich f sich nur auf die Wärme bezieht, welche durch Leitung und Convection fortgeführt wird, enthält h auch jene Wärme, welche durch Strahlung fortgeht. Ferner setzt Hr. Christiansen in der ersten Arbeit, wie schon oben erwähnt, die abgegebene Wärmemenge der Temperaturdifferenz, also:

$$h\,(T_2 - T_0),$$

in der zweiten dagegen: $f\,(\Theta)^{1,2}$

proportional, wo Θ ebenfalls die Temperaturdifferenz bezeichnet. Dies ist ein zweiter, und zwar der schwerer wiegende Grund, weshalb h und f nicht dasselbe bedeuten.

Aus der thatsächlichen nahen Uebereinstimmung der durch Hrn. Christiansen berechneten Werthe von h und f darf man daher nicht auf die richtige Bestimmung von α schliessen, sondern muss vielmehr folgern, dass ein Versehen diese Uebereinstimmung hervorgebracht hat. Wollte man f unter der Voraussetzung, welche Hr. Christiansen in seiner ersten Arbeit für zulässig gehalten, berechnen, dass nämdie abgegebene Wärme der Temperaturdifferenz proportional wäre, so könnte man den Werth für $\Theta = 15^0$ benutzen, weil bis zu dieser Grösse die Temperaturdifferenz auch bei den Versuchen in der ersten Arbeit ansteigt. Man würde dann $f = 0{,}000\,105\,9$ anstatt $0{,}000\,067\,5$ erhalten.

Hohenheim, Juli 1883.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 11.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XX.

I. *Zur Theorie der dynamoelectrischen Maschinen;*
von R. Clausius.

(Vorgetragen in der zu Zürich abgehaltenen Jahresversammlung der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft am 8. Aug. 1883.)

Die dynamoelectrischen Maschinen sind, ähnlich wie ihrerzeit die Dampfmaschinen, in ihrer praktischen Entwickelung der theoretischen Behandlung vorausgeeilt, und erst nachträglich hat man versucht, die in ihnen stattfindenden Vorgänge durch mathematische Formeln darzustellen. Die bis jetzt angewandten Formeln scheinen mir aber diesem Zwecke noch nicht ganz zu entsprechen, indem sie entweder auf theoretisch mangelhafter Grundlage beruhen, oder zu unvollständig sind, um alle in Betracht kommenden Umstände zu berücksichtigen. Ich will mir daher erlauben, im Folgenden eine etwas vervollständigte theoretische Entwickelung mitzutheilen.

§ 1. Wesentliche Bestandtheile der dynamoelectrischen Maschine.

Die dynamoelectrischen Maschinen, welche bis jetzt construirt sind, haben äusserlich ziemlich verschiedene Formen, aber dem Princip nach weichen sie wenig voneinander ab, und ich glaube, dass unter den Maschinen für gleichgerichteten Strom die Formen von Gramme und Siemens als die eigentlich typischen anzusehen sind. Auch diese sind in ihrer Wirkung einander so ähnlich, dass sie, soweit es sich um die Ableitung der Grundformeln handelt, nicht getrennt betrachtet zu werden brauchen, sondern in eine gemeinsame Betrachtung zusammengefasst werden können.

Zu den wesentlichen Bestandtheilen gehört zunächst ein fester Electromagnet mit grossen Polflächen oder auch eine

Combination mehrerer fester Electromagnete, deren gleichnamige Pole durch Eisenstücke untereinander verbunden und dadurch mit gemeinsamen Polflächen versehen sind. Für die Betrachtung ist es nicht nöthig, die Fälle, wo die Maschine nur einen, oder wo sie mehrere feste Electromagnete hat, voneinander zu unterscheiden, und wir wollen daher festsetzen, dass überall, wo im Folgenden von dem festen Electromagnet die Rede ist, darunter auch eine Combination von mehreren festen Electromagneten verstanden werden kann.

In dem zwischen den Polflächen des festen Electromagnets liegenden Raume befindet sich der drehbare Electromagnet. Dieser hat in der Gramme'schen Maschine die zuerst von Pacinotti ersonnene Form eines Ringes und besteht aus einem entweder massiven oder, wie es jetzt gebräuchlich ist, aus Draht gebildeten Eisenringe, der mit dem Leitungsdrahte spiralförmig umwickelt ist. In der Siemens'schen Maschine besteht er aus einer Eisentrommel, die nur äusserlich mit dem Leitungsdrahte umwickelt ist. Wir wollen die beiden Bestandtheile dieses Electromagnets, nämlich die Umwickelung und den Eisenkern, einzeln betrachten. Die erstere, für welche es wesentlich ist, dass sie gedreht werden kann, wollen wir die drehbare Umwickelung nennen, und den letzteren, welcher die Drehung der Umwickelung nicht mitzumachen braucht, sondern auch festgehalten werden kann, (was für die Wirkung sogar besser, aber für die praktische Ausführung schwierig ist), wollen wir den Eisenkern der drehbaren Umwickelung nennen.

Die drehbare Umwickelung ist in viele Abtheilungen zerlegt, welche aber untereinander in leitender Verbindung stehen, wobei die Einrichtung getroffen ist, dass immer das Ende einer und der Anfang der folgenden Abtheilung mit einem Metallstreifen verbunden sind. Diese Metallstreifen sind so nebeneinander gelegt, dass sie, ohne sich gegenseitig metallisch zu berühren, zusammen einen Cylinder bilden, der mit der drehbaren Umwickelung rotirt, und an dem zwei Contactfedern schleifen, welche den Anfang und das Ende desjenigen Leitungstheiles bilden, der die Umwickelung des festen Electromagnets und die äussere Leitung umfasst. Durch

die Contactfedern wird die drehbare Umwickelung in jeder ihrer Lagen in zwei Hälften getheilt, welche zwei Zweige der Gesammtleitung bilden, sodass auch der die drehbare Umwickelung von der einen Contactfeder zur anderen durchfliessende electrische Strom sich in zwei Hälften theilt, welche von der einen Contactfeder auseinander gehen und in der anderen Contactfeder wieder zusammentreffen.

Der Eisenkern der drehbaren Umwickelung wird in doppelter Weise magnetisirt. Einerseits bildet er zwischen den Polen des festen Electromagnets einen die Polflächen zwar nicht berührenden, aber bis in ihre Nähe reichenden Anker, und erhält daher durch die Einwirkung des festen Electromagnets eine Magnetisirung der Art, dass jedem Pole des festen Electromagnets der entgegengesetzte Pol des Eisenkernes zugekehrt ist. Um das letztere kurz auszudrücken, können wir sagen, die Axe dieses im Eisenkerne hervorgerufenen Magnetismus habe die Gegenrichtung der Axe des festen Electromagnets. Andererseits wird der Eisenkern durch den die drehbare Umwickelung von der einen Contactfeder zur anderen durchfliessenden electrischen Strom magnetisirt. Die Contactfedern sind so angebracht, dass die Axe des durch diese Kraft hervorgerufenen Magnetismus auf der Axe des durch die erste Kraft hervorgerufenen angenähert senkrecht steht. Aus der Zusammensetzung beider Wirkungen resultirt ein Magnetismus, dessen Axe eine zwischen den beiden vorher genannten Richtungen liegende schräge Richtung hat. Wenn der Eisenkern sich dreht, so behalten seine Pole im Raume eine feste Lage, während sie im Eisenkerne ihre Lage stetig ändern.

Was nun die Inductionswirkung anbetrifft, welche in der drehbaren Umwickelung während der Rotation stattfindet, so ist diese eine dreifache. Erstens wirkt der feste Electromagnet inducirend auf die rotirende Umwickelung. Zweitens übt der magnetisch gemachte Eisenkern der drehbaren Umwickelung, dessen Pole ihre räumliche Lage beibehalten, während die Umwickelung rotirt, eine inducirende Wirkung auf die letztere aus. Endlich übt der in der Umwickelung selbst stattfindende Strom, welcher in den an den

Contactfedern vorübergehenden Abtheilungen seine Richtung ändert, einen wenigstens theilweise wirksam werdenden inducirenden Einfluss auf die Umwickelung aus.

§ 2. Gesetz der Induction.

Zur Feststellung des im Folgenden anzuwendenden Inductionsgesetzes müssen wir die Ströme und Leiter, um welche es sich handelt, etwas näher betrachten.

Die drehbare Umwickelung und die Umwickelung des festen Electromagnets bestehen aus vielen Windungen, und diese liegen einander so nahe, dass es für jede einzelne Windung und für jede zusammengefasste Gruppe von Windungen einen sehr geringen Unterschied macht, wenn man sich denkt, dass ihr Ende, anstatt mit dem Anfange der folgenden Windung oder der folgenden Gruppe, mit ihrem eigenen Anfange verbunden sei. Man kann daher die drehbare Umwickelung und die feste Leitung als Systeme geschlossener Leiter betrachten. Was ferner den Magnetismus der vorhandenen Eisenmassen anbetrifft, so kann man bekanntlich die electrodynamischen Wirkungen eines Magnets darauf zurückführen, dass man sich in seinem Inneren unzählige kleine, in sich geschlossene electrische Ströme vorstellt und deren Wirkungen betrachtet. Wir haben es also nur mit den Wirkungen geschlossener electrischer Ströme auf geschlossene Leiter zu thun, wodurch die Betrachtung sehr vereinfacht wird und zugleich an Sicherheit gewinnt, indem das für geschlossene Ströme und Leiter stattfindende Inductionsgesetz als vollkommen feststehend betrachtet werden kann, während über die von ungeschlossenen Stromtheilen auf ungeschlossene Leitertheile ausgeübten Wirkungen noch Meinungsverschiedenheiten obwalten.

Die Darstellung des Inductionsgesetzes wird besonders einfach durch Anwendung des electrodynamischen Potentials der wirksamen Ströme auf den von der Stromeinheit durchflossen gedachten Leiter. Sei irgend ein System geschlossener Ströme gegeben, welche in den Leitern s, s_1, s_2 etc. stattfinden und die Intensitäten i, i_1, i_2 etc. haben, und ferner ein geschlossener Leiter σ, welchen wir uns von der Strom-

einheit durchflossen denken. Verstehen wir dann unter ds ein Element irgend eines der Leiter s, s_1, s_2 etc., sowie unter $d\sigma$ ein Element des Leiters σ, und bezeichnen den Winkel zwischen den Richtungen der beiden Elemente mit $(s\sigma)$ und ihren gegenseitigen Abstand mit r, so wird das electrodynamische Potential W des gegebenen Stromsystemes auf den im Leiter σ gedachten Strom von der Intensität 1 bestimmt durch die Gleichung:

$$W = \int\int \frac{i \cos(s\sigma)}{r} \, ds \, d\sigma, \tag{1}$$

worin das eine Integral über die Reihe von Leitern s, s_1, s_2 etc. und das andere über den Leiter σ auszuführen ist.

In diesem Ausdrucke von W ist vorausgesetzt, dass die Stromintensitäten nach electrodynamischem oder electromagnetischem Maasse gemessen seien. Sollte man electrostatisches Maass anwenden wollen, so müsste man den Ausdruck noch mit K^2 dividiren, worin K die kritische Geschwindigkeit der Electricität bedeutet, welche angenähert gleich 30 Meridianquadranten ist.

Wenn nun irgend eine Bewegung der Leiter und zugleich eine Aenderung der Stromintensitäten i, i_1, i_2 etc. stattfindet, so wird die dabei in dem Leiter σ inducirte electromotorische Kraft e bestimmt durch die einfache Gleichung:

$$e = -\frac{dW}{dt}, \tag{2}$$

worin t die Zeit bedeutet.

§ 3. Anwendung der Gleichung auf die rotirende Umwickelung.

Indem wir die vorstehende Gleichung auf die electromotorische Kraft anwenden, welche in der rotirenden Umwickelung, infolge ihrer Bewegung, von den in der übrigen Leitung stattfindenden Strömen und von den Magneten inducirt wird, wählen wir irgend eine der Abtheilungen, in welche die Umwickelung getheilt ist, zur Betrachtung aus, welche den oben erwähnten Leiter σ repräsentiren soll.

Verfolgen wir diese Leiterabtheilung während eines ganzen Umlaufes, so haben wir es dabei mit einer solchen Reihe

von Lagenänderungen zu thun, durch welche die Leiterabtheilung schliesslich wieder in ihre Anfangslage kommt, sodass der Endwerth von W gleich seinem Anfangswerthe ist. Daraus würde, wenn die Richtung, nach welcher die electromotorische Kraft als positiv zu rechnen ist, in der Leiterabtheilung immer dieselbe bliebe, folgen, dass die in ihr während des Umlaufes inducirte electromotorische Kraft theils positiv, theils negativ, und im Mittel gleich Null wäre. In der Wirklichkeit ist die Sache aber anders. Die ganze drehbare Umwickelung wird, wie schon oben erwähnt, in jeder ihrer Lagen durch die beiden Contactfedern in zwei Hälften getheilt, welche Zweigleitungen zwischen den Contactfedern bilden. Die Richtung, in welcher die electromotorische Kraft als positiv zu rechnen ist, geht daher nicht in der ganzen Umwickelung in gleichem Sinne herum, sondern in den beiden Hälften in verschiedenem Sinne, welchen man erhält, wenn man sich denkt, dass man, von der einen Contactfeder ausgehend, durch beide Hälften zur anderen Contactfeder fortschreitet. Daraus folgt für jede einzelne Leiterabtheilung, dass die als positiv zu betrachtende Richtung in ihr nach jedem halben Umlaufe wechselt, nämlich immer in dem Momente, wo die Abtheilung beim Passiren einer Contactfeder aus der einen Hälfte der Umwickelung in die andere tritt. Dieses findet, wenn die Contactfedern richtig stehen, an denselben Stellen statt, wo die Richtung der inducirten electromotorischen Kraft sich ändert, sodass das Vorzeichen dieser electromotorischen Kraft ungeändert bleibt.

Da die inducirende Wirkung während der beiden Hälften des Umlaufes gleich ist, so ist es zur Bestimmung der mittleren electromotorischen Kraft genügend, nur einen halben Umlauf, nämlich die Bewegung der betreffenden Leiterabtheilung von der einen Contactfeder bis zur anderen, zu betrachten. Am Anfange dieses halben Umlaufes, zur Zeit t', möge W den Werth W' haben, und am Ende desselben, nämlich zur Zeit $t' + \frac{1}{2}\tau$, worin τ die Umlaufszeit bedeutet, möge W den Werth W'' haben, dann erhält man zur Bestimmung der mittleren electromotorischen Kraft aus (2) folgende Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{1}{\frac{1}{2}\tau}\int\limits_{t'}^{t'+\frac{1}{2}\tau} e\,dt = -\frac{1}{\frac{1}{2}\tau}\int\limits_{t'}^{t'+\frac{1}{2}\tau} \frac{dW}{dt}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{2}\tau}(W' - W'').$$

Aus diesem Ausdrucke, welcher sich nur auf eine Abtheilung der drehbaren Umwickelung bezieht, kann man leicht den entsprechenden Ausdruck für die gesammte drehbare Umwickelung erhalten, wenn man mit der dabei in Betracht kommenden Anzahl von Abtheilungen multiplicirt. Zur Bestimmung dieser Anzahl ist zu bemerken, dass die in den beiden Hälften der drehbaren Umwickelung inducirten electromotorischen Kräfte nicht zu einer Summe vereinigt werden dürfen, sondern nur einfach in Rechnung zu bringen sind, da die beiden Hälften in der gesammten Leitung nicht hinter einander liegen, sondern zwei neben einander laufende Zweigleitungen bilden. Wenn also die ganze Anzahl der Abtheilungen der drehbaren Umwickelung n ist, so hat man die auf eine Abtheilung bezügliche mittlere electromotorische Kraft nur mit $n/2$ zu multipliciren, um die auf die ganze drehbare Umwickelung bezügliche electromotorische Kraft zu erhalten. Bezeichnen wir also die letztere mit E_1, so kommt:

$$(4) \qquad E_1 = \frac{n}{\tau}(W' - W'').$$

Hierin wollen wir noch statt der Umlaufzeit τ die Anzahl der Umläufe in der Zeiteinheit, welche man kurz die Tourenzahl zu nennen pflegt, einführen. Wird diese mit v bezeichnet, so ist offenbar:

$$(5) \qquad v = \frac{1}{\tau},$$

und dadurch geht (4) über in:

$$(6) \qquad E_1 = n(W' - W')v.$$

§ 4. Rückwirkung des bewegten Leiters auf den festen.

Im vorigen Paragraphen war nur von derjenigen electromotorischen Kraft die Rede, welche der in der festen Leitung stattfindende Strom und der Magnetismus der Eisenmassen in dem bewegten Leiter inducirt. Es fragt sich nun

weiter, ob auch der im bewegten Leiter stattfindende Strom in der festen Leitung eine electromotorische Kraft inducirt.

Wir wählen wieder eine einzelne Abtheilung des bewegten Leiters, nämlich der drehbaren Umwickelung, zur Betrachtung aus, welche, wie oben, mit σ bezeichnet werden möge. Der durchfliessende Strom werde mit j bezeichnet, wobei zu beachten ist, dass derselbe während jedes ganzen Umlaufes von σ zweimal seine Richtung ändert. Die feste Leitung s denken wir uns jetzt von der Stromeinheit durchflossen und bilden unter diesen Umständen das electrodynamische Potential von σ auf s, welches Ω heissen soll, und durch einen Ausdruck von derselben Form, wie der in (1) gegebene, dargestellt wird, nämlich:

$$\Omega = \int\int j \frac{\cos(s\sigma)}{r} ds\, d\sigma .$$

Mit Hülfe dieser Grösse können wir die zur Zeit t in der festen Leitung inducirte electromotorische Kraft ε durch folgende, der Gleichung (2) entsprechende Gleichung:

$$\varepsilon = -\frac{d\Omega}{dt}$$

bestimmen.

Um hieraus die mittlere electromotorische Kraft abzuleiten, haben wir wieder eine Integration nach der Zeit auszuführen und das Integral durch die Zeit zu dividiren. Da der positive Sinn der electromotorischen Kraft sich in der festen Leitung nicht ändert, so können wir in diesem Falle die Integration über eine ganze Umlaufszeit τ, also von irgend einer Anfangszeit t' bis zur Zeit $t' + \tau$ ausdehnen und erhalten die Gleichung:

$$\frac{1}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} \varepsilon\, dt = -\frac{1}{\tau}\int_{t'}^{t'+\tau} \frac{d\Omega}{dt} dt = \frac{1}{\tau}(\Omega' - \Omega'');$$

worin Ω' den Anfangswerth und Ω'' den nach einem ganzen Umlaufe stattfindenden Endwerth von Ω darstellt. Nun ist aber nach einem ganzen Umlaufe sowohl die Lage der Leiterabtheilung, als auch die Richtung des Stromes, welche während der Zeit zweimal gewechselt hat, wieder dieselbe,

wie zu Anfang, woraus folgt, dass Ω'' gleich Ω', und somit der vorstehende Ausdruck gleich Null ist. Dasselbe gilt für alle bewegten Leiterabtheilungen, und wir gelangen daher zu dem Resultate, dass in der festen Leitung keine electromotorische Kraft inducirt wird. Es heben sich nämlich die durch die Bewegung und die durch die Stromumkehrungen inducirten electromotorischen Kräfte gegenseitig auf.

§ 5. Inducirende Einwirkung des durchströmten bewegten Leiters auf sich selbst.

Es bleibt noch übrig, die inducirende Wirkung zu betrachten, welche der in dem bewegten Leiter stattfindende Strom auf den bewegten Leiter selbst ausübt.

In dieser Beziehung ist zunächst zu bemerken, dass der betreffende Leiter, nämlich die drehbare Umwickelung, sich nur im ganzen bewegt, sodass je zwei Theile desselben ihre relative Lage unverändert beibehalten. Daraus folgt, dass die Bewegung keine gegenseitige Induction veranlassen kann.

Es braucht also nur die Stromänderung, nämlich die in jeder Leiterabtheilung während eines Umlaufes zweimal stattfindende Stromumkehrung in Betracht gezogen zu werden, um festzustellen, ob von dieser eine wirksame Induction herrühren kann. Dieser Gegenstand ist schon von Maxwell[1]) und von Joubert[2]) besprochen, und ich kann mich den Auseinandersetzungen dieser Autoren, wenn auch nicht in Bezug auf die specielle Ausführung der Rechnung, so doch in Bezug auf das angewandte Princip anschliessen.

Die Stromumkehrung findet beim Vorübergange der betreffenden Leiterabtheilung an einer Contactfeder in folgender Weise statt. Bis zu einem gewissen Momente gehört die Leiterabtheilung der einen Hälfte der drehbaren Umwickelung an. Dann tritt eine kurze Zeit ein, während welcher beide Enden der Leiterabtheilung mit der Contactfeder in Berührung sind, und dadurch die Leiterabtheilung in sich

---

1) Maxwell, Phil. Mag. (4) 33. p. 474. 1867.

2) Joubert, Compt. rend. 96. p. 641. 1883.

geschlossen ist. Nach Ablauf dieser Zeit gehört die Leiterabtheilung der anderen Hälfte der drehbaren Umwickelung an. Wegen jenes Umstandes, dass die Leiterabtheilung während einer wenn auch kurzen Zwischenzeit in sich geschlossen ist, darf man nicht annehmen, dass sie in die zweite Hälfte der drehbaren Umwickelung mit demselben Strome eintrete, den sie in der ersten Hälfte hatte, und dass also die ganze Stromumkehrung in der zweiten Hälfte stattfinde, sondern muss berücksichtigen, dass ein Theil der Stromänderung während der Zwischenzeit und nur der übrige Theil nach dem Eintritte in die zweite Hälfte vor sich geht.

Jede dieser beiden nacheinander stattfindenden Stromänderungen hat eine doppelte Induction zur Folge, erstens die Induction auf die betrachtete Leiterabtheilung selbst. welche wir kurz die Selbstinduction nennen wollen, und zweitens die Induction auf die übrigen Abtheilungen der drehbaren Umwickelung.

Es möge zunächst der in der Zwischenzeit stattfindende Theil der Stromänderung betrachtet werden. Die während dieser Zeit eintretende Selbstinduction braucht nicht berücksichtigt zu werden, weil die Leiterabtheilung während dieser Zeit in sich geschlossen ist, und daher nicht zu der Gesammtleitung gehört, für welche wir die inducirte electromotorische Kraft zu bestimmen haben. Was ferner die Induction auf die übrigen Theile der drehbaren Umwickelung anbetrifft, so ist zu bemerken, dass diese Theile zu beiden Seiten der betrachteten Leiterabtheilung symmetrisch liegen, sodass an beiden Seiten gleich grosse electromotorische Kräfte inducirt werden. Da nun aber in den zu beiden Seiten liegenden Hälften der drehbaren Umwickelung die positive Richtung verschieden ist, so haben die beiden in ihnen inducirten electromotorischen Kräfte entgegengesetzte Vorzeichen und heben sich daher für die Gesammtleitung gegenseitig auf. Der während der Zwischenzeit stattfindende Theil der Stromänderung hat also keine für die Gesammtleitung wirksame Induction von electromotorischer Kraft zur Folge.

Wir müssen nun denjenigen Theil der Stromänderung betrachten, welcher nach dem Eintritte unserer Leiterabthei-

lung in die zweite Hälfte der drehbaren Umwickelung vor sich geht.

Die durch diese Stromänderung verursachte Selbstinduction muss in Rechnung gebracht werden, weil jetzt unsere Leiterabtheilung zur Gesammtleitung gehört. Auch mit der Induction auf die übrigen Theile der drehbaren Umwickelung verhält es sich jetzt anders, als vorher. Die aus diesen Theilen gebildeten, zu beiden Seiten liegenden Hälften verhalten sich jetzt untereinander nicht ganz gleich, denn an der einen Seite grenzt an unsere Leiterabtheilung eine solche Leiterabtheilung, die gerade durch die Contactfeder in sich geschlossen ist und daher nicht zur Gesammtleitung gehört, während an der anderen Seite eine Leiterabtheilung angrenzt, welche zur Gesammtleitung gehört. In diesem Falle heben sich daher die an beiden Seiten inducirten electromotorischen Kräfte für die Gesammtleitung nicht vollständig auf, sondern es bleibt ein Ueberschuss der an der zuletzt genannten Seite inducirten electromotorischen Kraft, welcher ebenso, wie die durch Selbstinduction entstehende electromotorische Kraft, der Stromrichtung entgegengesetzt ist.

Zur Bestimmung dieses Ueberschusses müssen wir das electrodynamische Potential der betrachteten Leiterabtheilung auf eine Nebenabtheilung bilden, indem wir uns die erstere von dem wirklich stattfindenden Strome und die letztere von der Stromeinheit durchflossen denken, und zur Bestimmung der durch Selbstinduction entstehenden electromotorischen Kraft müssen wir das electrodynamische Potential der betrachteten Leiterabtheilung auf sich selbst bilden, indem wir uns dieselbe einmal von dem wirklich stattfindenden Strome und einmal von der Stromeinheit durchflossen denken. Aus der durch die Aenderung der Stromintensität bedingten Aenderung dieser Potentiale ergibt sich die inducirte electromotorische Kraft. Wir dürfen aber dabei nicht die ganze Stromumkehrung in Rechnung bringen, sondern nur den Theil der Stromänderung, welcher nach dem Eintritte unserer Leiterabtheilung in die zweite Hälfte der drehbaren Umwickelung stattfindet. Wie gross dieser Theil ist, lässt sich nicht allgemein angeben, weil dieses von der Con-

structionsart der Maschine und der Stellung der Contactfedern abhängt. Wir wollen uns daher mit der Aufstellung eines einen unbestimmten Factor enthaltenden Ausdruckes und der Hinzufügung einer erläuternden Bemerkung begnügen.

Jedenfalls ist die ganze durch die inducirende Einwirkung des durchströmten bewegten Leiters auf sich selbst entstehende electromotorische Kraft, welche E_2 heissen möge, der Stromintensität, welche in beiden Hälften zusammen gleich i ist, proportional. Ferner muss sie der Tourenzahl v proportional sein, weil von dieser die Anzahl der Stromwechsel abhängt. Wir können daher, wenn wir zugleich berücksichtigen, dass die electromotorische Kraft negativ ist, setzen:

$$E_2 = -\varrho i v, \tag{7}$$

worin ϱ jener unbestimmte Factor ist.

Dieser Factor hat eine bemerkenswerthe Eigenschaft, durch welche ein eigenthümlicher Unterschied zwischen der Grösse E_2 und der früher bestimmten Grösse E_1 bedingt ist. Wir wollen uns vorstellen, die Anzahl n der Abtheilungen, in welche die drehbare Umwickelung getheilt ist, werde geändert, wobei natürlich die Länge der einzelnen Abtheilungen sich ebenfalls, und zwar im umgekehrten Verhältnisse ändert, und wollen uns die Frage stellen, welchen Einfluss das auf die Grössen E_1 und E_2 hat.

Bei der Bestimmung von E_1 haben wir es mit dem Potential des festen Stromes und der Magnete auf eine Abtheilung der drehbaren Umwickelung zu thun. Dieses Potential ist der Länge der Abtheilung und somit dem Bruche $1/n$ angenähert proportional, und da im Laufe der Rechnung noch eine Multiplication mit n vorkommt, so gelangen wir für E_1 zu einem Ausdrucke, welcher von n fast unabhängig ist.

Bei der Bestimmung der Grösse E_2 dagegen haben wir es mit dem Potential einer Abtheilung auf sich selbst und dem Potential einer Abtheilung auf eine andere zu thun. Diese beiden Potentiale sind, mit Ausnahme eines im ersteren vorkommenden Gliedes, welches von der Länge unabhängig ist, dem Q u a d r a t e der Länge einer Abtheilung und

somit dem Bruche $1/n^2$ angenähert proportional, und da auch hier zur Bestimmung der Gesammtwirkung noch eine Multiplication mit n erforderlich ist, so muss daraus ein Werth von E_2 hervorgehen, welcher dem Bruche $1/n$ angenähert proportional ist.

Zwischen den Grössen E_1 und E_2 besteht also der Unterschied, dass durch eine Veränderung der Anzahl n der Abtheilungen, in welche die drehbare Umwickelung getheilt ist, die erstere nur wenig, die letztere dagegen stark beeinflusst wird, und zwar so, dass E_2 mit wachsendem n abnimmt. Da nun E_2 negativ ist und somit einen Verlust an electromotorischer Kraft darstellt, so ist es vortheilhaft, die Anzahl n möglichst gross zu machen.

Nachdem für die in der Gesammtleitung wirksamen electromotorischen Kräfte E_1 und E_2 in den Gleichungen (6) und (7) Ausdrücke gegeben sind, können wir durch Addition derselben einen Ausdruck für die ganze electromotorische Kraft E bilden und erhalten dadurch die Gleichung:

$$(8) \qquad E = n(W' - W'')v - \varrho i v.$$

§ 6. Arbeit, welche von der electromotorischen und von der ponderomotorischen Kraft geleistet wird.

Um die Arbeit auszudrücken, welche während der Zeiteinheit von der vorstehend bestimmten electromotorischen Kraft E geleistet wird, haben wir die letztere mit der Intensität des Stromes, welcher durch beide Hälften der drehbaren Umwickelung zusammen fliesst, also mit i zu multipliciren. Wenden wir dann für E den vorstehenden Ausdruck an, so erhalten wir:

$$(9) \qquad Ei = n(W' - W'')iv - \varrho i^2 v.$$

Diese Arbeit können wir mit einer anderen Arbeitsgrösse vergleichen. Die durchströmte Umwickelung erleidet nämlich von dem übrigen Stromsysteme, wozu auch die Magnete gehören, eine ponderomotorische Kraft, deren Arbeit wir ebenfalls bestimmen wollen.

Betrachten wir von der drehbaren Umwickelung, welche in jeder ihrer Hälften von dem Strome $i/2$ durchflossen ist,

eine einzelne Abtheilung, so wird die Arbeit der von dieser erlittenen ponderomotorischen Kraft während der Zeit dt, unter der Voraussetzung, dass das die Kraft ausübende Stromsystem seine Lage nicht ändert, und alle Stromintensitäten constant sind, durch:

$$\frac{i}{2}\frac{dW}{dt}dt$$

dargestellt. Hieraus ergibt sich für die Zeit eines halben Umlaufes die Arbeit:

$$\frac{i}{2}(W'' - W'),$$

und da die Zeitdauer eines halben Umlaufes gleich $\tau/2$ ist, so erhält man für die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit den Ausdruck:

$$\frac{i}{\tau}(W'' - W'),$$

oder, was dasselbe ist:

$$i(W'' - W')v.$$

Da nun n solche Leiterabtheilungen vorhanden sind, so wird die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit T der ganzen von der drehbaren Umwickelung erlittenen ponderomotorischen Kraft bestimmt durch die Gleichung:

$$(10) \qquad T = n(W'' - W')iv.$$

Vergleicht man diese Arbeit mit der in (9) ausgedrückten Arbeit der electromotorischen Kraft, so sieht man, dass sie sich von der letzteren nur durch das Vorzeichen und durch das Glied $-\varrho i^2 v$ unterscheidet, welches die Arbeit derjenigen electromotorischen Kraft darstellt, die in der drehbaren Umwickelung von dem in ihr selbst stattfindenden Strome inducirt wird. Man kann also schreiben:

$$(11) \qquad Ei = -T - \varrho i^2 v.$$

§ 7. Bestimmung des Magnetismus der in der dynamoelectrischen Maschine vorkommenden Electromagnete.

Um nun den vorstehenden theoretischen Resultaten bestimmtere, für die weiteren Rechnungen geeignete Formen geben zu können, müssen wir für die Stärke der in der dyna-

moelectrischen Maschine vorkommenden Electromagnete Ausdrücke bilden.

Zunächst haben wir den festen Electromagnet zu betrachten. Das magnetische Moment desselben, von welchem die Kraft abhängt, die er in dem zwischen seinen Polflächen liegenden Raume ausübt, ist nicht der Intensität des seine Umwickelung durchfliessenden Stromes proportional, sondern folgt einem anderen Gesetze. Bei geringer Stromintensität nimmt es angenähert im Verhältnisse der Stromintensität zu; bei grösser werdender Stromintensität aber wächst es langsamer, und bei sehr grosser Stromintensität nähert es sich einem Grenzwerthe. Dieses Verhalten wird von Frölich[1]) durch eine Gleichung ausgedrückt, welche mit unwesentlichen Aenderungen in der Bezeichnung folgendermaassen lautet:

$$(12)\qquad M = \frac{Ai}{1 + ai},$$

worin M das magnetische Moment bedeutet, und A und a Constante sind. Ich glaube nun freilich nicht, dass hierdurch das Verhalten des magnetischen Momentes in der besten Weise dargestellt wird, aber für den vorliegenden Zweck, wo wegen der vielen mitwirkenden Umstände, die sich einer genauen Bestimmung entziehen, doch nur angenähert richtige Resultate gewonnen werden können, scheint es mir zulässig, diese durch ihre Einfachheit ausgezeichnete Gleichung in Anwendung zu bringen.

Bei sehr kleiner Stromintensität kommt der im Eisen des Electromagnets von der früheren Magnetisirung her noch vorhandene remanente Magnetismus in Betracht. Dieser ist freilich für solche Rechnungen, welche sich auf die im vollen Gange befindliche Maschine beziehen, ohne Belang; aber für die erste Entstehung des Stromes beim Angehen der Maschine ist er ein wesentliches Erforderniss, und aus diesem Grunde werden wir später noch einmal auf ihn zurückkommen müssen. Vorläufig jedoch können wir von ihm absehen und einfach die Gleichung (12) beibehalten.

1) Frölich, Electrotechn. Zeitschr. des Berl. Electrotechn. Vereins. 2. p. 139. 1881.

Wir müssen nun weiter den Magnetismus des Eisenkernes der drehbaren Umwickelung betrachten. Dieser Magnetismus ist für die Bestimmung complicirter, weil er, wie schon in § 1 erwähnt wurde, durch zwei magnetische Kräfte entsteht, welche vom festen Electromagnet und von dem die drehbare Umwickelung durchfliessenden Strome ausgeübt werden.

Die erste Kraft ist dem magnetischen Momente M des festen Electromagnets proportional, und sie würde, wenn sie allein wirkte, in dem Eisenkerne ein magnetisches Moment hervorrufen, welches wir, ganz dem entsprechend, wie wir das durch den Strom i entstandene magnetische Moment des festen Electromagnets ausgedrückt haben, durch den Ausdruck:

$$\frac{CM}{1+\gamma M}$$

darstellen können, worin C und γ Constante bedeuten. Die zweite Kraft, deren Richtung auf der ersten senkrecht ist, würde, wenn sie allein wirkte, ein magnetisches Moment hervorrufen, welches sich ebenfalls durch einen Ausdruck von der Form des vorigen darstellen lassen muss, wenn man darin an die Stelle von M eine andere Grösse setzt, welche zu der von der durchströmten Umwickelung auf den Eisenkern ausgeübten magnetisirenden Kraft in derselben Beziehung steht, wie das magnetische Moment M zu der von dem festen Electromagnet auf den Eisenkern ausgeübten magnetisirenden Kraft. Wir wollen diese Grösse mit N bezeichnen und sie dadurch definiren, dass wir das magnetische Moment, welches die durchströmte drehbare Umwickelung für sich allein in dem Eisenkerne hervorrufen würde, durch die Formel:

$$\frac{CN}{1+\gamma N}$$

darstellen. Die so definirte Grösse N muss offenbar der in der drehbaren Umwickelung stattfindenden Stromintensität, welche in beiden Hälften zusammen gleich i ist, proportional sein, sodass man setzen kann:

(13) $$N = Bi,$$

worin B für jede Maschine constanst ist.

Wenn nun jene beiden magnetisirenden Kräfte gleichzeitig auf den Eisenkern wirken, so muss in ihm ein verstärkter Magnetismus hervorgerufen werden. Um das magnetische Moment P dieses Magnetismus auszudrücken, hat man zunächst aus M und N die Resultante zu bilden, welche durch $\sqrt{M^2 + N^2}$ dargestellt wird. Diese Grösse würde man, wenn man den neuen Ausdruck den obigen Ausdrücken ganz analog bilden wollte, sowohl im Zähler, als auch im Nenner des Bruches statt der Grösse M oder N in Anwendung bringen müssen, wodurch man erhalten würde:

$$P = \frac{C\sqrt{M^2 + N^2}}{1 + \gamma\sqrt{M^2 + N^2}}.$$

Nun ist aber schon oben bemerkt, dass der Ausdruck, durch welchen wir nach dem Vorgange von Frölich die Abhängigkeit des hervorgebrachten magnetischen Momentes von der wirksamen magnetisirenden Kraft dargestellt haben, nur als angenähert richtig zu betrachten ist, und dieses gilt insbesondere von der Form des Nenners. Da nun das Vorkommen der Wurzelgrösse $\sqrt{M^2 + N^2}$ im Nenner den Ausdruck für die Rechnung unbequem machen würde, so wird es gestattet sein, den Nenner etwas zu vereinfachen. Von den beiden magnetisirenden Kräften wird die eine unmittelbar von dem Strome ausgeübt und ist daher der Stromstärke i einfach proportional. Auch die andere wird, wenn auch nicht unmittelbar, so doch mittelbar vom Strome ausgeübt, indem dieser den Magnetismus des festen Electromagnets hervorruft, der seinerseits dann die betreffende Kraft ausübt. Es wird daher den Grad der Genauigkeit des Ausdruckes nicht erheblich vermindern, wenn man statt jener die Kraft darstellende Wurzelgrösse eine der Stromstärke i proportionale Grösse in den Nenner des Bruches einführt und diesem dadurch dieselbe Form gibt, wie dem Nenner des in Gleichung (12) vorkommenden Bruches. Dann lautet die zur Bestimmung von P dienende Gleichung:

$$P = \frac{C\sqrt{M^2 + N^2}}{1 + \beta i}, \tag{14}$$

worin β eine neue für jede Maschine besonders zu bestimmende Constante ist.

Die Axe dieses magnetischen Moments P hat dieselbe Richtung, wie die Resultante aus den von dem festen Electromagnet und von der durchströmten Umwickelung ausgeübten magnetisirenden Kräften. Bezeichnen wir daher die Winkel dieser Axe mit den beiden auf einander senkrechten Kraftrichtungen, deren erstere die Gegenrichtung der Axe des festen Electromagnets ist, mit φ und $\pi/2 - \varphi$, so haben wir zur Bestimmung von φ die Gleichungen:

$$\cos\varphi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}; \qquad \sin\varphi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}. \tag{15}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir das magnetische Moment P in zwei auf jene beiden Kraftrichtungen bezügliche Componenten zerlegen, deren Einführung für die folgenden Betrachtungen bequem ist. Wir erhalten nämlich zur Bestimmung dieser Componenten, welche mit P_1 und P_2 bezeichnet werden mögen, folgende Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} P_1 &= P\cos\varphi = \frac{CM}{1 + \beta i}, \\ P_2 &= P\sin\varphi = \frac{CN}{1 + \beta i}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

§ 8. Arbeit der ponderomotorischen und electromotorischen Kraft für den Fall, dass der Eisenkern der drehbaren Umwickelung ruht.

Nachdem die in Betracht kommenden magnetischen Momente ausgedrückt sind, können wir die beim Gange der Maschine von der ponderomotorischen Kraft geleistete Arbeit bestimmen.

Wir wollen dabei vorläufig eine Annahme machen, die zwar bei den Maschinen von gewöhnlicher Construction nicht erfüllt ist, deren Ergebnisse sich aber leicht auf diese Maschinen übertragen lassen, und die geeignet ist, die Untersuchung zu erleichtern. Wir wollen nämlich annehmen, dass

der Eisenkern der drehbaren Umwickelung die Rotation der letzteren nicht mitmache, sondern fest sei, und dass somit die drehbare Umwickelung für sich allein rotire, wobei sie einer doppelten Kraft unterworfen sei, der Kraft des von aussen wirkenden festen Electromagnets und der Kraft des von innen wirkenden magnetischen Eisenkernes.[1])

Die ponderomotorische Kraft, welche der feste Electromagnet auf die durchströmte rotirende Umwickelung ausübt, ist einerseits proportional dem magnetischen Momente M des festen Electromagnets, und andererseits muss sie proportional dem magnetischen Momente der durchströmten Umwickelung und somit auch proportional der oben eingeführten Grösse N sein. Wir können daher die von dieser Kraft während der Zeiteinheit geleistete Arbeit, welche ausserdem noch proportional der Tourenzahl v sein muss, durch das Product aus der Grösse MNv und einem noch hinzuzufügenden constanten Factor darstellen. Da nun aber bei derjenigen Drehungsrichtung, welche man der Maschine geben muss, wenn sie zur Stromerzeugung dienen soll, und welche wir als die positive Drehungsrichtung annehmen wollen, die Arbeit der ponderomotorischen Kraft negativ ist, indem die ponderomotorische Kraft einer solchen Drehung entgegenwirkt und durch eine fremde Kraft überwunden werden muss, so ist es zweckmässig, dieses äusserlich dadurch anzudeuten, dass man den constanten Factor mit dem Minuszeichen versieht, und er möge daher durch $-h$ bezeichnet werden. Dann lautet der zur Bestimmung dieser Arbeit dienende Ausdruck:

$$-hMNv.$$

Die andere ponderomotorische Kraft, welche die dreh-

1) Streng genommen müssten in Bezug auf den festen Electromagnet noch zwei besonders zu betrachtende Kräfte unterschieden werden, nämlich erstens die von der magnetischen Eisenmasse des festen Electromagnets ausgeübte Kraft und zweitens die von dem die Umwickelung des festen Electromagnets durchfliessenden Strome unmittelbar ausgeübte Kraft. Da aber bei den bis jetzt construirten dynamoelectrischen Maschinen die letztere Kraft gegen die erstere sehr klein ist, so wollen wir von dieser Unterscheidung absehen und nur die Gesammtkraft des festen Electromagnets betrachten.

bare Umwickelung von dem in ihr befindlichen magnetischen Eisenkerne erleidet, ist zunächst ebenso, wie die vorige, der Grösse N proportional. Ferner hängt sie von dem magnetischen Momente des Eisenkernes ab. Von diesem magnetischen Momente müssen wir aber die beiden am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Componenten unterscheiden. Die Componente P_2, welche ein magnetisches Moment darstellt, dessen Axe mit der Axe von N zusammenfällt, gibt kein auf die drehbare Umwickelung wirkendes Drehungsmoment. Die Componente P_1 dagegen, welche ein magnetisches Moment darstellt, dessen Axe auf der Axe von N senkrecht ist, gibt ein Drehungsmoment, welches der Grösse von P_1 proportional ist. Wir können daher die bei der Drehung geleistete Arbeit dieser ponderomotorischen Kraft, welche ebenso, wie die vorige Arbeit, noch der Tourenzahl v proportional und für eine positive Drehung negativ ist, durch:

$$-kNP_1v$$

darstellen, worin k eine neue Constante bezeichnen soll.

Durch Addition der beiden die einzelnen Arbeitsgrössen darstellenden Ausdrücke erhalten wir den Ausdruck für die ganze von der ponderomotorischen Kraft während der Zeiteinheit geleisteten Arbeit T, nämlich:

$$T = -hMNv - kNP_1v. \tag{17}$$

Aus dieser Arbeit der ponderomotorischen Kraft lässt sich ferner mit Hülfe der Gleichung (11) sofort auch die Arbeit der electromotorischen Kraft ableiten, nämlich:

$$Ei = hMNv + kNP_1v - \varrho i^2 v. \tag{18}$$

Setzt man in diesen Gleichungen für P_1 seinen am Schlusse des vorigen Paraphen gegebenen Werth, so erhält man:

$$T = -MN\left(h + \frac{kC}{1+\beta i}\right)v, \tag{19}$$

$$Ei = MN\left(h + \frac{kC}{1+\beta i}\right)v - \varrho i^2 v. \tag{20}$$

§ 9. Arbeit der ponderomotorischen und electromotorischen Kraft für den Fall, dass der Eisenkern an der Rotation der Umwickelung theilnimmt.

Bei den vorigen Bestimmungen wurde vorausgesetzt, dass der Eisenkern der drehbaren Umwickelung ruhe, und nur die Umwickelung für sich rotire. Bei den wirklich in Anwendung befindlichen Maschinen dagegen ist der Regel nach der Eisenkern mit der Umwickelung fest verbunden und rotirt mit ihr gemeinsam. Es fragt sich nun, ob und inwiefern dadurch eine Aenderung in den Wirkungen eintritt.

Wenn der Eisenkern rotirt, so ändern die Pole des in ihm hervorgerufenen Magnetismus *in dem Eisen selbst* stetig ihre Lage, *räumlich* aber behalten sie ihre Lage bei. Aus dem letzteren Umstande folgt, dass die einzelnen Windungen der Umwickelung, obwohl sie bei der gemeinsamen Bewegung ihre Lage *relativ zu den einzelnen Eisentheilen* unverändert beibehalten, doch ihre Lage *relativ zu den Polen* stetig ändern.

Bei langsamer Drehung kann man annehmen, dass die Pole des Eisenkernes dieselbe räumliche Lage und dieselbe Stärke haben, wie in einem ruhenden Eisenkerne. Bei schneller Drehung findet dieses freilich nicht mehr statt, sondern es treten Abweichungen in Bezug auf die Lage und Stärke der Pole ein; indessen wollen wir diese Abweichungen vorläufig vernachlässigen, indem wir uns vorbehalten, sie nachträglich, zugleich mit einer anderen bei schneller Drehung eintretenden Nebenwirkung zu berücksichtigen. Wir wollen also für jetzt voraussetzen, *dass in dem rotirenden Eisenkerne die Pole dieselbe räumliche Lage und dieselbe Stärke haben, wie in einem ruhenden Eisenkerne.*

Was nun zunächst die inducirte *electromotorische* Kraft anbetrifft, so hat diese ihren Grund nur darin, dass die Windungen der drehbaren Umwickelung ihre Lage *relativ zu den Polen* ändern, und sie muss somit unter der gemachten Voraussetzung über die unveränderte räumliche Lage und Stärke der Pole, ebenfalls unverändert bleiben.

Wir können daher zur Bestimmung der von der electromotorischen Kraft geleisteten Arbeit die oben für den Fall eines ruhenden Eisenkernes abgeleiteten Gleichungen (18) und (20) auch auf den Fall anwenden, wo der Eisenkern mit der Umwickelung zusammen rotirt.

Bei der von der ponderomotorischen Kraft geleisteten Arbeit dagegen ist die Sachlage nicht ganz so einfach, indem je nach der verschiedenen Art der Bewegung auch verschiedene Kräfte in der Weise in Wirksamkeit treten, dass sie eine mechanische Arbeit leisten. Die Kraft, welche der magnetische Eisenkern auf die durchströmte drehbare Umwickelung ausübt, und welche in dem Falle, wo nur die Umwickelung sich bewegt, die frühere von uns bestimmte Arbeit leistet, wird in dem Falle, wo der Eisenkern mit der Umwickelung ein fest verbundenes System bildet, welches sich nur im ganzen bewegen kann, von der gleich grossen aber entgegengesetzten Kraft, welche die durchströmte Umwickelung auf den magnetischen Eisenkern ausübt, in ihrer Wirkung aufgehoben. Eine andere Kraft dagegen, nämlich die von dem festen Electromagnet auf jenen magnetischen Eisenkern ausgeübte Kraft, welche in dem Falle, wo der Eisenkern unbeweglich war, keine Arbeit leisten konnte, wird in dem Falle, wo der Eisenkern rotirt, derartig wirksam, dass sie eine Arbeit leistet. Es kommt also nun darauf an, diese letztere Arbeit mit jener früher von uns bestimmten Arbeit der Grösse nach zu vergleichen.

Das kann durch eine einfache Betrachtung geschehen. Wir wollen uns dazu vorübergehend vorstellen, es sei nur der Eisenkern drehbar, während die Umwickelung ebenso wie der feste Electromagnet in unveränderlicher Lage erhalten werde. Wenn nun der Eisenkern durch die gemeinsame Wirkung des festen Electromagnets und der durchströmten Umwickelung magnetisch gemacht ist, so erleidet er von diesen beiden auch bewegende Kräfte, geräth aber dadurch nicht in Bewegung, wie man sofort aus dem Umstande schliessen kann, dass er die Gestalt eines Rotationskörpers hat, dessen Axe mit der Axe, um welche er drehbar ist, zusammenfällt. Wenn aber die beiden bewegenden

Kräfte den Eisenkern nicht in Bewegung setzen, so folgt daraus, dass sie gleiche und entgegengesetzte Drehungsmomente haben. Das von dem festen Electromagnet auf den Eisenkern ausgeübte Drehungsmoment ist also dem von der Umwickelung auf den Eisenkern ausgeübten Drehungsmomente gleich und entgegengesetzt. Da nun das letztere wiederum dem von dem Eisenkerne auf die Umwickelung ausgeübten Dehungsmomente gleich und entgegengesetzt ist, so folgt weiter, dass das von dem festen Electromagnet auf den Eisenkern ausgeübte Drehungsmoment dem von dem Eisenkern auf die Umwickelung ausgeübten Drehungsmomente gleich und gleichgerichtet ist.

Demnach hat auch die Arbeit, welche in dem Falle, wo der Eisenkern mit rotirt, die vom festen Electromagnet auf den Eisenkern ausgeübte Kraft leistet, denselben Werth, wie die früher von uns bestimmte Arbeit, welche in dem Falle, wo der Eisenkern ruht, die von ihm auf die Umwickelung ausgeübte Kraft leistet.

Bei der mathematischen Darstellung dieser beiden Arbeitsgrössen gelangt man freilich zunächst zu Ausdrücken, welche scheinbar verschieden sind. Die letztere Arbeitsgrösse muss nämlich, wie im vorigen Paragraphen gesagt, den Grössen N und P_1 proportional sein, und wir haben sie dort durch:

$$-kNP_1v$$

dargestellt, worin k eine unbestimmte Constante ist. Die erstere dagegen muss den Grössen M und P_2 proportional sein und kann daher in entsprechender Weise durch:

$$-k'MP_2v$$

dargestellt werden, worin k' vorläufig als zweite unbestimmte Constante angesehen werden kann. Diese Ausdrücke weichen äusserlich sehr voneinander ab; wenn man aber in ihnen für P_1 und P_2 ihre in (16) gegebenen Ausdrücke setzt, so gehen sie über in:

$$-k\frac{CMN}{1+\beta i}v \quad \text{und} \quad -k'\frac{CMN}{1+\beta i}v,$$

und hieraus sieht man, dass man nur nöthig hat, die Constante k', welche vorher als zweite unbestimmte Constante eingeführt wurde, der Constanten k gleich zu setzen, um die beiden Ausdrücke, welche der vorigen Betrachtung nach gleiche Grössen darstellen, in Uebereinstimmung zu bringen.

Nachdem für den Theil der Arbeit der ponderomotorischen Kraft, bei dessen Bestimmung der Umstand, ob der Eisenkern mit rotirt oder nicht, überhaupt in Betracht kommen kann, die Gleichheit nachgewiesen ist, folgt sofort auch, dass die ganze von der ponderomotorischen Kraft geleistete Arbeit in beiden Fällen gleich ist, und wir können daher, unter der gemachten Voraussetzung in Bezug auf die Lage und Stärke der Pole, die für den Fall, wo der Eisenkern ruht, zur Bestimmung von T abgeleitete Gleichung (19) auch auf den Fall anwenden, wo der Eisenkern mit rotirt.

§ 10. Modificationen, welche die vorstehenden Resultate bei schneller Rotation erleiden.

Im Vorigen wurde vorausgesetzt, dass der durch die gemeinsame Wirkung des festen Electromagnets und der durchströmten Umwickelung hervorgerufene Magnetismus im rotirenden Eisenkerne derselbe sei, wie im ruhenden. Bei langsamer Rotation findet dieses auch mit hinlänglicher Annäherung statt; bei schneller Rotation aber wird durch die Trägheit, welche das Eisen in Bezug auf Aenderungen seines magnetischen Zustandes hat, bewirkt, dass die Pole im rotirenden Eisenkerne eine etwas andere räumliche Lage und eine etwas andere Stärke haben, wie im ruhenden. Dieser Umstand ist bisher, soviel ich weiss, bei den dynamoelectrischen Maschinen noch nicht in Rechnung gebracht.

Was zunächst die Lage der Pole, also die Richtung der magnetischen Axe anbetrifft, so ist in § 7 der Winkel φ, welchen die magnetische Axe des ruhenden Eisenkernes mit der Gegenrichtung der Axe des festen Electromagnets bildet, durch die Gleichungen (15) bestimmt. Wenn nun der Eisenkern schnell rotirt, so kann man annehmen, dass seine magnetische Axe dadurch im Sinne der Drehung um einen kleinen Winkel, welcher der Drehungsgeschwindigkeit pro-

portional ist, verschoben wird. Man kann daher, wenn φ' den Winkel darstellt, welchen die veränderte magnetische Axe des Eisenkernes mit der Gegenrichtung der Axe des festen Electromagnets bildet, setzen:

$$\varphi' = \varphi + \varepsilon v, \tag{21}$$

worin ε eine kleine Constante ist.

Was ferner die Stärke der Pole anbetrifft, so muss diese in einem rotirenden Eisenkerne etwas geringer sein, als in einem ruhenden Eisenkerne. Ich glaube, dass man keinen erheblichen Fehler begehen wird, wenn man annimmt, dass das veränderte magnetische Moment so gross ist, wie die in die veränderte Axenrichtung fallenden Componenten des ursprünglichen magnetischen Momentes, welches wir mit P bezeichnet und durch Gleichung (14) bestimmt haben. Demgemäss können wir, wenn wir das in dem rotirenden Eisenkerne stattfindende magnetische Moment mit P' bezeichnen, setzen:

$$P' = P \cos \varepsilon v. \tag{22}$$

Zerlegen wir nun dieses magnetische Moment P', so wie wir es früher mit dem magnetischen Momente P gethan haben, in die beiden Componenten, welche in die Gegenrichtung der Axe des festen Electromagnets und die darauf senkrechte Richtung fallen, und welche P_1' und P_2' heissen mögen, so haben wir zu setzen:

$$P_1' = P' \cos \varphi' = P \cos \varepsilon v . \cos (\varphi + \varepsilon v),$$
$$P_2' = P' \sin \varphi' = P \cos \varepsilon v . \sin (\varphi + \varepsilon v).$$

Entwickeln wir diese Ausdrücke nach Potenzen von εv, und vernachlässigen wir dabei wegen der Kleinheit des Coëfficienten ε die Glieder, welche in Bezug auf εv von höherer, als erster Ordnung sind, so kommt:

$$P_1' = P(\cos \varphi - \varepsilon v \sin \varphi)$$
$$P_2' = P(\sin \varphi + \varepsilon v \cos \varphi),$$

und wenn wir hierin noch für die Producte $P \cos \varphi$ und $P \sin \varphi$ ihre in den Gleichungen (16) gegebenen Werthe setzen, so erhalten wir:

$$(23)\quad \begin{cases} P_1' = \dfrac{C}{1+\beta i}(M - \varepsilon v N) \\ P_2' = \dfrac{C}{1+\beta i}(N + \varepsilon v M). \end{cases}$$

Die mit dem Factor ε behafteten Glieder haben bei der Gangrichtung der Maschine, bei welcher sie unter Anwendung von mechanischer Arbeit einen electrischen Strom liefert, eine Vermehrung der Arbeit und eine Verminderung des Stromes zur Folge, und bei der Gangrichtung der Maschine, bei welcher sie unter Anwendung eines electrischen Stromes mechanische Arbeit liefert, haben jene Glieder eine Vermehrung des Stromes und eine Verminderung der Arbeit zur Folge. Die magnetische Trägheit des rotirenden Eisenkernes hat also unter allen Umständen einen nachtheiligen Einfluss auf die Leistungsfähigkeit der Maschine. Dieser Einfluss lässt sich dadurch, dass man den Contactfedern bei schneller Drehung eine andere Stellung gibt, als bei langsamer Drehung, etwas verringern, aber aufheben lässt er sich nicht.

Ausser der auf der magnetischen Trägheit des Eisens beruhenden Wirkung kann in dem rotirenden Eisenkerne noch eine andere Wirkung stattfinden, welche ebenfalls für die Leistungsfähigkeit der Maschine nachtheilig ist, nämlich die Induction von electrischen Strömen im Eisenkerne selbst. Derartige Ströme werden jetzt häufig Foucault'sche Ströme genannt, weil Foucault einen Versuch gemacht hat, der ihr Vorhandensein besonders auffällig zur Wahrnehmung brachte; indessen ist dabei zu bemerken, dass diese Ströme schon lange vor jenem Foucault'schen Versuche bekannt und auch richtig erklärt waren.[1])

Wenn der Eisenkern unter dem Einflusse des festen

1) Ich will in dieser Beziehung nur erwähnen, dass die rotirende Bewegung, welche eine Magnetnadel über einer rotirenden Metallscheibe annimmt, und die dämpfende Wirkung, welche eine Kupferhülle auf die Schwingungen einer Magnetnadel ausübt, auf denselben Strömen beruht, und diese beiden Erscheinungen waren zu jener Zeit allgemein bekannt, und über ihren Grund war niemand im Zweifel.

Electromagnets rotirt, so werden in ihm, wie in jedem Leiter, welcher sich zu einem Magnet in relativer Bewegung befindet, electromotorische Kräfte inducirt.

Da der rotirende Eisenkern auch unter dem Einflusse des in seiner Umwickelung stattfindenden Stromes steht, so entsteht die weitere Frage, ob auch von diesem Strome eine inducirende Wirkung auf ihn ausgeübt wird. Der Leiter dieses Stromes rotirt mit dem Eisenkerne gemeinsam und befindet sich daher in relativer Ruhe zu ihm, und es kann daher nur durch Aenderungen des Stromes selbst Induction veranlasst werden. Solche Aenderungen gehen in der That an gewissen Stellen vor sich, nämlich in den Leiterabtheilungen, welche an den Contactfedern vorbeigehen, und in welchen die Richtung des Stromes sich umkehrt, und diese sich stets wiederholenden Stromumkehrungen müssen eine Induction auf den Eisenkern zur Folge haben.

Man kann nun aber durch eine ähnliche Betrachtung, wie die, welche in § 9 angestellt wurde, leicht nachweisen, dass die in dem rotirenden Eisenkerne inducirten electromotorischen Kräfte in dem Falle, wo die Umwickelung an der Rotation theilnimmt, und zugleich in ihr jene Stromumkehrungen stattfinden, dieselben sein müssen, wie in dem Falle, wo die Umwickelung an der Rotation nicht theilnimmt, aber auch die Stromumkehrungen nicht stattfinden. Wir können uns also zur Bestimmung der Induction vorstellen, dass der rotirende Eisenkern unter dem gleichzeitigen Einflusse des festen Electromagnets und eines in einem festen Leiter stattfindenden unveränderlichen Stromes stehe. Dadurch gelangen wir zu dem Ergebnisse, dass die Kräfte, welche inducirend auf ihn wirken, dieselben sind, wie diejenigen, welche magnetisirend auf ihn wirken, und von den letzteren wissen wir, dass sie eine Resultante haben, deren Grösse sich, abgesehen von einem constanten Factor, durch $\sqrt{M^2 + N^2}$ darstellen lässt, und deren Richtung durch den in den Gleichungen (15) bestimmten Winkel φ gegeben ist.

Durch die im Eisenkerne inducirten electromotorischen Kräfte können geschlossene Ströme, die im Eisenkerne selbst ihren Umlauf haben, entstehen. Die Entstehung dieser

Ströme kann aber auch fast vollständig verhindert werden, wenn man den Eisenkern in geeigneter Weise in Theile zerlegt, zwischen denen die Electricität nicht überströmen kann, was bei der Gramme'schen Maschine dadurch erreicht ist, dass statt eines massiven Eisenringes ein aus Eisendraht bestehender Ring in Anwendung gebracht ist.

In den Fällen, wo diese Ströme in erheblichem Maasse stattfinden, ist ihre Wirkung eine doppelte. Erstens haben die Ströme selbst ein magnetisches Moment, welches, wie die anderen magnetischen Momente, in Rechnung zu bringen ist, zweitens üben sie eine magnetisirende Wirkung auf das Eisen aus und ändern dadurch den sonst schon bestehenden Magnetismus des Eisenkernes.

Die Intensität der im Eisenkerne inducirten Ströme und somit auch die Grösse ihres magnetischen Momentes ist einerseits der inducirenden Kraft und folglich der Grösse $\sqrt{M^2 + N^2}$, und andererseits der durch v dargestellten Drehungsgeschwindigkeit proportional. Man kann dieses Moment also durch das Product:

$$\eta v \sqrt{M^2 + N^2}$$

ausdrücken, worin η eine kleine Constante bedeutet. Was ferner das Moment des durch diese Ströme im Eisen hervorgerufenen Magnetismus anbetrifft, so muss bei dessen Bestimmung berücksichtigt werden, dass das Eisen, auf welches diese Ströme wirken, schon durch andere viel stärkere Kräfte magnetisch gemacht ist, was auf den Nenner des gesuchten Ausdruckes von Einfluss ist. In Uebereinstimmung mit dem in (14) für das magnetische Moment P gegebenen Ausdruck haben wir für das hier in Rede stehende Moment den Ausdruck:

$$\frac{D \eta v \sqrt{M^2 + N^2}}{1 + \beta i}$$

zu bilden, worin D eine Constante bedeutet, welche der in (14) vorkommenden Constanten C entspricht. Da beide vorstehend bestimmte Momente eine gemeinsame Axenrichtung haben, so können wir sie durch Addition vereinigen und erhalten dadurch ein Moment von der Grösse:

$$\eta v \sqrt{M^2 + N^2}\left(1 + \frac{D}{1 + \beta i}\right).$$

Die Axenrichtung dieses durch die Induction entstandenen magnetischen Momentes ist auf der Richtung der Kraft, welche die Induction bewirkt, senkrecht, sodass wir zu ihrer Bestimmung statt des Winkels φ, welcher die Kraftrichtung bestimmt, den Winkel $\varphi + (\pi/2)$ in Anwendung bringen müssen. Wollen wir daher dieses Moment in Componenten zerlegen, welche in dieselben Richtungen fallen, wie die Componenten P_1 und P_2 des Momentes P, so haben wir das Moment mit $\cos(\varphi + \pi/2)$ und $\sin(\varphi + \pi/2)$, oder, was dasselbe ist, mit $-\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ zu multipliciren. Wir erhalten also nach der Richtung von P_1 die Componente:

$$-\eta v \sqrt{M^2 + N^2}\left(1 + \frac{D}{1 + \beta i}\right)\sin\varphi,$$

und nach der Richtung von P_2 die Componente:

$$\eta v \sqrt{M^2 + N^2}\left(1 + \frac{D}{1 + \beta i}\right)\cos\varphi.$$

Setzen wir hierin für $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ihre in (15) gegebenen Werthe ein, so lauten die Ausdrücke der beiden Componenten:

$$-\eta v N\left(1 + \frac{D}{1 + \beta i}\right), \qquad \eta v M\left(1 + \frac{D}{1 + \beta i}\right).$$

Diese beiden Grössen müssen wir zu den durch die Gleichungen (23) bestimmten Grössen P_1' und P_2', welche aus P_1 und P_2 durch die Berücksichtigung der magnetischen Trägheit des Eisens entstanden sind, noch hinzufügen, um auch die im Eisenkern stattfindende Induction zu berücksichtigen. Die durch diese zweite Veränderung entstehenden Werthe der Componenten des ganzen im Eisenkerne bestehenden magnetischen Momentes mögen mit P_1'' und P_2'' bezeichnet werden, dann haben wir zu setzen:

$$(24)\quad \begin{cases} P_1'' = \dfrac{C}{1 + \beta i}(M - \varepsilon v N) - \eta v N\left(1 + \dfrac{D}{1 + \beta i}\right) \\[2ex] P_2'' = \dfrac{C}{1 + \beta i}(N + \varepsilon v M) + \eta v M\left(1 + \dfrac{D}{1 + \beta i}\right). \end{cases}$$

Führen wir hierin zur Abkürzung das Zeichen ε' ein mit der Bedeutung:

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{D}{C}\eta, \tag{25}$$

so gehen die Gleichungen über in:

$$\left\{\begin{aligned} P_1'' &= \frac{C}{1+\beta i}(M - \varepsilon' v N) - \eta v N, \\ P_2'' &= \frac{C}{1+\beta i}(N + \varepsilon' v M) + \eta v M. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Diese Gleichungen wollen wir als die allgemeineren statt der Gleichungen (23) in Anwendung bringen. Für solche Maschinen, bei denen die im Eisenkerne inducirten Ströme zu unbedeutend sind, um eine Berücksichtigung zu verdienen, braucht man nur $\eta = 0$ und demgemäss $\varepsilon' = \varepsilon$ zu setzen, um wieder zu den Gleichungen (23) zu gelangen.

§ 11. Anwendung der vorigen Grössen zur Bestimmung der von der ponderomotorischen Kraft geleisteten Arbeit und der electromotorischen Kraft.

Wir kehren nun zu den Gleichungen (17) und (18) zurück, welche wir in § 8 zur Bestimmung der Arbeit der ponderomotorischen und electromotorischen Kraft für den Fall aufgestellt haben, wo der Eisenkern ruht, und von denen die erstere für den Fall, wo der Eisenkern mit rotirt, nach § 9 noch die Aenderung erleiden muss, dass das Product NP_1 durch das Product MP_2 ersetzt wird. In diesen Gleichungen substituiren wir für die Grössen P_1 und P_2 die veränderten Grössen P_1'' und P_2'', sodass die Gleichungen lauten:

$$\left\{\begin{aligned} T &= -hMNv - kMP_2''v \\ Ei &= hMNv + kNP_1''v - \varrho i^2 v. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Führen wir hierin für P_1'' und P_2'' ihre in (26) gegebenen Werthe ein, so gehen die Gleichungen über in:

$$\left\{\begin{aligned} T &= -MN\left(h + \frac{kC}{1+\beta i}\right)v - kM^2\left(\eta + \frac{\varepsilon' C}{1+\beta i}\right)v^2 \\ Ei &= MN\left(h + \frac{kC}{1+\beta i}\right)v - \varrho i^2 v - kN^2\left(\eta + \frac{\varepsilon' C}{1+\beta i}\right)v^2. \end{aligned}\right. \tag{28}$$

In diese Gleichungen haben wir endlich noch für M und N ihre in (12) und (13) gegebenen Werthe einzuführen, nämlich:

$$M = \frac{Ai}{1+\alpha i}; \quad N = Bi,$$

wobei sich in der zweiten Gleichung noch der neben E stehende Factor i fortheben lässt. Dadurch erhalten wir:

$$\text{(I)} \quad T = -\left[\frac{AB}{1+\alpha i}\left(h + \frac{kC}{1+\beta i}\right)v + \frac{kA^2}{(1+\alpha i)^2}\left(\eta + \frac{\varepsilon' C}{1+\beta i}\right)v^2\right]i^2$$

$$\text{(II)} \quad E = \left[\frac{AB}{1+\alpha i}\left(h + \frac{kC}{1+\beta i}\right)v - \varrho v - kB^2\left(\eta + \frac{\varepsilon' C}{1+\beta i}\right)v^2\right]i.$$

Dieses sind die Gleichungen, welche allen weiteren Rechnungen zu Grunde zu legen sind.

Um die Gleichungen noch etwas übersichtlicher und für die Rechnungen bequemer zu machen, wollen wir, statt der in ihnen vorkommenden Constanten, andere Constante, welche durch jene bestimmt sind, einführen, und zwar die folgenden:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{1}{\alpha}, \\ b &= \frac{1}{\beta}, \\ p &= \frac{hAB}{\alpha}, \\ q &= \frac{kABC}{\alpha\beta}, \\ l &= \frac{A}{B\alpha}, \\ \sigma &= kB^2\eta, \\ \lambda &= \frac{kB^2C\varepsilon'}{\beta}. \end{aligned} \right.$$

Dadurch nehmen die Gleichungen folgende Form an:

$$\text{(I}_a\text{)} \quad T = -\left[\frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)v + \left(\frac{l}{a+i}\right)^2\left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)v^2\right]i^2,$$

$$\text{(II}_a\text{)} \quad E = \left[\frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)v - \varrho v - \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)v^2\right]i.$$

§. 12. Bestimmung der Intensität des Stromes, welchen eine Maschine erzeugt, wenn keine fremde electromotorische Kraft mitwirkt.

Wenn die äussere Leitung, durch welche die zur Maschine selbst gehörenden Leiter geschlossen werden, keine weitere electromotorische Kraft enthält, sondern die in der rotirenden Umwickelung inducirte electromotorische Kraft E die einzige in dem ganzen Leitungskreise vorhandene electromotorische Kraft ist, so kann man, wenn R den gesammten Leitungswiderstand bedeutet, nach dem Ohm'schen Gesetze die Gleichung:

$$E = Ri$$

bilden, durch deren Anwendung die Gleichung (II_a) übergeht in:

$$(31)\quad Ri = \left[\frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)v - \varrho v - \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)v^2\right]i.$$

Wenn wir aus dieser Gleichung den an beiden Seiten vorkommenden Factor i fortheben und dann noch die Glieder der rechten Seite, welche keinen Nenner haben, auf die linke Seite schaffen, so kommt:

$$R + \varrho v + \sigma v^2 = \frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)v - \frac{\lambda}{b+i}v^2,$$

oder anders geschrieben:

$$(32)\quad 1 = \frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)\frac{v}{R + \varrho v + \sigma v^2} - \frac{\lambda}{b+i}\,\frac{v^2}{R + \varrho v + \sigma v^2}.$$

Hierin wollen wir zur Abkürzung das Zeichen w mit der Bedeutung:

$$(33)\quad w = \frac{v}{R + \varrho v + \sigma v^2}$$

einführen, wodurch wir erhalten:

$$(34)\quad 1 = \frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)w - \frac{\lambda}{b+i}vw.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Intensität i des von der Maschine erzeugten Stromes bestimmen. Multiplicirt man die Gleichung mit $a + i$ und $b + i$ und ordnet dann die Glieder nach Potenzen von i, so kommt:

$$(35) \quad i^2 - (pw - \lambda vw - a - b)\,i - (pb + q)\,w + \lambda avw + ab = 0,$$

und durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man:

$$(36) \quad \begin{cases} i = \frac{1}{2}(pw - \lambda vw - a - b) \\ \pm \frac{1}{2}\sqrt{(pw - \lambda vw - a - b)^2 + 4(pb + q)\,w - 4\lambda avw - 4ab}\,. \end{cases}$$

Von den beiden vor dem Wurzelzeichen stehenden Vorzeichen ist nur das obere anwendbar. Das untere würde nämlich für alle Werthe von v negative Werthe von i geben, was der Bedeutung der durch diese Gleichung bestimmten Grösse i widersprechen würde. Diese Gleichung ist nämlich aus der Gleichung (34) abgeleitet, in welcher i nur in den Nennern vorkommt, und diese Nenner sind so aufzufassen, dass das Zeichen i in ihnen den absoluten Werth der Stromintensität, also eine wesentlich positive Grösse bedeutet. Bei Anwendung des oberen Vorzeichens erhält man für alle grösseren Werthe von v positive Werthe von i, welche als gültig anzusehen sind, und nur für kleine, unter einer gewissen Grenze liegende Werthe von v erhält man negative Werthe von i. Dieses letztere Intervall wollen wir vorläufig ausser Acht lassen, indem weiter unten noch von ihm die Rede sein wird.

Man kann der vorigen Gleichung auch folgende Form geben:

$$(37) \quad \begin{cases} i = \frac{1}{2}(pw - \lambda vw - a - b) \\ + \frac{1}{2}\sqrt{(pw - \lambda vw + a - b)^2 + 4\,(q - pa + pb)\,w}\,. \end{cases}$$

Hierin wollen wir noch zwei zur Vereinfachung dienende Zeichen einführen, nämlich:

$$(38) \qquad w' = w\left(1 - \frac{\lambda}{p}v\right) = \frac{v - \frac{\lambda}{p}v^2}{R + \varrho v + \sigma v^2},$$

$$(39) \qquad c = q - pa + pb,$$

wodurch die Gleichung nachstehende, sehr übersichtliche Gestalt annimmt:

$$(40) \qquad i = \frac{1}{2}(pw' - a - b) + \frac{1}{2}\sqrt{(pw' + a - b)^2 + 4cw}\,.$$

Um von dem Verhalten der durch diese Gleichung bestimmten Grösse i eine Vorstellung zu gewinnen, kann man

folgende Betrachtung anstellen. Die durch (39) bestimmte Constante c kann je nach der Construction der Maschine positiv oder negativ sein, und daher möglicherweise auch den Werth Null haben. In diesem Falle tritt durch Verschwinden des Wurzelzeichens und Aufhebung der Grösse a eine grosse Vereinfachung in der Gestalt der Gleichung ein, indem sie übergeht in:

$$i = pw' - b. \tag{41}$$

Stellt man die hieraus sich ergebenden Werthe von i in der Weise graphisch dar, dass man w' als Abscisse und i als Ordinate nimmt, so erhält man eine gerade Linie, welche die Abscissenaxe in dem Punkte, wo die Abscisse gleich b/p ist, schneidet und von hier an mit wachsender Abscisse unter einem Winkel ansteigt, dessen Tangente gleich p ist.

Ist c nicht gleich Null, so erhält man, wenn man sich die Grösse w auf w' zurückgeführt und dadurch i als Function von w' allein ausgedrückt denkt, und diese wieder graphisch darstellt, eine Curve, die um so mehr von jener Geraden abweicht, je grösser der absolute Werth von c ist, und zwar in der Weise, dass ihr Durchschnittspunkt mit der Abscissenaxe eine veränderte Lage hat, und dass sie je nach dem Vorzeichen von c im einen oder anderen Sinne gekrümmt ist. Die Krümmung ist aber nicht bedeutend, und nimmt mit wachsendem Werthe von w' ab.

Will man die Stromintensität i direct auf die Tourenzahl v beziehen, so muss man für w und w' ihre in (33) und (38) gegebenen Ausdrücke setzen. In Bezug auf diese Ausdrücke ist besonders beachtenswerth, dass sie im Nenner die Grösse R haben, woraus die Abhängigkeit der Stromintensität vom Leitungswiderstande ersichtlich ist, und dass sie wegen der mit den Factoren ϱ, σ und λ behafteten Glieder langsamer wachsen, als v, was besonders bei grossen Werthen von v erheblich wird.

§ 13. Das Angehen der Maschine.

Im vorigen Paragraphen wurde darauf hingewiesen, dass die Gleichung (36), auch bei Anwendung des oberen Vorzeichens, und entsprechend die Gleichung (40) für keine

Werthe von v negative Werthe von i gibt, welche unzulässig sind. Dieses darf man aber nicht in dem Sinne auffassen, als ob die Hauptgleichung, von welcher wir ausgegangen sind, nämlich die Gleichung (II_a), für kleine Drehungsgeschwindigkeiten unzulässige Resultate gäbe. Man muss vielmehr bedenken, dass diese Gleichung uns zunächst die Gleichung (31) gegeben hat, von welcher wir erst nach der Division durch i zu der Gleichung zweiten Grades (35) gelangt sind, deren Auflösung in (36) gegeben ist. Hätten wir jene Division nicht vorgenommen, so hätten wir statt der Gleichung zweiten Grades eine Gleichung dritten Grades erhalten, welche ausser den in (36) gegebenen Wurzeln noch die Wurzel $i = 0$ gehabt hätte. Diesen Werth Null von i müssen wir also auch als einen der Hauptgleichung genügenden Werth betrachten, und er ist es, welchen wir in dem Intervalle, wo die beiden anderen Werthe unzulässig sind, anwenden müssen.

Wir würden also, wenn wir uns auch bei kleinen Drehungsgeschwindigkeiten ganz streng an die unter (II_a) gegebene Hauptgleichung halten wollten, zu folgendem Ergebnisse gelangen. Für kleine Drehungsgeschwindigkeiten gibt die Maschine keinen Strom, sondern erst von einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit an beginnt ihre Wirksamkeit, und von hier an tritt bei weiter zunehmender Drehungsgeschwindigkeit sofort eine in einem endlichen Verhältnisse zu den Geschwindigkeitsdifferenzen stehende Steigerung der Stromintensität ein. Dieses entspricht in der That der Erfahrung mit solcher Annäherung, das man für das Intervall, innerhalb dessen die Maschine unwirksam ist, einen besonderen Namen eingeführt hat, indem man die ersten Touren, bis zu einer gewissen Anzahl, die todten Touren nennt.

Als ganz genau darf man aber das Verfahren, auch bei geringen Drehungsgeschwindigkeiten die Gleichung (II_a) in Anwendung zu bringen, nicht ansehen, sondern muss wenigstens bei den Geschwindigkeiten, bei welchen die Gleichung (II_a) die Stromintensität Null geben würde, den schon in § 7 erwähnten, im Eisen des festen Electromagnets von der früheren Magnetisirung her noch vorhandenen remanenten Magnetismus mit in Betracht ziehen.

Bei der Ableitung unserer obigen Hauptgleichungen haben wir das magnetische Moment des festen Electromagnets durch die Gleichung:

$$M = \frac{Ai}{1 + \alpha i}$$

bestimmt. Diese Gleichung würde für kleine Werthe von i entsprechend kleine Werthe von M und für $i = 0$ den Werth $M = 0$ geben. Wenn nun aber im Eisen schon vor der Einwirkung des Stromes ein gewisser Magnetismus vorhanden ist, so muss dieser natürlich bei der Bestimmung des bei schwachen Strömen stattfindenden Magnetismus berücksichtigt werden. Wie dieses geschehen müsste, um den höchsten Grad von Genauigkeit zu erreichen, würde schwer festzustellen sein, indessen kommt es darauf für unseren Zweck auch nicht an, sondern wir können uns mit einem Näherungsverfahren begnügen. Als solches wollen wir folgendes anwenden. Sei μ das als klein vorausgesetzte Moment des remanenten Magnetismus, dann wollen wir zuerst den Werth von i bestimmen, für welchen der obige Ausdruck von M den Werth μ hat. Dazu haben wir, wenn i_1 den betreffenden Werth von i bezeichnet, zu setzen:

$$\mu = \frac{Ai_1}{1 + \alpha i_1},$$

woraus folgt:

$$(42) \qquad i_1 = \frac{\mu}{A - \alpha\mu}.$$

Nach dieser Bestimmung wollen wir festsetzen, dass für alle Werthe von i, welche kleiner sind als i_1, die Gleichung:

$$M = \mu,$$

und für alle Werthe von i, welche grösser sind als i_1, die Gleichung:

$$M = \frac{Ai}{1 + \alpha i},$$

zur Bestimmung des magnetischen Momentes M in Anwendung gebracht werden soll.

Hiermit ist auch das Verfahren, welches wir zur Strombestimmung während des Angehens der Maschine anzuwenden haben, gegeben. Zu Anfang haben wir die Maschine als

eine magnetoelectrische Maschine zu betrachten, deren fester Magnet das kleine Moment μ hat. Eine solche Maschine wirkt auch bei kleinen Drehungsgeschwindigkeiten schon stromerzeugend, und der Strom wächst mit zunehmender Drehungsgeschwindigkeit; aber dieses Wachsen kann wegen der Kleinheit von μ nur sehr langsam stattfinden. Wenn die Drehungsgeschwindigkeit so gross geworden ist, dass die Stromintensität den Werth i_1 erreicht hat, dann gibt die Maschine auch als dynamoelectrische Maschine, bei welcher der feste Electromagnet dann ebenfalls das Moment μ hat, einen Strom von derselben Intensität, und von dieser Drehungsgeschwindigkeit an bringen wir unsere für die dynamoelectrische Maschine abgeleitete Hauptgleichung (II_a) zur Bestimmung der Stromintensität in Anwendung.

Es fragt sich nun, wie gross die betreffende Drehungsgeschwindigkeit ist, bei welcher die Maschine als dynamoelectrische Maschine denselben Strom gibt, wie als magnetoelectrische Maschine, nämlich den Strom von der Intensität i_1. Zur Bestimmung dieses Werthes von v, welcher v_1 heissen möge, haben wir in Gleichung (40) i_1 an die Stelle von i zu setzen. Zugleich wollen wir dabei die zu dem Werthe v_1 von v gehörenden Werthe von w und w' mit w_1 und w_1' bezeichnen. Dann erhalten wir:

$$i_1 = \tfrac{1}{2}(p w_1' - a - b) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(p w_1' + a - b)^2 + 4 c w_1},$$

woraus sich ergibt:

$$(a + i_1) p w_1' + c w_1 = (a + i_1)(b + i_1). \tag{43}$$

Hierin hat man für w_1 und w_1' ihre aus (33) und (38) hervorgehenden Ausdrücke:

$$w_1 = \frac{v_1}{R + \varrho v_1 + \sigma v_1^2}; \qquad w_1' = \frac{v_1 - \frac{\lambda}{p} v_1^2}{R + \varrho v_1 + \sigma v_1^2}$$

einzusetzen, um v_1 bestimmen zu können.

Wir wollen diese Bestimmung hier nur in angenäherter Weise ausführen. Da nämlich die mit den Factoren λ und σ behafteten Glieder, wegen der Kleinheit dieser Factoren nur bei grossen Geschwindigkeiten einigermaassen beträchtlich werden, so können wir sie bei der Geschwindigkeit, um

welche es sich hier handelt, unbedenklich vernachlässigen. Dann haben wir zu setzen:

$$w_1' = w_1 = \frac{v_1}{R + \varrho v_1}.$$

Dadurch erhalten wir zunächst:

$$\frac{v_1}{R + \varrho v_1} = \frac{(a + i_1)(b + i_1)}{p(a + i_1) + c},$$

und hieraus ergibt sich weiter;

$$(44) \qquad v_1 = \frac{(a + i_1)(b + i_1) R}{p(a + i_1) + c - (a + i_1)(b + i_1)\varrho}.$$

Für gewöhnliche praktische Zwecke kann man in der Vereinfachung noch weiter gehen. Wegen der Kleinheit des magnetischen Momentes μ des remanenten Magnetismus ist die Stromintensität i_1 gegen die bei vollem Gange der Maschine stattfindende Stromintensität sehr unbedeutend, und man pflegt daher bei der praktischen Anwendung der Maschinen, wie schon oben angedeutet, die bei geringen Drehungsgeschwindigkeiten stattfindenden, nur langsam bis zur Intensität i_1 anwachsenden Ströme zu vernachlässigen, und es so zu betrachten, als ob die Stromerzeugung erst bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit ihren Anfang nähme. Bei dieser Betrachtungsweise hat man auch der betreffenden Drehungsgeschwindigkeit den Grenzwerth beizulegen, welchen sie annimmt, wenn μ und somit auch i_1 sich der Null nähert. Bezeichnet man diesen Grenzwerth von v_1 mit v_0, so erhält man aus der vorigen Gleichung:

$$(45) \qquad v_0 = \frac{abR}{pa + c - ab\varrho},$$

wofür man, gemäss (39), auch schreiben kann:

$$(46) \qquad v_0 = \frac{abR}{pb + q - ab\varrho}.$$

Der so bestimmte Werth v_0 drückt die Zahl der sogenannten todten Touren aus.

Weitere Anwendungen der in diesem Aufsatze abgeleiteten Hauptgleichungen, insbesondere auf die Kraftübertragung durch dynamoelectrische Maschinen, behalte ich mir für einen folgenden Aufsatz vor.

II. *Ueber Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen; von L. Sohncke und A. Wangerin.*

(Fortsetzung von p. 227.)

II. Experimenteller Theil.

Die im Folgenden mitzutheilenden Beobachtungen beziehen sich nur auf die Interferenzstreifen an keilförmigen Blättchen. Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass diese Beobachtungen nicht zur Bestätigung der fertigen Theorie angestellt wurden, sondern dass die meisten derselben der Vollendung der Theorie vorausgingen und vielmehr den Anlass gaben, dieselbe nach verschiedenen Richtungen hin auszuarbeiten.

§ 4. Beobachtungen der Richtung der Interferenzstreifen mit einem Fernrohr von grosser Oeffnung.

Zur Hervorbringung der Interferenzstreifen diente bei allen Beobachtungen ein und dasselbe keilförmige Blättchen aus der Werkstätte von Dr. Zeiss in Jena. Es hat quadratische Begrenzung (etwa 31 mm Seitenlänge); seine Dicke beträgt in der Mitte 0,252 mm; der Winkel der beiden Grenzebenen ist = 1′ 32″; der Brechungsquotient für Natriumgelb $n = 1{,}516$. Diese vom Verfertiger des Blättchens angegebenen Zahlen haben wir controlirt und bestätigt gefunden. Das Blättchen ist sonach möglichst gleichartig jenem, mit dem Hr. Feussner seine Beobachtungen angestellt hat.[1]) Aus diesen Angaben berechnet sich die Entfernung H des stets anvisirten Mittelpunktes der oberen Keilfläche von der Keilschneide = 564,99 mm. Die Keilschneide ist keiner Seite des quadratischen Umrisses auch nur angenähert parallel. Das Blättchen ist auf einer dickeren, aus durch und durch mattschwarzem Glase bestehenden, etwas grösseren quadratischen Tafel vermittelst vier kleiner Wachströpfchen befestigt, wodurch in unmittelbarer Nähe der einen Ecke — nach Ausweis der Interferenzstreifen — eine geringe

1) Feussner, Marburg. Sitzungsber. 1881. p. 22. Auch in Wied. Ann. 14. p. 569. 1881.

Biegung oder Zerrung herbeigeführt ist. Sieht man nämlich im reflectirten Natriumlicht, während die Keilschneide senkrecht zur Einfallsebene liegt, auf das Blättchen, so zeigen sich nur an jener einzigen Stelle Unstetigkeiten im Verlauf der sonst sehr regelmässigen Interferenzstreifen. Dreht man alsdann das Blättchen in seiner Ebene, so gehen die vorher fast geradlinigen Streifen in mehr oder weniger gebogene oder geknickte über; eine Messung ihrer Richtung ist also nicht ohne weiteres möglich, sondern erst dadurch, dass man die Beobachtungen auf eine eng abgegrenzte Stelle beschränkt. Dies erreichte man dadurch, dass man die Oberfläche des Blättchens mit mattschwarzem Papier zudeckte, das nur in der Mitte eine kreisförmige Oeffnung von etwa 8 mm Durchmesser hatte. Lediglich die hierdurch frei gelassene Mittelpartie des Blättchens diente bei allen Beobachtungen. Ursprünglich war das Loch in dem Deckpapier viel grösser gewählt worden (19 mm Durchmesser), doch waren dann die im Gesichtsfeld erscheinenden Streifen nicht hinreichend parallel, sodass nicht von einer bestimmten Richtung der Streifen die Rede sein konnte. Erst bei stärkerer Beschränkung der beobachteten Blättchenpartie war genügende Parallelität vorhanden.

Es wurde nur mit Natriumlicht beobachtet, das dadurch erzeugt wurde, dass das obere umgebogene Ende eines unten in Kochsalzlösung tauchenden Asbestfadens in eine Bunsen'sche Flamme hineinragte. Die so erhaltene grosse gelbe Flamme wurde durch einen unmittelbar vor ihr senkrecht aufgestellten undurchsichtigen Schirm beschränkt, der nur eine kreisförmige Oeffnung von 30 mm Durchmesser ($\varrho_1 = 15$) besass. Dieser beleuchtete Kreis war also die Lichtquelle, deren Entfernung vom Blättchen bei den verschiedenen Versuchen jedesmal angegeben ist.

Zur Beobachtung der Interferenzstreifen diente ein grosses Ablesefernrohr von Edelmann in München; der Objectivrand hat einen Durchmesser von ungefähr 44 mm, also ist $\varrho = 22$; die Vergrösserung ist etwa siebenzehnfach; das Gesichtsfeld hat eine Oeffnung von $2^0\,20'$. Das kreisförmig umgrenzte Stück des Keilblättchens, mit dem Fern-

rohr bei schrägem Einfall beobachtet, erscheint inmitten des Gesichtsfeldes als kleiner, mit parallelen Interferenzstreifen überdeckter elliptischer Fleck, dessen grosse Axe immer nur einen kleinen Bruchtheil der Oeffnung des Gesichtsfeldes ausmachte, nämlich 0,05 bei der grössten Entfernung, aus welcher beobachtet wurde; 0,14 bei der kleinsten. Es entfernten sich also sämmtliche beobachteten Interferenzstreifen immer nur sehr wenig von der Sehaxe des Fernrohres.

Da das wesentliche Ziel der Beobachtungen in der Messung des Winkels bestand, um den sich die im Fernrohr erscheinenden Interferenzstreifen drehen, wenn das erzeugende Blättchen in seiner eigenen Ebene gedreht wird, so war Hauptforderniss die Drehbarkeit des Fadenkreuzes, von welchem ein Faden jedesmal mit den Streifen zur Deckung gebracht werden musste. Nun ist bei dem benutzten Fernrohr das Fadenkreuz zwar starr mit dem Ocularrohr verbunden; aber letzteres wird nicht durch Trieb und Zahnstange bewegt, sondern es lässt sich frei aus dem weiteren, das Objectiv tragenden Rohre, in dem es nur durch Reibung feststeckt, herausziehen und dabei beliebig um die Rohraxe drehen. Ein in ganze Grade getheilter Kreis — von einem Mikroskopocular entnommen — wurde auf das Ocularrohr des Fernrohres gesteckt, und nun bedurfte es nur noch einer feststehenden Marke, um den Betrag der Drehung ablesen zu können. Da jedoch die Interferenzerscheinung aus verschiedenen Entfernungen beobachtet werden sollte, was ein verschieden weites Herausziehen des Ocularrohres bedingte, so musste die feste Marke ebenfalls vor- und zurückschiebbar sein. Daher wurde folgende Einrichtung getroffen. Auf dem das Objectiv tragenden äusseren Rohre, welches genau cylindrisch ist, wurde eine Leiste parallel der Rohraxe befestigt; längs dieser Leiste konnte ein langer Zeiger hin und her geschoben werden, dessen umgebogene Spitze, über den Rand des getheilten Kreises übergreifend, als feste Marke diente. Mit dieser Vorrichtung konnten bei der Ablesung noch Zehntelgrade geschätzt werden.

Das erste Ziel der Untersuchung war: festzu-

stellen, ob die Streifenrichtung sich mit der Entfernung, aus welcher man mit dem Fernrohr beobachtet, merklich ändert. Durch diese Beobachtungen, welche vor Kenntniss der Hauptgleichung 18 (§ 2) für die Streifendrehung angestellt wurden, sollte vornehmlich die Geltung der ersten Feussner'schen Formel (9_a) (§ 2) geprüft werden. Das Blättchen wurde auf einer kleinen, kreisrunden Messingscheibe so befestigt, dass die Blättchenoberfläche möglichst parallel zur Scheibenfläche war. Es war eine Vorrichtung getroffen, um die Scheibe um ihre geometrische Axe drehen und den Betrag der Drehung vermittelst eines am Scheibenrande befestigten Zeigers auf einer festen Kreistheilung ablesen zu können. Bei solcher Drehung der Scheibe dreht sich also die Blättchenvorderfläche in ihrer eigenen Ebene. Diese ganze Vorrichtung wurde so aufgestellt, dass die Vorderfläche des Blättchens vertical war. Dann wurde Fernrohr und Lichtquelle in gleicher Höhe über dem Fussboden wie die Blättchenmitte aufgestellt, sodass die am Blättchen reflectirten Strahlen ins Fernrohr gelangten, die Einfallsebene also horizontal lag. Nur diese Anordnung nämlich gestattete leicht, die Entfernung des Fernrohres erheblich zu verändern. — Der Einfallswinkel wurde erst nach Vollendung der Beobachtungen, und zwar folgendermassen gemessen. Nachdem der Ort der Blättchenmitte durch ein von oben herabhängendes Senkel kenntlich gemacht war, entfernte man die ganze, das Blättchen tragende Vorrichtung und brachte die verticale Drehaxe eines Theodoliten in die Verlängerung dieses Senkels, sodass das Theodolitfernrohr in der vorigen Einfallsebene drehbar war. Visirte man nun mit dem Theodoliten einerseits nach der Mitte der Lichtquelle, andererseits nach der Mitte des Fernrohrobjectivs, so war der Winkel dieser beiden Sehrichtungen das Doppelte des Einfallswinkels.

Die Lage der Keilschneide ist an dem Blättchen äusserlich durch nichts kenntlich gemacht; daher musste sie zunächst ermittelt werden. Das geschah auf Grund folgender Ueberlegung. Die Interferenzerscheinung muss symmetrisch zu beiden Seiten der Einfallsebene liegen, sobald die Keilschneide senkrecht auf der Einfallsebene steht; und zwar

müssen die Interferenzstreifen in diesem Falle sowohl nach unserer, als nach der Feussner'schen Theorie senkrecht zur Einfallsebene, und somit parallel der Keilkante, verlaufen. Man stellt also einen Faden des Fernrohrfadenkreuzes senkrecht zur Einfallsebene, was wegen Horizontalität derselben einfach durch Deckung mit einem anvisirten Senkel bewirkt wird, und dreht nun das Keilblättchen in seiner Ebene so lange, bis die Interferenzstreifen mit diesem Faden parallel, also vertical laufen, so liegt die Keilschneide jetzt ebenfalls vertical. — Bei Ausführung von zehn oder mehr solchen Einstellungen zur Ermittelung der Lage der Keilschneide betrug der wahrscheinliche Fehler des Resultates bei verschiedenen Versuchsreihen durchschnittlich 0,2°. Es gibt zwei um 180° verschiedene Lagen des Blättchens, bei denen die Streifen, und somit die Keilschneide, senkrecht zur Einfallsebene stehen; bei der einen Lage ist die Keilschneide, von der Blättchenmitte aus gerechnet, auf der entgegengesetzten Seite als die Lichtquelle, bei der anderen Lage auf derselben Seite. Die erstere Lage („Keilschneide lichtfern") dient als Anfangslage und wird als „Azimuth 0" bezeichnet. Von dieser Anfangsstellung aus wird das Blättchen nacheinander um verschiedene Winkel in seiner Ebene gedreht und jedesmal die Drehung der Interferenzstreifen im Fernrohr gemessen. Der Winkel, den die Keilschneide in einer späteren Lage mit ihrer Anfangslage einschliesst, heisst das Azimuth.

Es zeigt sich, dass die Streifen um so undeutlicher werden, je näher das Azimuth dem Werthe ±90° liegt. Bei letzterem Azimuth sind die Streifen meist überhaupt nur bei schiefem Hineinsehen ins Fernrohr, d. h. bei Abblendung eines Theiles der aus dem Fernrohr austretenden Strahlen allenfalls leidlich wahrzunehmen, sodass die Einstellungen des Fadens parallel diesen Streifen in sehr hohem Grade unsicher sind. Aus diesem Grunde sind die Beobachtungen beim Azimuth 90° aus den folgenden Tabellen weggelassen, und es sei nur bemerkt, dass für dieses Azimuth die Drehung der Streifen aus ihrer Anfangslage beim Azimuth 0 heraus jedenfalls nicht sehr verschieden von 90° war.

Alle Beobachtungen dieses Paragraphen werden mit vier verschiedenen theoretischen Formeln des § 2 verglichen, nämlich mit:

$$(18)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta} + \frac{H(\varrho_1-\varrho)}{E\varrho_1+E_1\varrho}\cdot\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\mu\,.\,n^2\cos^2\vartheta_1}$$

(Endformel unserer Theorie),

$$(9_b)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta}$$ (Perspectivische Formel),

$$(9_a)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta} + \frac{H}{E}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\mu\,.\,n^2\cos^2\vartheta_1}$$

(Feussner's Formel für sehr breite Lichtquelle),

$$(9_c)\qquad \operatorname{tg}\chi = -\frac{\cos\mu}{\sin\mu\cos\vartheta} - \frac{H}{E_1}\,\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sin\mu\,.\,n^2\cos^2\vartheta_1}$$

(Feussner's Formel für punktförmige Lichtquelle).

Hier ist χ der ∢ der Streifen mit der Einfallsebene des centralen Strahles, ϑ und ϑ_1 der Einfallswinkel und Brechungswinkel des letzteren, μ das Azimuth, n der Brechungsquotient aus Luft in die Blättchensubstanz, H der Abstand der Blättchenmitte von der Keilschneide, E und E_1 die Abstände der Blättchenmitte vom Beobachtungsobjectiv und von der Lichtquelle, ϱ und ϱ_1 die Radien des Objectivs und der Lichtquelle.

Wir wenden uns nun zur Mittheilung der Beobachtungsergebnisse.

1) Die erste Versuchsreihe war nur eine mehr vorläufige. Es wurde aus drei Entfernungen E des Fernrohrobjectivs von der Blättchenmitte beobachtet, die sich angenähert wie 1:2:3 verhielten, nämlich aus 1385 mm, 2875 mm, 4220 mm. Bei diesen drei Entfernungen nahm die grosse Axe des mit den Interferenzstreifen erfüllten Blättchenstückes bezüglich etwa 0,14 0,07 0,05 der Oeffnung des Gesichtsfeldes ein. Nahezu dieselben Werthe gelten bei der nachher mitzutheilenden Versuchsreihe. Der Abstand der Blättchenmitte von der Lichtquelle betrug $E_1 = 2150$ mm, der Einfallswinkel $\vartheta = 64{,}5^0$. Das Blättchen wurde nacheinander in die Azimuthe $\mu = -30^0$, $+30^0$, $+60^0$, $+120^0$ eingestellt und die zugehörigen Drehungen der Streifen gegen ihre Stellung beim Azimuth 0^0 gemessen. Bei jedem Azimuth

wurden in allen Beobachtungsreihen mindesten sechs, oft aber auch doppelt soviel Einstellungen des Fadens auf gleiche Richtung mit den Streifen gemacht. Die folgende Tabelle enthält als Beispiel für das Verfahren sämmtliche bei der Entfernung 1385 mm gemachten Ablesungen am Ocularkreise.

Tabelle I.

Azimuth : −30°	+30°	+60°	+120°
212,6°	185,4°	162,8°	60,0°
213,0	185,8	163,0	56,5
213,5	185,8	163,3	57,5
212,2	185,7	163,9	57,7
212.5	185,8	163,8	57,0
212,9	185,8	163,2	58,4
—	—	—	57,1
—	—	—	58,0
—	—	—	57,0
Mittel: 212,78	185,72	163,33	57,69

Infolge der Kürze der Interferenzstreifen ist es schwierig, zu beurtheilen, ob der Faden des Fadenkreuzes genau in gleiche Richtung mit ihnen eingestellt ist. Daher weichen verschiedene Einstellungen derselben Streifen hier (und so bei allen Beobachtungsreihen) bisweilen um mehrere Grade voneinander ab. Also wäre es überflüssig gewesen, nach grösserer Genauigkeit der Ablesungen zu streben, als welche bei unserer Einrichtung möglich war (nämlich bis auf Zehntelgrade).

Vor Anstellung der mitgetheilten Beobachtungen war als diejenige Einstellung des Ocularkreises, bei welcher der eine Faden des Fadenkreuzes ein in passender Entfernung aufgehängtes Senkel zu decken schien, die Stellung 199,57° ermittelt. Also ergeben die Unterschiede der obigen Einstellungen gegen 199,57° die gesuchten Streifendrehungen; sie betragen:

$$-13,21^0 \quad +13,85^0 \quad +36,24^0 \quad +141,88^0.$$

Auf diese Art sind alle im Folgenden angeführten Drehwinkel der Streifen ermittelt. — Sowie im Obigen die absoluten Werthe der Drehungen bei den Azimuthen −30° und +30° etwas verschieden gefunden sind (13,21 und 13,85°), so

ergaben sie sich auch bei den beiden grösseren Entfernungen jedesmal als nicht ganz gleich, nämlich 13,67 und 13,77° bei 2875 mm Entfernung; 13,59 und 13,95° bei 4220 mm Entfernung. Diese Verschiedenheit der Streifendrehung bei gleichem, aber entgegengesetztem Azimuth erklärt sich — abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern — aus der möglicherweise etwas fehlerhaften Bestimmung der Lage der Keilschneide und somit des Azimuths 0, wodurch die beiden entgegengesetzten Azimuthe in Wahrheit nicht absolut gleich sind; sowie ferner aus dem Umstande, dass die Vorderfläche des Blättchens beim Drehen nicht absolut vertical blieb, weil die Drehaxe nicht tadellos senkrecht zu dieser Fläche stand. Von dieser Unsymmetrie befreit man sich durch Vereinigung der beiden bei entgegengesetzt gleichen Azimuthen beobachteten absoluten Drehwinkel zu einer Mittelzahl. Nur bei dieser ersten vorläufigen Beobachtungsreihe ist nicht durchgängig bei je zwei entgegengesetzt gleichen Azimuthen beobachtet worden. — Die Ergebnisse der ersten Beobachtungsreihe sind in folgender Tabelle zusammengestellt; sie enthält die Drehungswinkel der Streifen aus der beim Azimuth 0° stattfindenden Anfangslage heraus für drei verschiedene Entfernungen des Fernrohres und für drei verschiedene Azimuthe. Die drei Entfernungen (in Millimetern) finden sich in der ersten Horizontalreihe, die Azimuthe in der ersten Verticalreihe. Ferner enthält die Tabelle die Differenzen (Δ) der beobachteten Werthe gegen die nach unserer Theorie (Formel (18)) berechneten und gegen die nach der Feussner'schen Theorie (Formel (9_a)) berechneten. (Δ = berechnet minus beobachtet).

Tabelle II.

μ	1385	Δ_{18}	Δ_{9a}	2875	Δ_{18}	Δ_{9a}	4220	Δ_{18}	Δ_{9a}
30°	13,53°	+0,33°	+1,19°	13,72°	+0,16°	+0,59°	13,77°	+0,13°	+0,42°
60	36,24	+0,11	+3,22	36,15	+0,29	+1,82	36,98	−0,49	+0,58
120	141,88	+1,05	+3,84	141,86	+1,16	+2,61	142,82	+0,25	+1,28

Die Beobachtungen für die beiden kleineren Entfernungen lassen keinen ausgesprochenen Einfluss der Entfernung erkennen; dagegen erscheinen die Drehungen bei der

grössten Entfernung durchgängig etwas grösser, als bei den beiden kleineren. Dies ist in Uebereinstimmung mit unserer Theorie, widerstreitet aber der Feussner'schen. In Gl. (18) wird nämlich, wegen $\varrho_1 = 15$ und $\varrho = 22$, das zweite Glied der rechten Seite negativ, während das entsprechende Glied der Gl. (9_a) positiv ist. Während also nach Feussner die Streifendrehung mit unendlich wachsender Entfernung abnehmen müsste bis zu der von der perspectivischen Formel (9_b) geforderten Drehung, muss sie nach unserer Formel und bei unseren Versuchsbedingungen bis zu demselben Werthe zunehmen. Hiermit stimmt überein, dass sämmtliche nach (9_a) berechneten Werthe zu gross sind, zum Theil um sehr erhebliche Beträge, während die nach unserer Theorie berechneten Drehungen den beobachteten weit näher kommen. — Weil der Einfluss der Entfernung sich nach den Beobachtungen als sehr gering herausstellt (nach Gl. (18) noch etwas geringer), so möge noch das arithmetische Mittel der bei verschiedenen Entfernungen, aber gleichem Azimuth, beobachteten Drehungen verglichen werden mit dem arithmetischen Mittel der nach unserer Theorie berechneten Drehungen, ferner mit dem arithmetischen Mittel der nach (9_a) berechneten Werthe, sowie mit den Werthen, die sich aus der perspectivischen Formel (Gl. (9_b)), und endlich bei punktförmiger Lichtquelle (Gl. (9_c)) ergeben würden. Die folgende Tabelle enthält die Mittel der beobachteten Drehungen, sowie die Differenzen $\varDelta$ dieser Werthe gegen die nach den vier Formeln berechneten. ($\varDelta$ = berechnet minus beobachtet).

Tabelle III.

$\vartheta = 64{,}5^0$.

μ	Drehung beobachtet	$\varDelta_{18}$	$\varDelta_{9a}$	$\varDelta_{9b}$	$\varDelta_{9c}$
30°	13,67°	+0,21°	+0,73	+0,29	−0,15
60	36,46	−0,03	+1,87	+0,26	−1,31
120	142,19	+0,82	+2,58	+1,09	−0,59

Hiernach schliesst sich unsere Theorie den Beobachtungen am besten an; fast ebenso gut werden sie durch die

perspectivische Formel dargestellt (Differenzen Δ_{sb}); die nach der Feussner'schen Formel (9_a) berechneten Drehungen sind sämmtlich zu gross, die nach der Feussner'schen Formel (9_c) berechneten sämmtlich zu klein.

2) Zweite Versuchsreihe. Es wurde nacheinander aus den Entfernungen 1367 mm, 2755 mm, 4215 mm, die sich angenähert = 1:2:3 verhalten, beobachtet. Die geringste Entfernung, bei welcher mit dem benutzten Fernrohr ein Gegenstand noch deutlich gesehen werden kann, ist etwa 1200 mm. Weil aber die Interferenzerscheinung im allgemeinen ihren Ort nicht im Blättchen hat, vielmehr bei gewissen Azimuthen um beinahe 100 mm näher an den Beobachter heranrückt (vgl. § 6), so durfte mit dem Fernrohr nicht wesentlich näher als bis auf obige 1367 mm an das Blättchen herangegangen werden. Die Entfernung der Lichtquelle von der Blättchenmitte war 3660 mm; der Einfallswinkel 42° 31,1′. Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Winkel der Streifen gegen ihre Anfangsrichtung (beim Azimuth 0), für die drei Entfernungen und für acht, paarweise entgegengesetzte, Azimuthe. Die Entfernungen stehen in der ersten Horizontalreihe, die Azimuthe in der ersten Verticalreihe.

Tabelle IV.

	1367 mm	2755 mm	4215 mm		1367 mm	2755 mm	4215 mm
−30°	−22,52°	−23,16°	−22,84°	−120°	−126,30°	−127,71°	−127,35°
+30	+23,01	+22,86	+22,97	+120	+126,50	+127,15	+127,32
−60	−50,90	−51,82°	−51,52	−150	−157,92	−158,20	−158,20
+60	+51,30	+51,76	+52,08	+150	+157,00	+156,70	+157,05

Vereinigt man die bei je zwei gleichen, aber entgegengesetzten Azimuthen beobachteten absoluten Werthe jedesmal zu einer Mittelzahl, so erhält man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Drehungen. Daneben sind die Differenzen dieser beobachteten Werthe gegen die nach unserer Theorie (Gl. (18)) und nach Feussner (Gl. (9_a)) berechneten Werthe angegeben (wie in Tab. II).

Tabelle V.

μ	1367	$\varDelta_{18}$	$\varDelta_{9a}$	2755	$\varDelta_{18}$	$\varDelta_{9a}$	4215	$\varDelta_{18}$	$\varDelta_{9a}$
30°	22,76°	+0,11°	+2,42°	23,01°	−0,11°	+0,96°	22,90°	+0,02°	+0,80°
60	51,10	+0,40	+5,70	51,79	−0,22	+2,48	51,80	−0,18	+1,65
120	126,40	+1,23	+5,98	127,43	+0,28	+2,85	127,33	+0,44	+2,20
150	157,46	−0,70	+1,31	157,45	−0,66	+0,43	157,62	−0,80	−0,05

Die bei der grössten Entfernung beobachteten Drehungen sind durchgängig grösser als die bei der kleinsten Entfernung; auch die Beobachtungen bei mittlerer Entfernung geben fast bei allen Azimuthen stärkere Drehungen, als die bei der kleinsten. Die nach Feussner berechneten Drehungen sind mit einer einzigen Ausnahme erheblich zu gross, während die nach unserer Theorie berechneten viel kleinere Abweichungen, und zwar bald positive, bald negative, gegenüber den Beobachtungen zeigen. Der Einfluss der Entfernungsänderung ist übrigens wieder nur gering, sodass aus den Drehungen bei verschiedenen Entfernungen, aber gleichem Azimuth, wieder das arithmetische Mittel gebildet und in der Tab. VI mit den nach den beiden Formeln berechneten Mitteln verglichen werden soll; auch die Abweichungen der perspectivischen Formel und der zweiten Feussner'schen Formel von den Beobachtungen stehen in derselben Tabelle (entsprechend wie in Tab. III).

Tabelle VI.

$\vartheta = 42{,}52^{\circ}$.

μ	Drehung beobachtet	$\varDelta_{18}$	$\varDelta_{9a}$	$\varDelta_{9b}$	$\varDelta_{9c}$
30°	22,89°	+0,01°	+1,39°	+0,16°	−0,56°
60	51,56	±0,00	+3,28	+0,37	−1,30
120	127,05	+0,65	+3,68	+1,02	−0,73
150	157,51	−0,72	+0,56	−0,56	−1,33

Aus dieser Tabelle geht zweifellos hervor, dass die Beobachtungen am genauesten durch die Formel (18) unserer Theorie dargestellt werden, durch die perspectivische Formel (9_b) schon etwas ungenauer. Alle nach Feussner's Formel (9_a) berechneten Werthe sind erheblich zu gross, alle nach

seiner zweiten Formel (9_a) berechneten Werthe sind zu klein, und zwar zum Theil um recht bedeutende Beträge.

Nachdem durch diese beiden Versuchsreihen festgestellt war, dass bei unserer Versuchsanordnung ein Einfluss der Entfernung auf die Richtung der Streifen zwar vorhanden, sowie unsere Theorie verlangt, dass er aber höchst unbedeutend ist und durch die Beobachtungsfehler beinahe verdeckt wird (was ebenfalls mit der Theorie übereinstimmt), beschränkten wir uns bei den folgenden beiden Versuchsreihen auf Beobachtungen aus ungeänderter Entfernung. Unter solchen Umständen schien es uns aber bequemer, bei verticaler Einfallsebene zu beobachten. Um jetzt das Azimuth zu bestimmen, legten wir das Keilblättchen auf den horizontalen drehbaren Tisch eines Meyerstein'schen Spectrometers, sodass die obere Blättchenfläche möglichst horizontal war. Die Stellung des Tischchens — und folglich das Azimuth — war nun wesentlich genauer ablesbar als bei den vorigen Versuchen. Zur Bestimmung des Azimuthes 0 wurde jetzt folgendermassen verfahren. Dem Fernrohr wurde die gewünschte Neigung gegen den Horizont ertheilt; dann musste, bei passender Oculareinstellung und richtiger Aufstellung der Lichtquelle, die letztere in der Blättchenoberfläche gespiegelt erscheinen. Der Spectrometertisch wurde nun so gedreht, dass die Interferenzstreifen angenähert horizontal (und somit senkrecht zur Einfallsebene) verliefen; und das Ocularrohr wurde so weit ausgezogen, dass die Erscheinung so deutlich wie möglich war. Dann hängte man ein Senkel so auf, dass es im (unveränderten) Fernrohr ebenfalls deutlich erschien, und brachte nun durch Drehung des Ocularrohres einen Faden des Fadenkreuzes zur Deckung mit dem Senkel. Dann verlief der andere Faden horizontal; nämlich der Winkel beider Fäden wich nicht merklich von einem Rechten ab. Schliesslich wurde der Spectrometertisch gedreht, bis die Interferenzstreifen mit diesem Horizontalfaden parallel liefen. Die letzteren Einstellungen wurden in grosser Zahl gemacht, um das Azimuth 0 möglichst sicher zu ermitteln; doch blieb das Ergebniss immerhin unsicherer als zu wünschen gewesen wäre; nämlich verschiedene solche

Einstellungen wichen nicht selten um 3 bis 4° voneinander ab. — Die Bestimmung des Einfallswinkels geschah in Ermangelung feinerer Vorrichtungen einfach in der Weise, dass der Winkel der Fernrohraxe gegen ein von dem Fernrohr herabhängendes Senkel an einem angelegten Theilkreise abgelesen wurde, wobei keine grössere Genauigkeit als bis auf $^1/_4{}^0$ erreicht sein dürfte.

3) Dritte Versuchsreihe. Einfallswinkel $\vartheta = 68^0$; Entfernung E_1 der Lichtquelle von der Blättchenmitte 1330 mm; Entfernung E des Objectivglases von der Blättchenmitte = 1670 mm. Die grösste Dimension der Erscheinung nahm etwa 0,12 der Oeffnung des Gesichtsfeldes ein. Die folgende Tabelle enthält die bei Veränderung des Azimuths um je $22^1/_2{}^0$ eintretenden Drehungen der Streifen aus ihrer Anfangslage (Azimuth 0) heraus, und zwar in der oberen Zeile für positive, in der unteren Zeile für negative Azimuthe.

Tabelle VII.

Azimuth	22½°	45°	67½°	112½°	135°	157½°	180°
Drehung	8,60°	20,54°	44,35°	139,53°	159,91°	171,54°	180,38°
Drehung	8,80	20,16	42,36	136,09	158,67	170,70	179,93

Die Streifen sind sehr deutlich bei den Azimuthen $\pm 22^1/_2$ und $\pm 157^1/_2{}^0$; merklich verschwommener bei den Azimuthen ± 45 und $\pm 135^0$; höchst verschwommen aber, und nur bei schiefem Hineinsehen ins Fernrohr etwas deutlicher wahrnehmbar bei den Azimuthen $\pm 67^1/_2$ und $\pm 112^1/_2{}^0$. Endlich beim Azimuth $\pm 90^0$ ist die Erscheinung überhaupt kaum noch messbar. Aus dieser zunehmenden Undeutlichkeit erklärt es sich, dass der Unterschied der bei gleichen, aber entgegengesetzten Azimuthen beobachteten Drehungen um so grösser ist, je näher die Azimuthe an $\pm 90^0$ liegen. Die folgende Tabelle enthält die arithmetischen Mittel der bei zwei entgegengesetzt gleichen Azimuthen beobachteten Drehungen unter der Ueberschrift „Drehung beobachtet", ferner die Differenzen der nach unserer Theorie Gl. (18) und den drei anderen theoretischen Formeln (9_a, 9_b, 9_c) berechneten Werthe gegen die beobachteten. Zu der Berech-

nung nach unserer Formel ist zu bemerken, dass die Einführung des Radius der Lichtquelle $\varrho_1 = 15$ hier etwas fehlerhaft gewesen sein würde, weil der Schirm mit der kreisförmigen Oeffnung vertical stand, sodass er mit E_1 einen Winkel von 68° bildete. Weil nun die Theorie nur für den Fall einer auf E_1 senkrechten kreisförmigen Lichtquelle entwickelt ist, so halfen wir uns in der Weise, dass wir den Kreis ϱ_1 auf die zu E_1 normale Ebene projicirten und das Mittel der Halbaxen der Projectionsellipse = 14,45 als Radius einer hypothetischen kreisförmigen, auf E_1 senkrechten Lichtquelle betrachteten. Würde man übrigens statt dieses Werthes ($\varrho_1 = 14,45$) unmittelbar den Radius $\varrho_1 = 15$ des Schirmloches benutzen, so fände man nur um einige Hundertelgrade andere Drehungen.

Tabelle VIII.

$\vartheta = 68,0°$.

μ	Drehung beobachtet	Δ_{18}	Δ_{9a}	Δ_{9b}	Δ_{9c}
22½°	8,70°	+0,05°	−0,58°	+0,12°	−0,23°
45	20,35	0,00	+1,03	+0,18	−0,79
67½	43,35	−1,76	+1,16	−1,22	−3,93
112½	137,81	−0,48	+2,25	+0,07	−2,96
135	159,29	−0,02	+0,96	+0,18	−0,90
157½	171,12	−0,01	+0,34	+0,06	−0,32
180	180,15	−0,15	−0,15	−0,15	−0,15

Am wenigsten treffen die beiden Feussner'schen Formeln (9_a und 9_c) zu; besonders ist zu bemerken, dass alle nach der letzteren berechneten Drehungen zu klein sind. Unsere Formel (18) stimmt etwa gleich gut wie die perspectivische (9_b) mit den Beobachtungen überein, wenigstens für alle Azimuthe, bei denen die Streifen noch deutlich sind.

4) Vierte Versuchsreihe. Einfallswinkel $\vartheta = 66°$; Entfernung E_1 der Lichtquelle von der Blättchenmitte etwa = 1350 mm; Entfernung E des Objectivglases von derselben = 1490 mm. Die grösste Dimension der Erscheinung beträgt etwa 0,13 der Oeffnung des Gesichtsfeldes. Die folgende Tabelle enthält die bei Veränderung des Azimuthes um je 15° beobachteten Streifendrehungen, und zwar in der

oberen Zeile für positive, in der unteren für negative Azimuthe.

Tabelle IX.

Azimuth	15°	30°	45°	60°	75°	105°
Drehung	6,03°	12,83°	22,48°	36,50°	61,95° (?)	129,05° (?)
Drehung	6,03	12,50	21,58	34,27	56,35 (?)	122,90

Azimuth	120°	135°	150°	165°	180°
Drehung	147,04°	159,12°	167,37°	174,20°	180,3°
Drehung	143,76	156,46	165,68	173,20	—

Bei den Azimuthen ± 75 und ± 105° war die Erscheinung so undeutlich und so veränderlich, je nachdem man mehr oder weniger schief ins Fernrohr hineinsah, dass diesen Beobachtungen nur ein sehr geringer Werth zukommt. Aus dieser Verschwommenheit erklärt sich auch die starke Verschiedenheit der bei entgegengesetzt gleichen Azimuthen gefundenen Drehungen. Indessen sind auch bei den übrigen Azimuthen die Unterschiede der paarweise als gleich zu erwartenden Drehungen etwas grösser als bei den früheren Beobachtungsreihen. Diese Unvollkommenheit wird wenigstens der Hauptsache nach dadurch unschädlich gemacht, dass man das arithmetische Mittel der beiden je übereinander stehenden Drehungen als „beobachtete Drehung" nimmt. Zu der folgenden Tabelle, welche wie Tab. VIII eingerichtet ist, ist nur noch zu bemerken, dass als Radius der Lichtquelle $\varrho_1 = 14{,}35$ mm, statt 15,0, angenommen ist, aus denselben Gründen. wie bei der vorigen Versuchsreihe.

Tabelle X.

$\vartheta = 66{,}0^{\circ}$.

μ	Drehung beobachtet	Δ_{18}	Δ_{9a}	Δ_{9b}	Δ_{9c}
15°	6,03°	+0,13°	+0,45°	+0,19°	−0,07°
30	12,67	+0,42	+1,15	+0,55	−0,06
45	22,03	−0,15	+1,25	+0,10	−1,06
60	37,38	−0,68	+1,97	−0,21	−2,42
75	59,15	−3,41	+1,57	−2,53	−6,70
105	125,97	−3,49	+1,15	−2,59	−7,21

μ	Drehung beobachtet	Δ_{18}	Δ_{9a}	Δ_{9b}	Δ_{9c}
120°	145,40°	−1,04°	+1,41°	−0,56°	−3,04°
135	157,79	−0,17	+1,12	+0,08	−1,21
150	166,58	+0,12	+0,80	+0,25	−0,41
165	178,70	+0,02	+0,32	+0,08	−0,21
180	180,30	−0,30	−0,30	−0,30	−0,30

Auch hier bewähren sich die beiden Feussner'schen Formeln am wenigsten (Differenzen Δ_{9a} und Δ_{9c}); dagegen werden die Beobachtungen — wenn man von denjenigen bei den Azimuthen 75 und 105° wegen ihrer grossen Unzuverlässigkeit absieht — durch unsere Formel befriedigend dargestellt (Differenzen Δ_{18}); mindestens ebenso gut freilich auch durch die perspectivische Formel (Differenzen Δ_{9b}). Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass bei dieser Versuchsreihe die Entfernung der Lichtquelle nicht gemessen war, sondern erst nachträglich angenähert ermittelt wurde. Sie ist vermuthlich etwas zu klein angenommen; bei Vergrösserung derselben würde die Uebereinstimmung unserer Formel mit den Beobachtungen noch besser werden; gleichzeitig würden übrigens auch die Abweichungen der zweiten Feussner'schen Formel von den Beobachtungen sich etwas vermindern.

Das Gesammtergebniss dieser vier Versuchsreihen lässt sich dahin aussprechen, dass alle Beobachtungen unsere Theorie bestätigen, während sie weder mit der ersten, noch mit der zweiten Feussner'schen Formel übereinstimmen. Bezüglich seiner ersten Formel ist Hr. Feussner mit uns einverstanden und erklärt (offenbar zutreffend) die Nichtübereinstimmung aus der Verschiedenheit der bei uns eingehaltenen und der von ihm vorausgesetzten Bedingungen. Aber im Hinblick auf seine zweite Formel behauptet er[1]), dass unsere „Versuche seiner Theorie keineswegs widersprechen, sondern mit ihr im besten Einklange sind.“ Dieses ist, wie aus obigen Tabellen zu ersehen, nicht der Fall. Abgesehen davon, dass die Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Drehungen bei dieser Formel durchschnittlich erheblich grösser aus-

1) Feussner, Marburg. Sitzungsber. 1882. p. 5.

fallen, als bei unserer Theorie, so spricht namentlich noch der Umstand gegen die Zulässigkeit dieser Feussner'schen Formel, dass sämmtliche nach ihr berechneten Werthe ohne Ausnahme zu klein sind.

§ 5. Beobachtungen der Richtung der Interferenzstreifen bei verkleinertem Objectiv, sowie mit unbewaffnetem Auge.

Nachdem sich die Gl. (18) (§ 2) unserer Theorie durch Beobachtungen bei verschiedenen Azimuthen sowohl bei fester als bei veränderter Entfernung gut bewährt hatte, schien es nicht unwichtig, auch noch die von der Theorie angezeigte Abhängigkeit der Streifenrichtung von der Grösse der Oeffnung des Beobachtungsobjectivs experimentell zu prüfen. Zu dem Zweck bestimmte man für jedes von fünf Azimuthen die Drehung der Streifen aus der beim Azimuth 0 stattfindenden Lage heraus zunächst bei unverändertem Objectiv ($\varrho = 22{,}0$ mm), und dann nach Beschränkung des Objectivs auf eine Kreisöffnung von $\varrho = 7{,}5$ mm (durch ein vorgesetztes Diaphragma). Die in beiden Fällen beobachteten Drehungen, sowie die Ueberschüsse Δ der nach unserer Theorie berechneten über die beobachteten, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Jede beobachtete Drehung ist das Mittel aus zwölf bis zwanzig Einzelbestimmungen. Es war der Einfallswinkel $\vartheta = 70{,}75^0$, die Entfernungen E des Objectivs und E_1 der Lichtquelle vom Blättchen: $E = 1530$ mm, $E_1 = 1240$ mm, der Radius ϱ_1 der Lichtquelle $= 14{,}58$ mm (vgl. dazu den Text zu Tabelle VIII); ϱ erst $= 22{,}0$, dann $= 7{,}5$ mm.

Tabelle XI.

	$\varrho = 22{,}0$ mm		$\varrho = 7{,}5$ mm	
Azimuth μ	Drehung beobachtet	Δ	Drehung beobachtet	Δ
22,5°	7,69°	+0,04°	7,79°	+0,06°
30	10,31	+0,39	10,53	+0,36
45	17,72	+0,38	18,39	+0,08
135	161,64	−0,04	162,04	−0,07
157,5	171,99	+0,18	172,50	−0,20

Aus den Zahlen dieser Tabelle bilden wir jetzt die Zunahme der Drehung bei Verkleinerung des Objectivs von 22,0 mm auf 7,5 mm Radius und stellen neben die beobachteten Zunahmen die berechneten.

Tabelle XII.

Azimuthe μ		22,5°	30°	45°	135°	157,5°
Zunahme der Drehung	beobachtet	0,10°	0,22°	0,67°	0,40°	0,51°
	berechnet	0,12	0,19	0,37	0,37	0,18

Wie man sieht, ist die Zunahme der Drehung, trotz ihrer Geringfügigkeit — infolge deren sie unter den Beobachtungsfehlern fast versteckt bleiben zu müssen schien — für alle Azimuthe zweifellos beobachtet, zum Theil sogar sehr annähernd in dem theoretisch geforderten Betrage.

Bei noch weiterer Verkleinerung des Beobachtungsobjectivs bis auf einen Kreis von 4,5 mm Radius war die Erscheinung wegen Lichtschwäche nur noch sehr schwer zu verfolgen; doch überzeugten wir uns wenigstens für ein Azimuth (30°), dass die Drehung der Streifen noch zunahm, wie es die Theorie verlangt. Der Betrag der beobachteten Zunahme kann freilich keinen Anspruch auf Genauigkeit machen. In der folgenden Tabelle sind die beim Azimuth 30° und bei drei verschiedenen Oeffnungen des Instrumentes beobachteten Drehungen und die daraus folgenden Zunahmen zusammengestellt, desgleichen die berechneten Drehungen und die Ueberschüsse Δ der berechneten über die beobachteten.

Tabelle XIII.

ϱ	Beobachtete Drehung	Beobachtete Zunahme	Berechnete Drehung	Berechnete Zunahme	Δ
22,0 mm	10,31°		10,70°		+0,39°
		0,22°		0,19°	
7,5	10,53		10,89		+0,36
		0,50		0,07	
4,5	11,03		10,96		—0,07

Durch alle diese Beobachtungen bei verkleinertem Objectiv scheint uns die theoretische Gl. (18) (§ 2) auch von dieser Seite her in befriedigender Weise bestätigt zu sein.

Im Anschlusse an diesen Nachweis des Einflusses der

Objectivöffnung sei noch bemerkt, dass die von Hrn. Feussner beobachtete stärkere Drehung der Streifen[1]) ihre Erklärung vermuthlich ebenfalls darin finden wird, dass sein Fernrohr eine wesentlich kleinere Oeffnung hatte, als unseres (denn die letztere ist ungewöhnlich gross), während gleichzeitig seine Lichtquelle sehr ausgedehnt war, sodass $\varrho_1 - \varrho$ positiv war. Dadurch musste das zweite Glied unseres Ausdruckes für tg χ einen positiven Werth erhalten, sowie das entsprechende Glied der Feussner'schen Formel (9_a, § 2), während es bei unserer Versuchsanordnung im allgemeinen negativ war. Indem nun noch E und E_1 bei Feussner's Versuchen wesentlich kleiner waren, als bei den unsrigen, musste dieses Glied auch einen stärkeren Einfluss erlangen, als bei uns.

Beobachtungen mit freiem Auge. Hr. Feussner hat zuerst auf die Erscheinung aufmerksam gemacht, dass die Interferenzstreifen, welche ein im Azimuth 90° liegendes keilförmiges Blättchen, beleuchtet durch eine einfarbige Lichtquelle, bei Beobachtung mit unbewaffnetem Auge aus deutlicher Sehweite zeigt, keineswegs parallel der Keilschneide verlaufen, sondern einen grossen Winkel mit ihr bilden. Diese sehr auffällige Erscheinung lässt kaum genauere Messungen zu; wir versuchten aber wenigstens, einige Schätzungen der Streifenrichtung auszuführen. Dazu musste zunächst die Lage der Keilschneide sichtbar gemacht werden. Man bestimmte also die Richtung der Schneide auf die in § 4 dicht vor der dritten Versuchsreihe beschriebene Art. Wenn nun das Blättchen im Azimuth 0 auf dem Spectrometertisch lag, und die Interferenzstreifen, die ja jetzt zur Keilkante parallel liefen, im Fernrohr scharf gesehen wurden, spannte man einen Coconfaden mitten über das kreisförmige Loch des schwarzen Deckpapiers des Blättchens so genau als möglich parallel den Interferenzstreifen. Dann hatte dieser Faden also ebenfalls die Richtung der Keilschneide. Darauf drehte man das Blättchen in das Azimuth $\mu = 90^0$ und ging nun mit dem freien Auge bis zur deutlichen Sehweite (250 mm)

1) Feussner, Marburger Sitzungsber. 1881. p. 1—24. Auch Wied. Ann. 14. p. 570. 1881.

an das Blättchen heran. Der Einfallswinkel war etwa 68°, die Entfernung der Lichtquelle vom Blättchen etwa 300 mm. Jetzt machten die Interferenzstreifen einen Winkel von etwa 20° (bis 25°) mit dem Coconfaden. Ihre Richtung war schräg nach rechts vom Beobachter weg, wenn die Keilschneide links lag (Fig. 7_a), dagegen nach links, wenn die Schneide rechts lag (Fig. 7_b). Der Coconfaden wurde nur von drei oder vier Streifen geschnitten. Die Erscheinung lag etwa in der Ebene des Blättchens selbst. Entfernte man sich weiter vom Blättchen, so nahm der Winkel der Streifen gegen den Faden ab; näherte man sich aber dem Blättchen, so nahm der Winkel stark zu; er mochte etwa 60° betragen, wenn man bis auf ungefähr 25 mm herangekommen war. In der folgenden Tabelle sind diese schätzungsweise bestimmten Winkel χ mit den nach unserer Gl. (18 § 2) und mit den nach Feussner's Gl. (9_a § 2) berechneten Werthen zusammengestellt. Dabei ist der Radius der Pupille = 2 mm angenommen. Zum Vergleich ist auch noch der Winkel angegeben, den die Streifen in unserem Fernrohr, aus 1670 mm Entfernung gesehen, machen müssten. Messbar ist letzterer Winkel wegen Undeutlichkeit der Erscheinung nicht; nur soviel liess sich erkennen, dass die Streifen mit dem Faden ungefähr gleiche Richtung hatten.

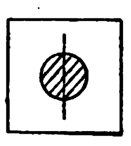


Fig. 7_a.

Fig. 7_b.

Tabelle XIV.

E	χ beob.	χ ber. n. Gl. (18) $\varrho = 2$	χ ber. n. (9_a)
25 mm	60°	61,2°	79,6°
250	20° (–25°)	22,2	28,6
350	<20	16,9	21,3
1670	0° (?)	1,01	4,7

Die Feussner'schen Zahlen sind auch hier grösser, als die beobachteten, während die nach unserer Theorie berechneten mit den geschätzten Werthen recht befriedigend übereinstimmen. Berechnet man den Winkel nach unserer Theorie

unter Annahme einer sehr viel breiteren Lichtquelle, indem man $\varrho_1 = 30$ mm setzt, statt $= 15$, so findet er sich $= 25{,}2^0$, also immer noch in genügender Uebereinstimmung mit der Beobachtung. Bei kleinerem Einfallswinkel waren die Erscheinungen keine wesentlich anderen; in der That gibt unsere Theorie bei $\vartheta = 45^0$ für die obigen drei Entfernungen folgende Winkel $64{,}5^0$ $25{,}1^0$ $19{,}2^0$, welche mit den vorher bei $\vartheta = 68^0$ geschätzten immer noch leidlich gut übereinstimmen. — Unsere Theorie erklärt somit auch die mit freiem Auge wahrnehmbaren Erscheinungen des Keiles vollkommen befriedigend.

§ 6. Der Ort der Interferenzstreifen im Raume.

Unter dieser Bezeichnung soll der Punkt verstanden werden, auf den das Beobachtungsinstrument einzustellen ist, damit die Erscheinung so deutlich als möglich gesehen werde. So lange dieser Punkt hinter dem Blättchen liegt, kann die Interferenz natürlich nur virtuell sein, (dies Wort wie in der geometrischen Optik verstanden). Liegt er aber vor dem Blättchen, so ist man nach unserer Theorie berechtigt, wenigstens die in der Mitte des Gesichtsfeldes beobachtete Interferenzerscheinung für eine in jenem Punkte reell stattfindende zu halten. Dies wurde für das Azimuth 0 (d. h. Keilschneide lichtfern) auch experimentell bewiesen. Man beobachtete nämlich die bei Beleuchtung mit Natriumlicht unter dem Einfallswinkel $\vartheta = 35^0$ auftretenden Interferenzstreifen zunächst mit einem kleinen Mikroskop von 25-facher Vergrösserung und bezeichnete den Punkt, auf den das Mikroskop jetzt eingestellt war, durch Aufstellung einer scharfen Spitze. Darauf beobachtete man bei demselben Einfallswinkel die Streifen mit einem kleinen Ablesefernrohr von etwa zweifacher Vergrösserung, wobei das Objectiv 280 mm von der aufgestellten Spitze entfernt war. Hatte man das Ocularrohr so weit herausgezogen, dass die Interferenzstreifen am deutlichsten waren, so erschien auch jene Spitze zugleich am deutlichsten. Durch besondere Versuche wurde aber ermittelt, dass bei diesem Zustande des Fernrohres zwei Objecte jedenfalls um weniger als 10 mm ver-

schiedene Entfernung von dem Objectiv haben müssen, wenn sie gleichzeitig deutlich erscheinen sollen. — Wenn man endlich die Streifen bei demselben Einfallswinkel mit unbewaffnetem Auge beobachtete, so musste man das Auge auf jene Spitze einstellen, um auch die Streifen am deutlichsten zu sehen. Hiermit ist erwiesen, dass der Ort der beim Azimuth 0 stattfindenden Interferenzerscheinung gänzlich unabhängig von dem Beobachtunginstrument ist, d. h. dass die Interferenz an jenem Orte reell stattfindet.

Um die Entfernung des Interferenzortes von der Blättchenmitte beim Azimuth 0 und bei verschiedenen Einfallswinkeln zu messen, verfuhr man so: Die unter dem Einfallswinkel geneigte Sehaxe des Mikroskopes wurde auf die Mitte des Blättchens gerichtet, und dann wurde das Mikroskop (bei stets unveränderter gegenseitiger Lage von Objectiv und Ocular) längs seiner Axe so weit vor- oder zurückgeschoben, bis die Interferenzerscheinung am deutlichsten war. Dann wurde der Abstand der Mitten des Objectivs und des Blättchens gemessen. Weil man nun ein für allemal wusste, wie weit entfernt vom Objectiv ein Gegenstand liegt, der am deutlichsten gesehen wird, so hatte man nur noch diese Entfernung (21,8 mm) von dem gemessenen Abstand abzuziehen, um die gesuchte Entfernung z_1 des Interferenzortes von der Blättchenmitte zu erhalten. Für diese Entfernung gilt nach unserer und nach Hrn. Feussner's Theorie übereinstimmend die Formel:

$$z_1 = \frac{H \sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{n^2 - \sin^2 \vartheta}$$

(Gl. 16, § 1, für $\mu = 0$ und Gl. 10, § 3).

Die nach dieser Formel für verschiedene Einfallswinkel ϑ berechneten Werthe sind in der folgenden Tabelle mit den beobachteten zusammengestellt. Uebrigens ist zu bemerken, dass diese Messungen nicht mit aller erreichbaren Genauigkeit, sondern nur nebenbei, gelegentlich anderer, nachher zu besprechender Beobachtungen, ausgeführt wurden. Sonst würde vermuthlich die Uebereinstimmung von Beobachtung und Rechnung noch grösser geworden sein.

Tabelle XV.

ϑ	z_1 berechn.	z_1 beob.	Δ
29° 40′	103,0 mm	103,2 mm	−0,2 mm
35 0	110,4	109,2	+1,2
40 12	113,1	110,0	+3,1
43 15	112,3	111,6	+0,7
62 15	71,6	72,5	−0,9
64 0	65,5	63,8	+1,7
65 37	59,7	60,7	−1,0

Dass der Ort der Erscheinung im Raum bei $\mu = 0$ unabhängig von der scheinbaren Grösse der Lichtquelle ist, wie es die Theorie verlangt, wurde noch durch einen eigenen Versuch bestätigt. Bei $\vartheta = 66^0$ wurde die freie Natriumflamme einmal in 440 mm, das andere mal in 2900 mm Entfernung vom Blättchen aufgestellt und der Ort der Interferenzen ermittelt: er war in beiden Fällen derselbe. Indessen ist die scheinbare Grösse der Lichtquelle doch nicht ganz ohne Einfluss auf die Erscheinung, wie aus folgenden Beobachtungen hervorgeht. Bei Anwendung einer sehr kleinen Lichtquelle (von 3,7 mm Radius) in 3000 mm Entfernung liessen sich die Interferenzstreifen des im Azimuth 0 liegenden Blättchens sowohl mit blossem Auge als mit einer einfachen Lupe ganz gut wahrnehmen. Dabei durfte die Lupe innerhalb ziemlich weiter Grenzen vor und zurück bewegt werden, ohne dass die Streifen undeutlich wurden. Benutzte man dagegen als Lichtquelle eine grosse, freie Flamme in 400 mm Entfernung, so durfte man die Lupe nur innerhalb eines viel engeren Bereiches vor und zurück bewegen, wenn die Streifen nicht bald undeutlich werden sollten. — Für die Erscheinung beim Azimuth $\mu = 180^0$ (d. h. Keilschneide lichtnah) galt bei ersterer Beleuchtungsart noch dasselbe, nur dass die Lupe nicht ganz so weit vom Blättchen weg bewegt werden durfte. Bei der zweiten Beleuchtungsart dagegen liessen sich jetzt die Streifen vermittelst der Lupe überhaupt nur ganz undeutlich erkennen, und das auch nur, wenn man die Lupe bis dicht an das Blättchen heranführte, während die Erscheinung mit blossem Auge gut wahrnehmbar war. Folglich lagen die Interferenzstreifen jetzt, wie es

die Theorie verlangt, virtuell hinter dem Blättchen, und zwar auf ein so enges Gebiet beschränkt, dass man mit der Lupe überhaupt nicht nahe genug heran kommen konnte. Aus diesen Beobachtungen folgt also, dass die Interferenzerscheinung bei $\mu = 0^0$ und $\mu = 180^0$ auf ein um so engeres Gebiet des Raumes beschränkt ist, je grösser der scheinbare Durchmesser der Lichtquelle ist. Hiermit stimmt ebenfalls die wiederholt gemachte Wahrnehmung überein, dass auch beim Azimuth 90^0 die mit blossem Auge aus deutlicher Sehweite zu beobachtenden schrägen Interferenzstreifen wesentlich deutlicher werden bei Vergrösserung des scheinbaren Durchmessers der Lichtquelle.

Diese Erscheinung ist mit der Theorie nicht in Widerspruch. Denn der Ort der grössten Deutlichkeit der Interferenzerscheinung ist dadurch bestimmt, dass (§ 1 und § 3) ein Ausdruck von der Form:

$$\frac{2J_1(u_1)}{u_1}$$

ein Maximum wird. Für die Azimuthe 0 und 180^0 ist nun u_1 1) proportional einer oben mit B bezeichneten Grösse, deren Verschwinden den Ort der grössten Deutlichkeit ergab; 2) ist u_1 aber auch proportional der Oeffnung des Kegels, der die wirksamen Strahlen begrenzt. Bei sehr schmaler Lichtquelle ist (cf. § 3) diese Oeffnung eine sehr kleine Grösse. Daher ist u_1 noch dem Werthe 0 sehr nahe, auch wenn B nicht $= 0$, sondern nur klein ist. Mithin ist für eine weitere Strecke der obige Ausdruck $J_1(u_1)/u_1$ seinem Maximalwerth 1 sehr nahe.

Bei der Ermittelung der Lage der Interferenzorte für andere Azimuthe als $\mu = 0$ musste man von der Anwendung des Mikroskopes Abstand nehmen. Wenn nämlich die Erscheinung beim Azimuth 0 im Mikroskop vollkommen deutlich war, so verlor sie doch bei geringer Veränderung des Azimuthes sofort ihre Deutlichkeit. Beim Einfallswinkel 44^0 z. B. wurden die Streifen bis zur Unbeobachtbarkeit undeutlich, als das Azimuth von 0 bis 10^0 verändert wurde; die Deutlichkeit liess sich auch nicht wieder herstellen da-

durch, dass man das Mikroskop so weit wie möglich (etwa 25—30 mm) in seiner Hülse vor oder zurückschob.

Wenn nun auch (nach Ausweis der in § 4 mitgetheilten Fernrohrbeobachtungen) dieses Undeutlichwerden bei Vergrösserung des Azimuthes zum Theil der Interferenzerscheinung objectiv anhaftet, so ist es doch dort nur für wesentlich grössere Azimuthe constatirt; daher ist zu vermuthen, dass es hier zum grossen Theil daher rührte, dass die Interferenzorte schon bei geringer Aenderung des Azimuthes starke Verschiebungen erleiden. Man war daher für diese Beobachtungen auf die Benutzung des Fernrohres angewiesen. In dieser Richtung wurde nun wenigstens eine Beobachtungsreihe ausgeführt; die erforderlichen Messungen wurden mit der vierten Versuchsreihe des § 4 verknüpft. Zunächst brachte man am Ocularrohre des Fernrohres parallel der Axe eine Millimetertheilung an. Darauf visirte man mit dem Fernrohr aus genau gemessener Entfernung nach einem feinen Objecte (kleiner Druckschrift), stellte auf grösste Deutlichkeit ein und las ab, bis zu welchem Theilstrich das Ocularrohr herausgezogen war. Alsdann veränderte man die Entfernung des Objectes um einen kleinen, genau gemessenen Betrag, stellte wieder auf grösste Deutlichkeit ein und las die jetzige Stellung des Ocularrohres ab. So fuhr man fort. Dabei wurden für jede Entfernung natürlich immer mehrere Einstellungen gemacht. Auf diese Art liess sich eine Tabelle aufstellen, aus der für jede beliebige Stellung des Ocularrohres zu entnehmen war, in welcher Entfernung von der Vorderfläche des Objectives ein jetzt scharf gesehenes Object sich befand. Bei Ausführung der vierten Versuchsreihe wurde ausser der in § 4 angegebenen Streifendrehung auch jedesmal noch die Ocularrohreinstellung an der Millimetertheilung abgelesen und nachher aus der erwähnten Tabelle die Entfernung der betreffenden Erscheinung vom Objectivglase entnommen. Durch Subtraction dieser Entfernung von dem Abstande zwischen Objectivglas und Keilblättchen erhält man die Entfernung der gesehenen Erscheinung vom Blättchen. Die Genauigkeit dieser Bestimmungen ist natürlich nicht gross, da die Verrückung

eines betrachteten Gegenstandes längs der Visirlinie immer nur eine sehr viel kleinere Verrückung des dem Fernrohrocular dargebotenen Bildes nach sich zieht. So sind die äussersten, bei dieser Beobachtungsreihe vorgekommenen Oculareinstellungen noch nicht um volle 12 mm voneinander verschieden; diese Differenz entspricht aber einer Verschiebung des anvisirten Objectes um beinahe 200 mm. Ein Einstellungsfehler des Ocularrohres von 0,25 mm bewirkt daher einen Fehler in der Bestimmung der Entfernung des Objectes von etwa 4 mm; die Unsicherheit der letzteren Bestimmung wird nun noch wesentlich dadurch erhöht, dass die besichtigte Erscheinung bei den meisten Lagen des Blättchens wenig deutlich ist. Die folgende Tabelle enthält die auf solche Art beobachteten scheinbaren Entfernungen der Interferenzorte von der Blättchenmitte, ferner die nach unserer Theorie (§ 1, Gl. 16), sowie die nach Feussner's Formel (11)[1]) berechneten Werthe, und die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung. Die Entfernung ist positiv, d. h. die Erscheinung scheint zwischen Blättchen und Objectivglas zu liegen und somit reell zu sein, für Azimuthe zwischen 0 und 75°; dagegen ist die Entfernung negativ, die Erscheinung also entfernter vom Objectivglase als das Blättchen und somit virtuell für Azimuthe zwischen 105 und 180°. Für Azimuthe von 75 bis 105° sind Beobachtungen nicht mit Sicherheit ausführbar; doch machen es einige beim Azimuth 90° angestellte Beobachtungen wenigstens wahrscheinlich, dass die Interferenzen bei diesem Azimuth am Orte des Blättchens selbst stattzufinden scheinen.

Tabelle XVI.

$\vartheta = 66^0$; Entfernung des Objectivs vom Blättchen $E = 1490$ mm.

Azimuth μ	z ber. nach (Gl. 16 § 1)	Differenz ber. min. beob.	z beobachtet	Differenz ber. min. beob.	z ber. nach Feussner
0°	57 mm	− 9 mm	66 mm	− 9 mm	57 mm
15	59	− 7	66	− 7	59
30	63	− 9	72	− 9	63
45	70	−14	84	−15	69
60	77	−19	96	−21	75

1) Feussner, Wied. Ann. 14. p. 557. 1881.

Azimuth μ	z ber. nach (Gl. 16 § 1)	Differenz ber. min. beob.	z beobachtet	Differenz ber. min. beob.	z ber. nach Feussner
75°	67 mm	+ 5	62	− 2	60
90	0	0	0?	0	0
105	−67	+32	−99	+25	−74
120	−77	+ 8	−85	+ 6,5	−78,5
135	−70	+ 6	−76	+ 6	−70
150	−63	+ 2	−65	+ 2	−63
165	−59	+ 2	−61	+ 2	−59
180	−57	+ 6	−63	+ 6	−57

Beide Theorien geben fast dieselben Zahlen. Die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist wenigstens leidlich; indessen erscheint der beobachtete absolute Abstand der Erscheinung vom Blättchen fast durchgehends grösser als der berechnete.

Mit Rücksicht auf die diesen Beobachtungen innewohnende grosse Unsicherheit kann man sich indessen damit begnügen, dass wenigstens der Gang der Erscheinung bei Veränderung des Azimuthes im ganzen ein solcher ist, wie die Theorie verlangt.

Die bisherige Untersuchung bezog sich auf den von dem mittleren Theil der Erscheinung eingenommenen Ort; es bleibt noch zu ermitteln, welche Vertheilung im Raume die nebeneinander liegenden Interferenzstreifen haben. Diese Untersuchung erforderte mikroskopische Beobachtungen und konnte also (vgl. p. 414 unten) nur für das Azimuth $\mu = 0$ ausgeführt werden. Verschiebt man das Mikroskop parallel mit sich in der Einfallsebene, so treten immer neue Interferenzstreifen in die Mitte des Gesichtsfeldes. Um diese nun stets in grösster Schärfe zu sehen, muss man das Mikroskop (bei unveränderter gegenseitigen Lage von Objectiv und Ocular) in seiner Hülse vor- oder zurückziehen. Die Gesammtheit der Punkte, auf welche hierbei nacheinander scharf eingestellt wird, liegt auf einer gewissen Linie, entsprechend der „Hauptgeraden" bei den Newton'schen Ringen. Statt dieser Interferenzlinie würde man die Interferenzfläche bestimmen, wenn man auch seitliche Verschiebungen vornähme; doch haben wir uns nur auf die Ermittelung der Interferenz-

linie beschränkt. Die Vorrichtung war dieselbe wie bei unserer früheren Untersuchung der Newton'schen Ringe.[1])

1) Bei dieser Gelegenheit mögen auch einige Vorwürfe des Hrn. Feussner gegen den experimentellen Theil unserer damaligen Arbeit auf ihr richtiges Maass zurückgeführt werden. Hr. Feussner bemängelt u. a. die Art, in der wir uns von der Existenz der Quergeraden zu überzeugen gesucht haben. Wir hatten gesagt, wenn man das scharf eingestellte Mikroskop in der Querrichtung verschöbe, so bedürfe es zum deutlichen Sehen der neu erscheinenden Ringe keiner Verschiebung des Mikroskopes in seiner Hülse, folglich lägen alle diese Interferenzorte in gleicher Tiefe. Dazu bemerkt Hr. Feussner: „Hr. Sohncke wird mir gewiss zugeben, dass das ein sehr unsicheres Verfahren ist, und dass er auf diese Weise wahrscheinlich auch in keiner anderen Querebene die Hebung oder Senkung der Interferenzorte hätte erkennen können." Und doch ist es gerade dieses Verfahren gewesen, wodurch wir auf die Hebung der Interferenzorte in den anderen Querebenen überhaupt zuerst aufmerksam wurden; und weil uns das entsprechende in der centralen Querebene durchaus nicht gelingen wollte, kamen wir eben zu dem Schluss, dass hier überhaupt keine solche Senkung von merklicher Grösse vorhanden sei. Allerdings ist die Existenz der Quergeraden nicht ebenso sicher bewiesen, wie die sonstige Gestalt der Interferenzfläche, doch rührt dies wesentlich von der Verschwommenheit gerade dieses Theiles der Erscheinung, besonders bei grösserem Einfallswinkel, her und liegt somit wesentlich in der Natur der Erscheinung selbst.

Weiter meint Hr. Feussner, die „wichtige Thatsache", dass die Aufstellung der beschränkten Lichtquelle einen wesentlichen Einfluss auf die Erscheinung in der centralen Querebene hat, sei uns entgangen. Das ist nicht der Fall. Vielmehr haben wir wiederholt bemerkt, dass die Erscheinung in der centralen Querebene sich änderte, besonders, dass die Ringe sich etwas verschoben, sobald infolge zufälligen Anstossens das Beleuchtungsrohr etwas nach der Seite hin aus der gewollten Einfallsebene heraustrat. Natürlich wurden die Messungen immer erst nach Berichtigung eines solchen Fehlers in der Aufstellung ausgeführt.

Endlich bemängelt Hr. Feussner die Art, in welcher wir die Hebung oder Senkung der ausserhalb der centralen Einfallsebene gelegenen Interferenzorte über oder unter die Hauptebene bestimmt haben. Dass wir dabei nicht die Lage der Hauptgeraden, (die gewiss am richtigsten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wird), zu Grunde gelegt haben, hatte einen ganz bestimmten Grund, den wir der Kürze halber damals gar nicht angeführt haben. Wiederholt wurde nämlich beobachtet, dass, wenn die Gläsercombination mehrere Stunden ruhig stehen gelassen wurde, sich doch die Einstellung nicht mehr genau wie am Anfang fand. Ob diese kleinen Aenderungen durch Temperaturänderungen bedingt waren, die vielleicht auf die geringe Menge des die Gläser ver-

Das Mikroskop (von 25-facher Vergrösserung) wurde, unter dem gewünschten Winkel gegen den Horizont geneigt, an der Schraubenmutter einer Theilmaschine befestigt und konnte nun durch Drehung der Theilmaschinentrommel um genau zu messende Strecken horizontal verschoben werden, wobei es sich selbst parallel blieb. Die Einfallsebene war vertical, in ihr befand sich die Schraubenaxe der Theilmaschine. Die Beträge der Vor- und Zurückziehungen des Mikroskopes in seiner Hülse konnten an einer am Mikroskoprohr angebrachten Theilung in halbe Millimeter abgelesen werden. Auch bei diesen Versuchen war der Haupttheil des Blättchens stets bedeckt, sodass nur der kreisförmige mittlere Theil (Durchmesser 8 mm) zur Wirkung kam. Zu Anfang jeder Versuchsreihe brachte man das Mikroskop in die lichtfernste Stellung, bei der überhaupt noch Interferenzstreifen gut wahrzunehmen waren, und dann verschob man es um je 2 mm horizontal zum Licht hin. Darauf musste man es jedesmal in seiner Hülse zurückziehen (heben), um die Erscheinung wieder scharf zu sehen. Durch Zählung der Streifen, welche dabei das Fadenkreuz passirten, stellte sich die Aequidistanz derselben heraus; d. h. in der einzelnen Versuchsreihe war die Zahl der Streifenintervalle, die bei jeder der aufeinander folgenden Horizontalverschiebungen vorüberzogen, immer merklich dieselbe. Von Versuchsreihe zu Versuchsreihe jedoch änderte sich diese Zahl (N) ein wenig; und es stellte sich heraus, dass

bindenden Klebmaterials Einfluss hatten, oder ob Erschütterungen durch vorüberfahrende Wagen die Schuld trugen, oder dergleichen, das mag dahingestellt sein. Jedenfalls war es nothwendig, diejenigen Beobachtungen, die miteinander verknüpft werden sollten, schnell nacheinander auszuführen. Nun dauerte die vollständige Ausmessung der Interferenzfläche jedesmal mindestens vier Stunden. Um daher die Hebung der seitlichen Punkte frei von solchen unberechenbaren Störungen zu erhalten, wurden immer die Punkte einer und derselben Querebene unmittelbar nacheinander gemessen, und die so gefundenen Hebungen sind in unseren Tabellen angegeben. Wir halten sie für sicherer, als wenn wir sie nach der von Hrn. Feussner vorgeschlagenen und angewandten Methode bestimmt hätten, die, abstract betrachtet, natürlich als die richtigere erscheint.

sie etwas abnimmt mit wachsendem Einfallswinkel ϑ, wie folgende Tabelle erkennen lässt.

Tabelle XVII.

ϑ	29°40'	35°0'	40°12'	43°15'	50°15'	55°10'	58°30'	62°15'	64°0'	65°37'
N	4,4	4,2	4,1	4,0	4,2*	3,9*	4,1*	3,9	3,75	3,6

Ueber die drei durch einen * ausgezeichneten Beobachtungen, welche sich in die vorhandene Regelmässigkeit nicht so gut fügen, ist zu bemerken, dass sie unter anderen Bedingungen angestellt wurden, indem hier nicht ein mässiges Kreisloch, sondern die grosse freie Natriumflamme als Lichtquelle diente.

Weil das Urtheil darüber, wann der mitten im Gesichtsfelde erscheinende Streifen die grösste Schärfe erlangt hat, oft recht schwankend ist, wurden nach jeder Horizontalverschiebung Δx mehrere Einstellungen des Mikroskopes vorgenommen, um aus ihnen dann das Mittel zu nehmen. Der Unterschied zweier solcher aufeinander folgenden Mittel ist der Betrag der für $\Delta x = 2$ mm Verschiebung erforderlichen Zurückziehung Δr. In der folgenden Tabelle ist eine solche Versuchsreihe unverkürzt mitgetheilt.

Tabelle XVIII.

$\vartheta = 64{,}0^{0}$.

Δx mm	Nr. des Streifens	Wiederholte Einstellungen des Mikroskopes mm							Mittel mm	Δr mm	$\frac{\Delta r}{\Delta x}$
0	1(−2)	5,7	3,9	3,5	8,0	3,4	3,6	7,6			
						4,9	6,1	8,0	5,47		
										3,07	1,53
2	5	8,1	8,7	7,9	9,0	8,2	9,4	8,5	8,54		
										2,43	1,22
2	(8−)9	10,5	10,6	11,0	11,0	12,1	10,8	10,8	10,97		
										2,62	1,31
2	12—13	13,3	14,6	13,0	13,1	14,7	13,8	12,6	13,59		
2	16(−17)	18,6	15,1	17,1	15,6	14,4	17,7	15,5		2,87	1,43
						18,0	15,9	16,7	16,46		

In diesem Falle kommen, wie man sieht, etwa $3^3/_4$ Streifenintervalle auf je 2 mm Horizontalverschiebung. Die Zurückziehungen Δr sind freilich nicht genau gleich, doch sind die vier Werthe von $\Delta r / \Delta x$, welche die Steigung der Inter-

ferenzlinie an vier verschiedenen Stellen angeben, hinreichend wenig verschieden, um die Annahme einer geraden Interferenzlinie JJ in erster Annäherung als gerechtfertigt erscheinen zu lassen; dieselbe steigt aber im vorliegenden Falle nicht, wie die Hauptgerade der Newton'schen Ringe, schräg zum Lichte hin an, sondern entfernt sich von ihm. (Fig. 8.) — Solche Beobachtungen, wie die eben mitgetheilten, wurden bei verschiedenen Einfallswinkeln gemacht, doch sollen statt der ausführlichen Tabellen nur je die letzten Verticalreihen $\Delta\tau/\Delta x$ mitgetheilt werden. Sie sind in der folgenden Tabelle enthalten, deren erste Horizontalreihe die betreffenden Einfallswinkel angibt. Die (eingeklammerten) Zahlen der vorletzten Horizontalreihe sind die arithmetischen Mittel der darüber stehenden Werthe von $\Delta\tau/\Delta x$. Diese können aber nicht als der wirkliche Ausdruck der mittleren Steigung angesehen werden; denn sie hängen in Wahrheit nur von der ersten und letzten Einstellung des Mikroskopes ab, und man kann sie einfach dadurch erhalten, dass man diese beiden voneinander subtrahirt und dann durch den Gesammtbetrag der Horizontalverschiebung dividirt. Der wahre Mittelwerth der Steigung wurde daher für jede Beobachtungsreihe nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, indem die Interferenzlinie als Gerade angenommen wurde. Diese wahren mittleren Steigungen finden sich in der letzten Horizontalreihe; sie unterscheiden sich übrigens nur unerheblich von den arithmetischen Mitteln.

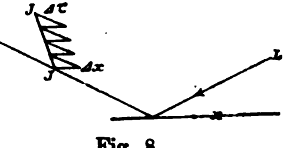


Fig. 8.

Tabelle XIX.

ϑ	40° 12′	50° 15′	55° 10′	58° 30′	62° 15′	64° 0′	65° 37′
	1,52	1,51	1,47	1,70	1,91	1,53	1,34
	1,30	0,83	1,49	1,68	1,24	1,22	1,42
	1,21	0,99	1,37	2,29	1,14	1,31	2,05
	1,50	0,97	1,53	1,29	1,55	1,43	1,35
	—	0,89	—	1,99	—	—	1,57
	—	0,68	—	—	—	—	1,34
	(1,38)	(0,98)	(1,47)	(1,79)	(1,46)	(1,37)	(1,51)
	1,358	0,962	1,458	1,795	1,407	1,352	1,552

Bei den Beobachtungen der zweiten, dritten und vierten Verticalreihe diente als Lichtquelle die freie Flamme (ohne Beschränkung auf ein Kreisloch). Bei $\vartheta = 58^0\ 30'$ wurden ausser der mitgetheilten Beobachtungsreihe noch zwei andere Reihen, ebenfalls bei freier Flamme, gewonnen, gültig für zwei andere Stellen des Keiles. Die mittleren Steigungen ergaben sich dabei zu 1,826 und 1,775. In einer bei $\vartheta = 29^0\ 40'$ angestellten Beobachtungsreihe wichen wiederholte Einstellungen desselben Streifens auf grösste Deutlichkeit so stark voneinander ab (d. h. bei diesem kleinen Einfallswinkel war die Interferenz so wenig auf einen bestimmten Ort im Raum beschränkt), dass es unmöglich war, die Interferenzlinie zu ermitteln.

Es erübrigt noch die Vergleichung der Theorie mit den angeführten Beobachtungen der Interferenzlinie; dieselbe ist leider nicht in erschöpfender Weise ausführbar. Es stellte sich nämlich nachträglich heraus, dass bei Anstellung der Beobachtungen, welche der Vollendung der Theorie lange vorausging, die Versuchsbedingungen nicht in der nöthigen Vollständigkeit aufgezeichnet worden sind. So schätzen wir z. B. die Entfernung E_1 der Lichtquelle vom Blättchen nur aus der Erinnerung durchschnittlich auf 300 mm, ebenso die Grösse der Lichtquelle als einen Kreis von etwa 10 mm Radius, senkrecht zur mittleren Strahlenrichtung.[1]) Der Radius der ebenen Vorderfläche des Mikroskopobjectives betrug etwa 2,5 mm, der Abstand eines scharf gesehenen Punktes von ihr ist aber genau = 21,75 mm. Diese Angaben ermöglichen zunächst ein ungefähres Urtheil über die Oeffnungen der in § 3 erwähnten drei Strahlenkegel, deren gemeinsame Spitze der scharf gesehene Punkt P ist, und deren Basis bezüglich 1) die Vorderfläche des Mikroskopobjectives, 2) das Spiegelbild der kreisförmigen Lichtquelle, 3) die kreisförmige wirksame Fläche des Blättchens ist. (Vgl. Fig. 5 auf p. 215). Die Tangenten der halben Oeffnungen sind:

---

1) Gegenwärtig sind wir infolge äusserer Umstände leider nicht in der Lage, die Beobachtungen wieder aufzunehmen.

$$1)\ \frac{2{,}5}{21{,}75} = \frac{1}{8{,}7},$$

$$2)\ \frac{10}{300 + z} = \frac{1}{36} \text{ bis } \frac{1}{41};$$

$$3)\ \frac{4 \cos \vartheta}{z} = \frac{\cos \vartheta}{15} \text{ bis } \frac{\cos \vartheta}{27{,}5},$$

da z Werthe zwischen 60 und 110 hat. Wenn die grosse freie Flamme als Lichtquelle diente, so übertraf wohl meistens die Oeffnung des zweiten Kegels diejenigen der beiden anderen.

In § 3 bedeutete x den Abstand desjenigen Punktes, in dem die verlängerte Mikroskopaxe die Blättchenfläche schneidet, von der Mitte dieser Fläche, positiv gerechnet zum Lichte hin. Ferner war z der Abstand dieses Schnittpunktes von dem scharf gesehenen Punkte und r der Ueberschuss dieses Abstandes über den entsprechenden Abstand bei Anvisirung der Blättchenmitte. Für r ist bei beschränkter Lichtquelle in § 3 die Gleichung (9_a) abgeleitet:

$$r = \left\{S + \tfrac{1}{2}(T - S)\left(1 + \frac{z_1}{E_1 + z_1}\right)\right\} x \pm G,$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem x positiv oder negativ ist. Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\sin \vartheta \cos^2 \vartheta}{n^2 - \sin^2 \vartheta} = S; \qquad 4 \sin \vartheta - \frac{1}{\sin \vartheta} - 2S = T;$$

$$\tfrac{1}{2}(T - S) \cdot \left(\frac{\varrho_1}{\cos \vartheta} \cdot \frac{z_1}{E_1 + z_1} - \varrho\right) = G.$$

Bildet man diese Gleichung für zwei aufeinander folgende von der Blättchenmitte aus nach derselben Seite gelegene Mikroskopeinstellungen, denen die Werthe x und $x + \varDelta x$, r und $r + \varDelta r$ zugehören, und subtrahirt, so folgt:

$$(\alpha) \qquad \frac{\varDelta r}{\varDelta x} = S + \tfrac{1}{2}(T - S) \cdot \left(1 + \frac{z_1}{E_1 + z_1}\right).$$

Die hiernach berechneten Werthe müssen nun diejenigen Beobachtungen der Tabelle XIX darstellen, die bei beschränkter Lichtquelle angestellt wurden (Nr. 1, 2, 3 der folgenden Tabelle XX). Für den Fall einer unbegrenzten

leuchtenden Fläche als Lichtquelle ist in § 3 die Gleichung (8_a) abgeleitet, aus welcher sich ergibt:

$$(\beta) \qquad \frac{\Delta \tau}{\Delta x} = T.$$

Die hiernach berechneten Werthe können nun möglicherweise jene Beobachtungen darstellen, die bei freier Flamme angestellt wurden, obgleich letztere nur eine mässige Grösse hatte (Nr. 4 und 5 der folgenden Tabelle XX). Bisweilen aber wurde die freie Flamme auch wesentlich kleiner, nämlich wenn der aufsaugende Asbestfaden, durch abgelagertes Salz verstopft, nur noch wenig Salzlösung zuführte. Daher kann auch bei freier Flamme wohl einmal die Formel (α) besser zutreffen, wie es bei Nr. 6 der Tabelle XX der Fall zu sein scheint. Die unter Nr. 7 angeführte Beobachtung für $\Delta\tau/\Delta x$ bei $\vartheta = 40^0\,12'$ und beschränkter Lichtquelle ist durch keine der beiden Formeln darstellbar, doch wird man sie nicht als Beweis gegen die Theorie anführen dürfen, weil irgend welche zufällige Unregelmässigkeiten in der Anordnung stattgefunden haben können, die sich aber nachträglich unmöglich beurtheilen lassen.

Tabelle XX.

Nr.	ϑ	$\frac{\Delta\tau}{\Delta x}$ beobachtet	$\frac{\Delta\tau}{\Delta x}$ ber. nach (α)	Differenz ber.— beob.	$\frac{\Delta\tau}{\Delta x}$ ber. nach (β)	Differenz ber.— beob.
1.	65° 37′	1,55	1,41	−0,14	—	—
2.	64 0	1,35	1,37	+0,02	—	—
3.	62 15	1,41	1,34	−0,07	—	—
4.	58 30	1,79	(1,24)	(−0,55)	1,94	+0,15
5.	55 10	1,46	(1,14)	(−0,32	1,73	+0,27
6.	50 15	0,96	0,95	−0,01	(1,41)	(+0,45)
7.	40 12	1,36	(0,48)	(−0,88)	(0,63)	(−0,73)

Mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Einstellung der grössten Schärfe und mit Rücksicht auf die mangelhafte Kenntniss einiger in die Rechnung eingehenden Grössen kann man (abgesehen von der letzten, unerklärten Beobachtung) die Uebereinstimmung von Rechnung und Beobachtung für genügend erklären.

Hauptergebnisse.

1. Es ist die Grundlage einer allgemeinen Theorie der Interferenzerscheinungen dünner Blättchen ohne irgend welche Hülfshypothese gewonnen (§ 1), und damit sind die in Betreff der Newton'schen Ringe sowie der Interferenzstreifen eines dünnen keilförmigen Blättchens früher von uns abgeleiteten Formeln neu begründet.

2. Dabei ist die alte, nur als erste Annäherung berechtigte Annahme, dass die interferirenden Strahlen der ganzen Länge nach zusammenfallen, ersetzt durch die Betrachtung des wirklichen Vorganges, nämlich des Schnittes der Strahlen, wodurch zugleich die Lage der Interferenzorte im allgemeinen ermittelt ist (§ 1, Gleichung 16). Um letztere zu beobachten, muss man sie nacheinander in die Mitte des Gesichtsfeldes des Beobachtungsinstrumentes bringen. Die berechneten Orte des Mittelpunktes der Erscheinung finden sich bei der als Azimuth 0 bezeichneten Lage des Keiles gut bestätigt durch mikroskopische Beobachtungen, bei anderen Azimuthen genügend bestätigt durch Fernrohrbeobachtungen (§ 6). Die ausserhalb der Mitte liegenden Interferenzorte hängen noch wesentlich ab von der Begrenzung und Entfernung der Lichtquelle und von der Begrenzung des Blättchens (§ 3 und 6).

3. Die scheinbare Richtung der im Gesichtsfelde gleichzeitig erscheinenden Streifen ist (ausser von dem Einfallswinkel, dem Azimuth und der Beschaffenheit des keilförmigen Blättchens) noch abhängig von der Grösse und Entfernung der Lichtquelle, sowie von der Grösse und Entfernung der Auffangfläche des Beobachtungsinstrumentes. Die für diese scheinbare Richtung gefundene Formel (§ 2, Gleichung 18) ist durch die Beobachtungen bestätigt (§ 4 und 5).

Jena und Halle, Juni 1883.

III. Ueber die Bestimmung des Axenverhältnisses der bei der elliptischen Polarisation im Quarz auftretenden Bahnellipsen; von B. Hecht.

(Mittheilungen aus dem math.-phys. Laboratorium in Königsberg i. Pr. Nr. 9.)

Die Bestimmung des Axenverhältnisses der Ellipsen, in welchen die Aetheretheilchen schwingen, wenn ein Lichtstrahl sich durch eine Quarzplatte in einer Richtung fortpflanzt, die mit der optischen Axe einen beliebigen Winkel bildet, ist von Jamin[1]) durchgeführt worden. Die Methode, welche Jamin zu dieser Bestimmung anwendet, scheint mir jedoch nicht vollkommen einwurfsfrei zu sein. Erstens werden bei dem Austritt aus der Platte die beiden Amplituden des parallel und des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Strahles in verschiedener Weise geschwächt, sodass also das Axenverhältniss der austretenden Ellipsen $(f_p/f_s)\,k_1$, resp. $(f_p/f_s)\,k_2$ ist, worin k_1 und k_2 die Axenverhältnisse der Ellipsen im Quarz sind. Da jedoch nur bei kleinen Einfallswinkeln beobachtet wird, so ist der Factor f_p/f_s nahezu gleich eins, und der Fehler, der hierdurch entsteht, ist nicht gross, aber überall in gleichem Sinne wirkend. Von bedeutend grösserem Einflusse sind jedoch die Fehler, die bei der Einstellung der Nicol'schen Prismen und des Compensators gemacht werden können. Jamin benutzt zunächst als einfallendes Licht solches, welches parallel zur Einfallsebene polarisirt ist. Bezeichnet nun k' das Axenverhältniss der rechts herum und k das Axenverhältniss der links herum durchlaufenen Ellipse und δ den Gangunterschied, der durch die Krystallplatte zwischen dem rechts herum und dem links herum rotirenden Strahl hervorgerufen wird, so ergeben sich für das austretende Licht folgende Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k'-k}{k'+k}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}, \qquad \operatorname{tg}^2\psi = \frac{(k'+k)^2}{4\sin^2\frac{\delta}{2}} - kk'.$$

---

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) 30. p. 51 u. ff. 1850.

Hierin bedeutet φ den Gangunterschied der parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Strahlen und $\operatorname{tg}\psi = B/A$ das Verhältniss der Amplitude des senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Strahles zu der des parallel schwingenden Strahles, welche beiden Grössen die Objecte der Beobachtung sind.

Ist das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{k'-k}{k'+k}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}^2\psi_1 = \frac{4k^2k'^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{(k+k')^2 - 4kk'\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Diese Formeln haben Gültigkeit, wenn alle Einstellungen fehlerlos gemacht werden könnten. Nun will ich einige Fehlerquellen nach einander betrachten. Es bilde die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes mit der Einfallsebene einen Winkel ε, dann ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{k'-k}{k'+k}\,\frac{2\sin^2\frac{\delta}{2}\cos^2\varepsilon - 2\sin^2\frac{\delta}{2}kk'\sin^2\varepsilon + (k+k')\sin\delta\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{\sin\delta\cos^2\varepsilon - kk'\sin\delta\sin^2\varepsilon + (k+k')\cos\delta\sin\varepsilon\cos\varepsilon},$$

$$\operatorname{tg}^2\psi' = \frac{\cos^2\varepsilon\left[(k+k')^2 - 4kk'\sin^2\frac{\delta}{2}\right] + \sin^2\varepsilon\,4k^2k'^2\sin^2\frac{\delta}{2} - \sin 2\varepsilon\sin\delta\,(k+k')kk'}{\cos^2\varepsilon\,4\sin^2\frac{\delta}{2} + \sin^2\varepsilon\left[(k'+k)^2 - 4kk'\sin^2\frac{\delta}{2}\right] + \sin 2\varepsilon\sin\delta\,(k+k')}.$$

Drehe ich nun den Polarisator um 90^0, so muss ich statt ε jetzt $\varepsilon \pm 90^0$ setzen und erhalte:

$$\operatorname{tg}^2\psi_1' = \frac{\sin^2\varepsilon\left[(k+k')^2 - 4kk'\sin^2\frac{\delta}{2}\right] + \cos^2\varepsilon\,4k^2k'^2\sin^2\frac{\delta}{2} + \sin 2\varepsilon\sin\delta\,(k+k')kk'}{\sin^2\varepsilon\,4\sin^2\frac{\delta}{2} + \cos^2\varepsilon\left[(k+k')^2 - 4kk'\sin^2\frac{\delta}{2}\right] - \sin 2\varepsilon\sin\delta\,(k+k')}.$$

Da sich aus den Beobachtungen ergibt, dass $\operatorname{tg}^2\psi'\operatorname{tg}^2\psi_1' = 1$ ist, so folgt auch hier $kk' = 1$, also wird dann:

$$\operatorname{tg}\varphi_1' = \frac{k'-k}{k'+k}\,\frac{2\sin^2\frac{\delta}{2}\cos 2\varepsilon + \frac{k+k'}{2}\sin\delta\sin 2\varepsilon}{\sin\delta\cos 2\varepsilon + \frac{k+k'}{2}\cos\delta\sin 2\varepsilon} = \operatorname{tg}\varphi',$$

$$\operatorname{tg}^2\psi_1' = \frac{\sin^2 \varepsilon \left[(k+k')^2 - 4\sin^2\frac{\delta}{2}\right] + \cos^2 \varepsilon \, 4\sin^2\frac{\delta}{2} + \sin 2\varepsilon \sin\delta \, (k+k')}{\sin^2 \varepsilon \, 4\sin^2\frac{\delta}{2} + \cos^2 \varepsilon \left[(k+k')^2 - 4\sin^2\frac{\delta}{2}\right] - \sin 2\varepsilon \sin\delta\,(k+k')} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\psi'},$$

Ist ε so klein, dass man das Quadrat von ε gegen 1 vernachlässigen kann, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{k'-k}{k'+k}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\,\frac{1+(k'+k)\,\varepsilon\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}{1+(k'+k)\,\varepsilon\operatorname{ctg}\delta} = \operatorname{tg}\varphi\left[1+(k'+k)\,\varepsilon\frac{1}{\sin\delta}\right],$$

$$\operatorname{tg}^2\psi' = \frac{(k'+k)^2 - 4\sin^2\frac{\delta}{2} + 4\sin^2\frac{\delta}{2}}{4\sin^2\frac{\delta}{2} + 2\varepsilon\sin\delta\,(k'+k)} - 1$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\psi + 1}{1+\varepsilon\,(k'+k)\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}} - 1$$

$$\cos^2\psi' = \cos^2\psi\left[1+\varepsilon\,(k'+k)\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\right].$$

Bildet ferner der Hauptschnitt des Compensators mit der Einfallsebene einen Winkel α, so erhalte ich parallel und senkrecht zum Hauptschnitt des Compensators folgende Schwingungen:

$$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \qquad v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$
$$x = A'\sin\tau, \qquad y = B'\sin(\tau+\varphi'),$$
$$u = A'\cos\alpha\sin\tau + B'\sin\alpha\sin(\tau+\varphi') = A''\sin(\tau+\chi_1),$$
$$v = -A'\sin\alpha\sin\tau + B'\cos\alpha\sin(\tau+\varphi') = B''\sin(\tau+\chi_2).$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}\chi_1 = \frac{B'\sin\alpha\sin\varphi'}{A'\cos\alpha + B'\sin\alpha\cos\varphi'},$$

$$\operatorname{tg}\chi_2 = \frac{B'\cos\alpha\sin\varphi'}{-A'\sin\alpha + B'\cos\alpha\cos\varphi'}.$$

Bezeichne ich B''/A'' mit $\operatorname{tg}\psi''$ und $\chi_2-\chi_1$ mit φ'', so ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi'' = \frac{A'B'\sin\varphi'}{A'B'\cos\varphi'\cos 2\alpha + (B'^2 - A'^2)\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^2\psi'' = \frac{B''^2}{A''^2} = \frac{B'^2\cos^2\alpha + A'^2\sin^2\alpha - 2A'B'\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi'}{A'^2\cos^2\alpha + B'^2\sin^2\alpha + 2A'B'\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi'}.$$

Es sei nun wieder α so klein, dass man α^2 gegen 1 vernachlässigen kann, dann ist, da $B'/A' = \operatorname{tg}\psi'$ ist:

$$\operatorname{tg}\varphi'' = \operatorname{tg}\varphi'\left[1 - \frac{\alpha}{\cos\varphi'}(\operatorname{tg}\psi' - \operatorname{ctg}\psi')\right],$$

$$\operatorname{tg}^2\psi'' = \frac{B'^2 + A'^2}{A'^2 + 2\alpha A' B' \cos\varphi'} - 1.$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2\psi' + 1}{1 + 2\alpha\operatorname{tg}\psi'\cos\varphi'} - 1, \quad \cos^2\psi'' = \cos^2\psi'(1 + 2\alpha\operatorname{tg}\psi'\cos\varphi').$$

In den mit α multiplicirten Gliedern kann ich nun ψ' und φ' durch ψ und φ ersetzen und erhalte:

$$\operatorname{tg}\varphi'' = \operatorname{tg}\varphi'\left[1 - \frac{\alpha}{\cos\varphi}(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{ctg}\psi)\right]$$

$$= \operatorname{tg}\varphi\left[1 + \varepsilon\frac{k'+k}{\sin\delta} + \alpha\frac{2\operatorname{ctg}2\psi}{\cos\varphi}\right].$$

$$\cos\psi'' = \cos\psi'(1 + \alpha\operatorname{tg}\psi\cos\varphi)$$

$$= \cos\psi\left(1 + \varepsilon\frac{k'+k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} + \alpha\operatorname{tg}\psi\cos\varphi\right).$$

Setze ich $\varphi'' = \varphi + \zeta$ und $\psi'' = \psi + \eta$, so erhalte ich:

$$\operatorname{tg}\varphi'' = \operatorname{tg}\varphi + \frac{\zeta}{\cos^2\varphi}, \qquad \cos\psi'' = \cos\psi - \eta\sin\psi, \text{ also:}$$

$$\zeta = \sin 2\varphi\left[\varepsilon\frac{k'+k}{2}\frac{1}{\sin\delta} + \alpha\frac{\operatorname{ctg}2\psi}{\cos\varphi}\right],$$

$$\eta = -\varepsilon\frac{k'+k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\psi - \alpha\cos\varphi.$$

Ist ferner noch der Hauptschnitt in dem Compensator um einen Winkel ϑ falsch bestimmt, so liest man nicht ψ'' ab, sondern $\psi''' = \psi'' + \vartheta$, und die Differenz zwischen den abgelesenen Werthen von φ und ψ und ihren wahren Werthen ergibt sich in folgender Weise:

$$\varphi'' - \varphi = \zeta = \sin 2\varphi\left[\varepsilon\frac{k'+k}{2}\frac{1}{\sin\delta} + \alpha\frac{\operatorname{ctg}2\psi}{\cos\varphi}\right],$$

$$\psi''' - \psi = \vartheta + \eta = \vartheta - \varepsilon\frac{k'+k}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\psi - \alpha\cos\varphi.$$

Dass diese Fehlerquellen die Resultate wesentlich modificiren können, ist ja klar, und da Jamin nicht angibt, wie er dieselben vermieden oder wenigstens möglichst klein gemacht hat, so lässt sich über die Genauigkeit seiner Resultate gar kein Urtheil gewinnen.

Um die angegebenen Fehlerquellen möglichst zu ver-

meiden, habe ich auf Vorschlag von Hrn. Voigt an Quarzplatten Beobachtungen angestellt, welche so aus dem Krystall geschnitten waren, dass die Normalen auf den Seitenflächen mit der optischen Axe einen kleinen Winkel bilden. Mit diesen wurden nur bei dem Einfallswinkel Null Beobachtungen angestellt, sodass also jede Platte nur das Axenverhältniss und den Gangunterschied für den Winkel ergibt, den ihre Normale mit der optischen Axe bildet.

In eine solche Platte soll linearpolarisirtes Licht eintreten und das austretende Licht dann durch den unten beschriebenen Compensator wieder linear polarisirt gemacht werden. Ich will den Einfluss der Platte und des Compensators successive behandeln.

Die Dicke der Platte sei D und ihre Hauptschnitte H und S (Fig. 1). Die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes sei L und der Schwingungszustand desselben sei durch $a \cos \tau$ dargestellt. Beim Eintritt in den Krystall zerlegt sich der Lichtstrahl in einen rechts herum und in einen links herum rotirenden Strahl.

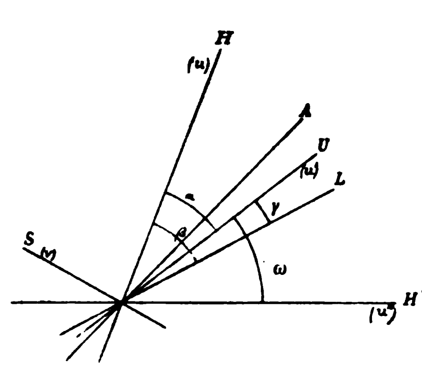


Fig. 1.

L Polarisationsebene des einfallendes Lichtes.
H Hauptschnitt des Krystalles.
U Hauptaxe der Schwingungsellipse des austretenden Lichtes.
H'' Hauptschnitt des Compensators.
A ist gegen *H''* und $\pi/4$ geneigt.

Die Axenverhältnisse der Ellipsen, in welchen beide schwingen, sind k_1, resp. k_2. Da sich ferner aus allen aufgestellten Theorien $k_1 k_2 = 1$ ergibt, so will ich diese Relation ebenfalls voraussetzen. Die Factoren, die die Schwächung der Amplituden beim Eintritt in den Krystall und beim Austritt ausdrücken, sind bei senkrechtem Einfall immer dieselben. Ich will sie daher fortlassen, da es schliesslich nur auf die Verhältnisse der Amplituden ankommt. Es ergibt sich demnach für den Schwingungszustand in dem Krystall:

$$u_1 = a_1 \cos(\tau + \delta_1) \qquad u_2 = a_2 \cos(\tau + \delta_2)$$
$$v_1 = -a_1 k_1 \sin(\tau + \delta_1) \qquad v_2 = a_2 k_2 \sin(\tau + \delta_2)$$
$$u_1 + u_2 = a \cos\beta \cos\tau \qquad v_1 + v_2 = -a \sin\beta \cos\tau.$$

Diese Beziehungen ergeben:

$$u_1 = \frac{a}{k_1 + k_2}(k_2 \cos\beta \cos\tau - \sin\beta \sin\tau),$$
$$v_1 = \frac{a}{k_1 + k_2}(-k_1 \sin\beta \cos\tau - \cos\beta \sin\tau),$$
$$u_2 = \frac{a}{k_1 + k_2}(k_1 \cos\beta \cos\tau + \sin\beta \sin\tau),$$
$$v_2 = \frac{a}{k_1 + k_2}(-k_2 \sin\beta \cos\tau + \cos\beta \sin\tau).$$

Setze ich $a/(k_1 + k_2) = F$ und bezeichne mit r und l die Verzögerung, die der rechts, resp. links herum rotirende Strahl im Krystall erleidet, so ergibt sich nach dem Austritt aus dem Krystall:

$$u_1 = F[k_2 \cos\beta \cos(\tau - r) - \sin\beta \sin(\tau - r)],$$
$$v_1 = F[-k_1 \sin\beta \cos(\tau - r) - \cos\beta \sin(\tau - r)],$$
$$u_2 = F[k_1 \cos\beta \cos(\tau - l) + \sin\beta \sin(\tau - l)],$$
$$v_2 = F[-k_2 \cos\beta \cos(\tau - l) + \cos\beta \sin(\tau - l)].$$

Diese Strahlen setzen sich nun zu einem elliptisch polarisirten zusammen, und zwar seien die Hauptaxen der neuen Ellipse U und V und ihr Axenverhältniss e. Dann ist:

$$u' = F' \cos(\tau + \Delta) = (u_1 + u_2)\cos\alpha - (v_1 + v_2)\sin\alpha.$$
$$v' = F' e \sin(\tau + \Delta) = (u_1 + u_2)\sin\alpha + (v_1 + v_2)\cos\alpha.$$

Setze ich nun: $S_1 = k_1 \sin l + k_2 \sin r$, $S_2 = k_2 \sin l + k_1 \sin r$,
$C_1 = k_1 \cos l + k_2 \cos r$, $C_2 = k_2 \cos l + k_1 \cos r$,
$D_s = \sin l - \sin r$, $D_c = \cos l - \cos r$,

so ergibt sich aus den Gleichungen für u' und v':

$$F' \cos\Delta = F[\cos\alpha \cos\beta\, C_1 + \sin\alpha \sin\beta\, C_2 - \cos\alpha \sin\beta\, D_s + \sin\alpha \cos\beta\, D_s],$$
$$F' \sin\Delta = F[-\cos\alpha \cos\beta\, S_1 - \sin\alpha \sin\beta\, S_2 - \cos\alpha \sin\beta\, D_c + \sin\alpha \cos\beta\, D_c],$$
$$F' e \cos\Delta = F[-\cos\alpha \sin\beta\, S_2 + \sin\alpha \cos\beta\, S_1 + \cos\alpha \cos\beta\, D_c + \sin\alpha \sin\beta\, D_c],$$
$$F' e \sin\Delta = F[-\cos\alpha \sin\beta\, C_2 + \sin\alpha \cos\beta\, C_1 - \cos\alpha \cos\beta\, D_s - \sin\alpha \sin\beta\, D_s].$$

Dividire ich die dritte dieser Gleichungen durch die erste und die vierte durch die zweite, so erhalte ich:

$$e[\cos\alpha\cos\beta\, C_1 + \sin\alpha\sin\beta\, C_2 + \sin(\alpha-\beta)\, D_s] = -\cos\alpha\sin\beta\, S_2 + \sin\alpha\cos\beta\, S_1 + \cos(\alpha-\beta)\, D_c.$$

$$e[-\cos\alpha\cos\beta\, S_1 - \sin\alpha\sin\beta\, S_2 + \sin(\alpha-\beta)\, D_c] = -\cos\alpha\sin\beta\, C_2 + \sin\alpha\cos\beta\, C_1 - \cos(\alpha-\beta)\, D_s.$$

Es ist nun aber:

$$C_1 D_c + S_1 D_s = 2(k_1 - k_2)\sin^2\frac{l-r}{2} = 4q\sin^2\frac{l-r}{2},$$

$$C_2 D_c + S_2 D_s = -2(k_1 - k_2)\sin^2\frac{l-r}{2} = -4q\sin^2\frac{l-r}{2},$$

$$C_1 D_s - S_1 D_c = (k_1 + k_2)\sin(l-r) = 4s\sin\frac{l-r}{2}\cos\frac{l-r}{2},$$

$$C_2 D_s - S_2 D_c = (k_1 + k_2)\sin(l-r) = 4s\sin\frac{l-r}{2}\cos\frac{l-r}{2},$$

$$D_s^2 + D_c^2 = 4\sin^2\frac{l-r}{2}.$$

Hierin ist $k_1 + k_2 = 2s$, $k_1 - k_2 = 2q$ gesetzt.

Multiplicire ich die erste der beiden Gleichungen für e mit D_s und die zweite mit D_c und addire die beiden Gleichungen, so erhalte ich mit Berücksichtigung der oben aufgestellten Relationen zwischen den C, S und D:

$$e\cos(\alpha-\beta)4s\sin\frac{l-r}{2}\cos\frac{l-r}{2} + e\sin(\alpha-\beta)\,4\sin^2\frac{l-r}{2} = \sin(\alpha+\beta)\,4q\sin^2\frac{l-r}{2}.$$

Multiplicire ich die erste jener Gleichungen mit D_c und die zweite mit $-D_s$ und addire sie, so ergibt sich:

$$e\cos(\alpha+\beta)\,4q\sin^2\frac{l-r}{2} = \sin(\beta-\alpha)\,4s\sin\frac{l-r}{2}\cos\frac{l-r}{2} + \cos(\alpha-\beta)\,4\sin^2\frac{l-r}{2}.$$

Ich erhalte also die beiden Gleichungen:

$$e\cos(\alpha-\beta)\,s\cos\frac{l-r}{2} + e\sin(\alpha-\beta)\sin\frac{l-r}{2} - \sin(\alpha+\beta)\,q\sin\frac{l-r}{2} = 0,$$

$$e\cos(\alpha+\beta)\,q\sin\frac{l-r}{2} + \sin(\alpha-\beta)\,s\cos\frac{l-r}{2} - \cos(\alpha-\beta)\sin\frac{l-r}{2} = 0.$$

Setze ich nun:

$$\sin\frac{l-r}{2} = \pi\sin\varphi, \qquad s.\cos\frac{l-r}{2} = \pi\cos\varphi \quad \text{und } \beta - \alpha = \gamma,$$

so gehen die Gleichungen über in:

$$e\cos(\varphi+\gamma) - q\sin\varphi\sin(\alpha+\beta) = 0,$$
$$eq\sin\varphi\cos(\alpha+\beta) - \sin(\varphi+\gamma) = 0.$$

Eliminire ich aus diesen Gleichungen $(\alpha+\beta)$, so ergibt sich:

$$q^2 = e^2\frac{\cos^2(\varphi+\gamma)}{\sin^2\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi+\gamma)}{e^2\sin^2\varphi}.$$

Es ist hierin also $q = (k_1 - k_2)/2$, γ der Winkel zwischen U und L, e das Axenverhältniss der Bahnellipse des austretenden Lichtes und:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{s}\operatorname{tg}\frac{l-r}{2} = \frac{2}{k_1+k_2}\operatorname{tg}\frac{l-r}{2}.$$

Lässt man das aus der Platte tretende Licht senkrecht durch einen Compensator gehen, dessen Hauptaxen H'' und S'' sind (Fig. 1), so erhält man für das aus demselben tretende Licht folgende Formeln:

$$u'' = F'\cos\tau'\cos\omega - F'e\sin\tau'\sin\omega,$$
$$v'' = F'\cos(\tau'+\Delta')\sin\omega + F'e'\sin(\tau'+\Delta')\cos\omega.$$

Hierin bedeutet ω den Winkel, den U mit H'' macht, und Δ' den Gangunterschied, der zwischen beiden Strahlen durch den Compensator hervorgerufen wird.

Es sollen nun die Beobachtungen so eingerichtet werden, dass das austretende Licht linear parallel der Richtung A, welche den Winkel zwischen H'' und S'' halbirt, polarisirt ist. Es muss dann $u'' = v''$ sein, also:

$$F'\cos\omega = F'\sin\omega\cos\Delta' + F'e\cos\omega\sin\Delta'$$
$$F'e\sin\omega = F'\sin\omega\sin\Delta' - F'e\cos\omega\cos\Delta'.$$

Eliminire ich hieraus e, so ergibt sich:

$$(\cos\omega - \sin\omega\cos\Delta')(\sin\omega + \cos\omega\cos\Delta') - \cos\omega\sin\omega\sin^2\Delta' = 0$$
$$= (\cos^2\omega - \sin^2\omega)\cos\Delta'.$$

Da nun $\cos\Delta'$ im allgemeinen nicht gleich Null sein kann, so ergibt sich $\cos^2\omega = \sin^2\omega$. Also entweder $\cos\omega = \sin\omega$, also $\omega = 45^0$ oder $\cos\omega = -\sin\omega$ also, $\omega = 135^0$.

Für $\omega = 45^0$ ergibt sich dann:

$$e = \frac{1-\cos\Delta'}{\sin\Delta'} = \operatorname{tg}\frac{\Delta'}{2},$$

für $\omega = 135^0$ ist:

$$e = \frac{1+\cos\Delta'}{\sin\Delta'} = \operatorname{ctg}\frac{\Delta'}{2}.$$

Der zweite Fall gibt dieselbe Ellipse, nur sind dann die U- und V-Ebenen um 90° gedreht.

Der Gangunterschied Δ' wird durch den Compensator bestimmt. Dieser besteht aus zwei planparallelen Krystallplatten, die parallel der optischen Axe geschnitten sind, und deren Hauptschnitte senkrecht aufeinander stehen. Die eine dieser Platten ist in zwei keilförmige Stücke gespalten, von denen das eine in seitlicher Richtung durch eine Mikrometerschraube verstellbar ist (Fig. 2).

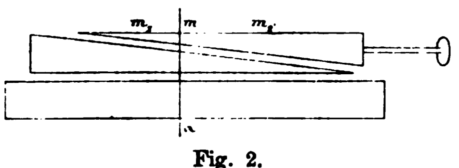


Fig. 2.

Der Gangunterschied Δ' sei nun gleich $2h\pi$, wenn m_1 senkrecht über a steht, und gleich $2(h+1)\pi$, wenn m_2 senkrecht über a steht.

Steht der Punkt m senkrecht über a, so ist der Gangunterschied $\Delta' = 2h\pi + 2\pi(m - m_1/m_2 - m_1)$ also:

$$e = \operatorname{tg}\frac{\Delta'}{2} = \operatorname{tg}\pi\frac{m - m_1}{m_2 - m_1} = \operatorname{tg} n.$$

n ist also durch die Beobachtung zu bestimmen.

Damit das aus dem Compensator tretende Licht parallel der Richtung A schwingen kann, müssen, wie gezeigt, die Richtungen U und V parallel, resp. senkrecht zu A sein, muss also der Winkel α, den U mit dem Hauptschnitte H bildet, in einem bestimmten Zusammenhange mit γ stehen. Aus den Gleichungen:

$$e\cos(\gamma + \varphi) - q\sin\varphi\sin(\gamma + 2\alpha) = 0,$$
$$eq\sin\varphi\cos(\gamma + 2\alpha) - \sin(\gamma + \varphi) = 0$$

eliminire ich e und erhalte für γ die Gleichung:

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -\frac{\sin 2\varphi - q^2\sin^2\varphi\sin 4\alpha}{\cos 2\varphi - q^2\sin^2\varphi\cos 4\alpha}.$$

Hierin sind q und φ die zu bestimmenden Constanten der Quarzplatte, und es ergeben sich folglich zu jedem Werthe von α zwei Werthe γ und γ', die um 90° voneinander verschieden sind. Diese Winkel γ und γ' sind nun die Winkel, die L mit A bildet und, wie unten gezeigt werden wird, beobachtbar.

Ich erhalte also für q und φ folgende Gleichung:

$$q^2 = \operatorname{tg}^2 n \frac{\cos^2(\varphi + \gamma)}{\sin^2 \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi + \gamma)}{\operatorname{tg}^2 n \sin^2 \varphi},$$

$$= \operatorname{ctg}^2 \varphi \, [\operatorname{tg}^2 n \cos^2 \gamma + \operatorname{ctg}^2 n \sin^2 \gamma] + \operatorname{ctg} \varphi \sin 2\gamma \, [\operatorname{ctg}^2 n - \operatorname{tg}^2 n]$$
$$+ \operatorname{tg}^2 n \sin^2 \gamma + \operatorname{ctg}^2 n \cos^2 \gamma,$$
$$= A \operatorname{ctg}^2 \varphi + B \operatorname{ctg} \varphi + C.$$

Benutze ich γ' statt γ und nenne den diesem entsprechenden Werth von e, e', so bestehen die Gleichungen:

$$e' \cos(\varphi + \gamma') - q \sin \varphi \sin(2\alpha + \gamma') = 0,$$
$$e' q \sin \varphi \cos(2\alpha + \gamma') - \sin(\varphi + \gamma') = 0.$$

Da nun $\gamma' = \gamma + 90^0$ ist, so erhält man:

$-e' \sin(\varphi + \gamma) - q \sin \varphi \cos(2\alpha + \gamma) = 0$. Es war aber $eq \sin \varphi \cos(2\alpha + \gamma) - \sin(\varphi + \gamma) = 0$. Also ergibt sich

$$e' = -1/e, \qquad \operatorname{tg} n' = -\operatorname{ctg} n, \qquad n' = n + 90^0.$$

Hieraus ergibt sich für q und $\operatorname{ctg} \varphi$ dieselbe Gleichung wie oben.

Drehe ich die Quarzplatte in ihrer Ebene um $\pi/2$, π, $3\pi/2$, so behält $\operatorname{tg} 2\gamma$ immer denselben Werth:

$$-\frac{\sin 2\varphi - q^2 \sin^2 \varphi \sin 4\alpha}{\cos 2\varphi - q^2 \sin^2 \varphi \cos 4\alpha}.$$

Es ergeben sich also für γ, γ', e, e' und A, B, C immer dieselben Werthe.

Drehe ich die Platte aber um $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ und $7\pi/4$, so erhalte ich:

$$\operatorname{tg} 2\gamma' = \frac{\cos(2\alpha - 2\varphi) + q^2 \sin^2 \varphi \cos 2\alpha}{-\sin(2\alpha - 2\varphi) + q^2 \sin^2 \varphi \sin 2\alpha}.$$

Die Werthe, die sich hieraus für γ' ergeben, liefern im allgemeinen nicht dieselben Werthe für die A, B, C, sodass man also aus den beiden Gleichungen:

$$q^2 = A \operatorname{ctg}^2 \varphi + B \operatorname{ctg} \varphi + C, \qquad q^2 = A_1 \operatorname{ctg}^2 \varphi + B_1 \operatorname{ctg} \varphi + C_1$$

die Constanten q und φ berechnen kann.

Die Beobachtungen selbst wurden mit einem Fuess'schen Polarisationsapparate nach Entfernung der Linsen in folgender Weise angestellt. Zunächst wurde eine durch das Fadenkreuz, das sich hinter dem Analysator befand, und ein vor demselben befindliches verschiebbares Ocular, dessen

Durchmesser ungefähr $^1/_2$ mm betrug, gelegte Gerade in die Drehungsaxe des Analysators gebracht. Solange dieses nicht erreicht ist, beschreibt das Fadenkreuz beim Beobachten auf einer dahinter befestigten Unterlage einen Kreis, wenn man den Analysator dreht. Das Ocular wird nun solange verschoben, bis das Fadenkreuz an derselben Stelle bleibt, wenn der Analysator gedreht wird. Ist dieses erreicht, so werden an verschiedenen Stellen der Theilkreise die Stellungen der Nicols aufgesucht, in denen sie senkrecht zu einander stehen, sodass man zu jeder Stellung des Analysators diejenige des Polarisators weiss, in der er senkrecht zum Analysator steht. Nun wird der Compensator an der Hülle, in der sich der Analysator dreht, so befestigt, dass die Ebene seiner Platten senkrecht zur Drehungsaxe des Analysators steht. Eine geringe Abweichung von dieser Lage hat keinen Fehler zur Folge, da dieselbe die in n vorkommenden Längen $m - m_1$ und $m_2 - m_1$ gleichmässig ändert, sodass also der Quotient derselbe bleibt. Nun wurden die Nicols senkrecht zu einander gestellt und der Compensator so eingestellt, dass seine Wirkung verschwand, dass also der Gangunterschied in demselben ein Vielfaches von einer ganzen Wellenlänge ist. (Hier will ich bemerken, dass immer eine Kochsalzflamme benutzt wurde.) Als Mittel aus je zehn Beobachtungen erhielt ich diese Stellung bei 7,16—15,56—23,97 Umdrehungen der Mikrometerschraube. Es entsprechen also 8,40, resp. 8,41 Umdrehungen einem Gangunterschiede von einer Wellenlänge. Wurde nun die Schraube auf 11,36 und 19,76 gestellt, so musste der Gangunterschied ein ungerades Vielfaches von einer halben Wellenlänge sein, und der Analysator musste um einen Winkel ϑ gedreht werden, um abermals Dunkelheit zu erhalten. Hatte er aber vorher mit dem Hauptschnitte des Compensators den Winkel Θ gemacht, so musste er jetzt den Winkel $-\Theta$ machen. Es war also $2\Theta = \vartheta$. Der Analysator hat also die verlangte Lage, dass seine Schwingungsrichtung den Winkel zwischen dem Hauptschnitte des Compensators halbirt, wenn er aus seiner ersten Lage um $\vartheta/2 \pm \pi/4$ gedreht wird. So wurde er nun eingestellt und behielt während der Versuche immer dieselbe Stel-

lung. Die Stellung des Polarisators, in der er zum Analysator senkrecht stand, war ebenfalls bekannt, und von dieser aus wurde dann der Winkel γ gerechnet.

Nun wurde die Quarzplatte mit Canadabalsam auf einem Tischchen mit einer Glasplatte befestigt, welches um eine der Visirrichtung parallele Axe drehbar war und an der Hülse, in der der Polarisator sich drehte, zwischen letzterem und dem Compensator sich befand. Da das Tischchen auf einer Drehbank gearbeitet war, so konnte man annehmen, dass die Platte annähernd senkrecht zur Drehungsaxe stand. Ueberdies eliminirte sich eine Abweichung hiervon durch die Beobachtungsmethode von selbst.

Hatte das Tischchen eine beliebige Stellung in seiner Ebene, so konnte man durch Drehen des Polarisators und der Mikrometerschraube es dahin bringen, dass in der Visirrichtung sich ein Maximum der Dunkelheit zeigte. Es war dieses ein dunkler Fleck, der sich bei Drehung des Polarisators in einer seitlichen Richtung bewegte und bei Drehung der Mikrometerschraube in einer hierzu senkrechten. Diese letztere Einstellung liess sich genauer machen. Sie wurde daher zuerst gemacht, dann der Polarisator viermal eingestellt und aus diesen vier Einstellungen das Mittel genommen. Von diesem zeigten die einzelnen Beobachtungen Abweichungen bis zu einem Grade. Drehte man nun den Polarisator um 90°, so musste die Mikrometerschraube um 4,20 Umdrehungen gedreht werden, damit n um 90° wuchs. Hier wurden nun wieder dieselben Beobachtungen gemacht wie vorher. In dieser Weise wurde an vier verschiedenen Stellen des Compensators beobachtet, und es ergab sich z. B. bei der ersten Stellung der Platte I:

Stellung der Mikrometerschraube.	Ablenkungswinkel γ.
7,63 − 7,16 = 0,47	61,5°
11,82 − 7,16 = 0,46 + 4,20	63,9 + 90°
15,95 − 15,56 = 0,39	61,2°
20,22 − 15,56 = 0,46 + 4,20	62,8 + 90°.

Um die Grössen n in Graden zu erhalten, muss ich die Ablesungen an der Mikrometerschraube mit 300 / 14 mul-

tipliciren, da ja $n = \pi(m - m_1/m_2 - m_1) = 180^0 (m - m_1)/8{,}40 = 300/14^0 (m - m_1)$ ist. Ich erhielt also:

$n = 10{,}1^0 \quad 9{,}9^0 \quad 8{,}4^0 \quad 9{,}9^0$
$\gamma = 61{,}5 \quad 63{,}9 \quad 61{,}2 \quad 62{,}8$

Aus diesen Beobachtungen wurde das Mittel genommen, sodass man also $n = 9{,}5^0$, $\gamma = 62{,}35^0$ erhielt. Für diese Werthe wurde $A = 28{,}02$, $B = 29{,}34$, $C = 7{,}71$.

Dreht man nun das Tischchen mit der Quarzplatte immer um 45°, so erhält man aus den acht Beobachtungsreihen acht Gleichungen für q und φ, aus denen man nach der Methode der kleinsten Quadrate q und φ selbst finden kann.

Für Platte I erhielt ich so:

n	γ	A	B	C	B'	C'	C''
+9,5°	62,35	28,02	29,34	7,71	+ 2,43	0,09	0,10
−6,1	66,15	73,23	64,73	14,32	− 5,58	0,13	0,10
−9,2	62,6	30,06	31,13	8,09	+ 2,27	0,08	0,09
+5,0	65,7	108,5	97,96	22,13	− 6,1	0,12	0,09
+8,0	63,05	40,23	40,89	10,42	+ 2,26	0,07	0,08
−5,8	65,9	80,76	72,24	16,17	− 5,30	0,12	0,09
−8,0	63,2	40,32	40,73	10,31	+ 2,01	0,06	0,07
+5,5	65,6	89,46	81,14	18,42	− 4,74	0,09	0,07

Die Gleichungen lauten: $q^2 = A \operatorname{ctg}^2 \varphi + B \operatorname{ctg} \varphi + C$.

Aus der ersten und zweiten Gleichung ergibt sich nach Elimination von q^2 für $\operatorname{ctg}\varphi$ der Werth $-0{,}31$, resp. $-0{,}48$. Aus der ersten und vierten erhält man $\operatorname{ctg}\varphi$ gleich $-0{,}37$, resp. $-0{,}47$. Der gemeinsame Werth von $\operatorname{ctg}\varphi$ wird also in der Nähe von $-0{,}48$ liegen. Setze ich also $\operatorname{ctg}\varphi = -0{,}48 + \alpha$, so wird α nur klein sein, sodass ich α^2 vernachlässigen kann. Dann erhalte ich:

$$q^2 = A(-0{,}48 + \alpha)^2 + B(-0{,}48 + \alpha) + C$$
$$= A\,0{,}2304 - B\,0{,}48 + C + \alpha(-0{,}96 A + B) + \alpha^2 A = C' + B'\alpha.$$

Aus den acht Gleichungen $q^2 = C' + B'\alpha$ erhalte ich folgende zwei:

$$8 q^2 = \Sigma C' + \Sigma B'\alpha, \qquad \Sigma B' q^2 = \Sigma B'C' + \Sigma B'^2 \alpha.$$

Nun ist $\Sigma B' = -12{,}75$, $\Sigma C' = 0{,}76$, $\Sigma B'^2 = 139{,}09$, $\Sigma B'C' = -1{,}839$, also:

$$8 q^2 + 12{,}75\,\alpha = 0{,}76, \qquad 12{,}75\, q^2 + 139{,}09\,\alpha = 1{,}839.$$

Hieraus ergibt sich $\alpha = 0{,}0053$, also $\operatorname{ctg}\varphi = -0{,}48 + 0{,}0053 = -0{,}4747$ und $q^2 = 0{,}086$.

Setze ich den Werth für α in die einzelnen Gleichungen, so erhalte ich $q^2 = C' + B'\,0{,}0053 = C''$. C'' gibt also die Werthe von q^2, die sich aus den einzelnen Beobachtungen ergeben; dieselben schwanken zwischen 0,07 und 0,10.

Für Platte II erhielt ich nun:

n	γ	A	B	C	B'	C'	C''
$-21{,}85^0$	$+62{,}45^0$	4,923	+3,467	1,456	+6,912	3,272	3,337
−25,7	−11,85	0,404	−1,643	4,145	−1,360	3,620	3,607
+19,7	+62,25	6,137	+4,346	1,791	+8,642	4,065	4,146
+24,65	−13,85	0,471	−2,110	4,489	−1,781	3,808	3,791
−19,95	+60,15	5,743	+3,763	1,979	+7,783	3,999	4,072
−24,2	−12,55	0,426	−2,014	4,727	−1,716	4,074	4,058
+19,5	+62,55	6,296	+4,491	1,805	+8,898	4,148	4,231
+24,65	−11,85	0,402	−1,824	4,558	−1,543	3,969	3,955

Der Näherungswerth von $\operatorname{ctg}\varphi$ ergibt sich hier gleich 0,35. Setze ich also $\operatorname{ctg}\varphi = 0{,}35 + \alpha$, so wird:

$$q^2 = A(0{,}35+\alpha)^2 + B(0{,}35+\alpha) + C = A\,0{,}1225 + B\,0{,}35 + C + \alpha(A\,0{,}7 + B) + \alpha^2 A = B'\alpha + C'.$$

Es ergab sich nun:

$$\Sigma B' = 25{,}635, \quad \Sigma C' = 30{,}955, \quad \Sigma B'^2 = 272{,}57, \quad \Sigma B'C' = 100{,}97.$$

$$\alpha = -0{,}0094, \quad \operatorname{ctg}\varphi = 0{,}3406, \quad q^2 = 3{,}840.$$

Die Werthe von C'' schwankten zwischen 3,337 und 4,231.

Die an einer dritten Platte III angestellten Beobachtungen ergaben nur sehr geringe Werthe von n, sodass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Resultate einen überwiegenden Einfluss hatten, da $\operatorname{tg} n$ in den Formeln im Nenner vorkommt. Es ergab sich infolge dessen für $\operatorname{ctg}\varphi$ gar kein gemeinsamer Näherungswerth.

Um nun die Winkel zu bestimmen, welche die Normalen der Platten mit den optischen Axen bildeten, wurden die Erscheinungen, die die Platten in convergentem Lichte zeigten, beobachtet. Zunächst wurde die betreffende Platte, welche an einem Kugelgelenk befestigt war, senkrecht zu der Visirrichtung gestellt, und zwar mittelst Reflexion des Faden-

kreuzes; dann wurde sie im convergenten Lichte beobachtet, und zwar wurden die Nicols so gestellt, dass sich in der Richtung der optischen Axe das dunkle Kreuz zeigte. Nun wurde die Platte in ihrer Ebene gedreht, bis das Kreuz in horizontaler Richtung neben der Mitte des Fadenkreuzes stand. Hierbei war natürlich die (senkrechte) Stellung zur Visirlinie nicht mehr dieselbe geblieben. Die Platte wurde wieder senkrecht gestellt, und nach einigen Einstellungen war es dann erreicht, dass die optische Axe in einer horizontalen Ebene lag und zugleich die Platte senkrecht zur Visirlinie stand. Die Einstellung des dunklen Kreuzes in die horizontale Ebene lässt sich nicht sehr genau machen; es hat aber ein kleiner Fehler hierin keinen Einfluss, da nur der Cosinus dieses kleinen Winkels zu dem erhaltenen Resultate im Nenner hinzutreten würde. Das Kugelgelenk mit der daran befestigten Platte ist nun um eine verticale Axe drehbar. Liest man die Stellung desselben ab und dreht es, bis das schwarze Kreuz in die Visirrichtung kommt, so erhält man den Winkel der optischen Axe gegen die Normale aus dem abgelesenen Drehungswinkel ϑ durch die Formel: $\sin \Theta = \sin \vartheta / 1{,}544$.

Die Einstellung des schwarzen Kreuzes in die Visirlinie liess sich bis auf $^1/_{10}$ Grad genau machen. Sie wurde sechsmal wiederholt und das Mittel aus den sechs Beobachtungen genommen. Es ergab sich dann:

für Platte I $\vartheta = 3^0\, 40'$, $\Theta = 2^0\, 22{,}4'$,
für Platte II $\vartheta = 11^0\, 8'$, $\Theta = 7^0\, 11{,}4'$,
für Platte III $\vartheta = 23^0\, 22'$, $\Theta = 14^0\, 54{,}2'$.

Aus der Grösse q ergibt sich k_1 auf folgende Weise.

Es ist: $k_1 - k_2 = 2q$, $k_1 - \frac{1}{k_1} = 2q$,

$$k_1^2 - 2qk_1 + q^2 = q^2 + 1. \quad \text{Also } k_1 = q \pm \sqrt{q^2 + 1}.$$

Die Platten waren sämmtlich aus einem rechts drehenden Krystall, also musste sich der Strahl schneller fortpflanzen, der, vom Analysator gesehen, rechts herum, vom Polarisator gesehen, links herum rotirte. Es musste also $l - r < 0$ sein, und der links rotirende Strahl musste derjenige sein, der

dem ordinären Strahle entspricht. Es musste also die grosse Axe der Ellipse, in der der links rotirende Strahl seine Schwingungen ausführte, in der Hauptebene liegen; folglich war $k_2 < 1$ und $k_1 > 1$. Es musste also für q die positive Quadratwurzel aus q^2 genommen werden. Da aber sowohl k_1 als k_2 grösser als Null sein müssen, so muss auch bei $\sqrt{q^2+1}$ das positive Zeichen genommen werden. Es ergibt sich also:

$$k_1 = \sqrt{q^2+1} + q, \qquad k_2 = \sqrt{q^2+1} - q.$$

Zur Bestimmung des Gangunterschiedes hat man die Formel $\operatorname{tg}(l-r)/2 = s \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{q^2+1} \operatorname{tg}\varphi$. Es ist also $(l-r)/2$ hier nur bis auf ganze Vielfache von π bestimmt. Aber der absolute Werth von $(l-r)/2$ muss zwischen zwei bestimmten Vielfachen von π liegen, welche man daraus findet, dass man beobachtet, zwischen welche Ringe die Normale fällt, wenn man convergentes Licht benutzt und die Nicols so stellt, dass sich die Ringe um die optische Axe ergeben. Bei Platte I und II lagen die Normalen innerhalb des ersten Ringes. Der absolute Werth von $(l-r)/2$ musste also für beide zwischen 0 und π liegen. Da die Platten ferner rechtsdrehend waren, so musste $l - r < 0$ sein, sodass sich also $(l-r)/2$ vollständig eindeutig bestimmen liess.

Es ergab sich nun für Platte I:

$$q^2 = 0{,}086, \qquad \operatorname{ctg}\varphi = -0{,}4747,$$
$$q = 0{,}293, \quad \sqrt{q^2+1} = 1{,}042, \quad k_1 = 1{,}335, \quad k_2 = 0{,}749,$$
$$\frac{l-r}{2} = -65{,}5, \qquad \frac{l-r}{2\pi} = -0{,}3638,$$

für Platte II:

$$q^2 = 3{,}840, \qquad \operatorname{ctg}\varphi = +0{,}3406,$$
$$q = 1{,}960, \quad \sqrt{q^2+1} = 2{,}200, \quad k_1 = 4{,}160, \quad k_2 = 0{,}240,$$
$$\frac{l-r}{2} = 81{,}2^0 - \pi = -98{,}8^0, \qquad \frac{l-r}{2\pi} = -0{,}5489.$$

Führe ich die Rechnung mit den Werthen von q^2 aus, welche von den eben benutzten am meisten abweichen, so erhalte ich für Platte I:

$$\text{für } q^2 = 0{,}07 \qquad k_2 = 0{,}769 \qquad \frac{l-r}{2\pi} = -0{,}3630,$$

für $q^2 = 0{,}10$ $k_2 = 0{,}733$ $\frac{l-r}{2\pi} = -0{,}3648$;

für Platte II:

für $q^2 = 3{,}337$ $k_2 = 0{,}255$ $\frac{l-r}{2\pi} = -0{,}5516$,

für $q^2 = 4{,}231$ $k_2 = 0{,}230$ $\frac{l-r}{2\pi} = -0{,}5469$,

sodass die wahren Werthe wenigstens sicher zwischen diesen Werthen liegen müssen, vorausgesetzt, dass die Einstellungen des Compensators und der Nicols fehlerfrei gewesen sind.

Bezeichne ich nun mit d den Gangunterschied, den eine Platte von 1 mm Dicke hervorrufen würde, so ist:

$$d = \frac{l-r}{2\pi}\frac{1}{D}.$$

Die Dicke der Platten wurde mit einem Sphärometer gemessen und ergab sich für I = 2,972 mm und für II = 1,996 mm. Es ergibt sich somit für die Platte I:

$\Theta = 2^0\ 22{,}4'$ $k_2 = 0{,}75$ $d = -0{,}1224$,

und für Platte II:

$\Theta = 7^0\ 11{,}4'$ $k_2 = 0{,}24$ $d = -0{,}2750$.

Platte III mit $\Theta = 14^0\ 54{,}2'$ ergab keine bestimmbaren Resultate mehr.

Nach der Theorie, welche Cauchy[1]) über die elliptische Polarisation aufgestellt hat, soll $k_2 = \sqrt{h^2+1} - h$ und $d^2 = p^2 \sin^4\Theta + d_0^2 \cos^4\Theta$ sein, worin $h = p/d_0 \operatorname{tg}^2\Theta$ und $p = n/n'(1/\lambda)(n'-n)$ ist. Die Form, welche v. Lang[2]) zuerst für diese Grössen aufstellte, ist genau dieselbe. Später änderte er sie jedoch dahin ab, dass er $d^2 = p^2 \sin^4\Theta + d_0^2$ und $h = p/d_0 \sin^2\Theta$ setzte.[3])

Lommel[4]) stellte dieselbe Form wie Cauchy auf, nur fand er $p = (n^2 - 1/n'^2 - 1)\ (n'^2 - n^2/2n\lambda)$.

Hr. W. Voigt[5]) gibt für das Axenverhältniss folgende Formel an:

1) Cauchy, Ann. de chim. et de phys. (3) **30.** p. 68. 1850.
2) v. Lang, Pogg. Ann. **119.** p. 85. 1863.
3) v. Lang, Pogg. Ann. Ergbd. **8.** p. 622. 1878.
4) Lommel, Wied. Ann. **15.** p. 389. 1881.
5) Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 899. 1883.

$$\varepsilon_\varphi = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2}\right)^2 \sin^4\varphi + \omega^2(\omega_1 - \omega_2)^2} - \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2} \sin^2\varphi}{\omega(\omega_1 - \omega_2)}$$

$$= \pm(\sqrt{h^2 + 1} - h), \text{ wenn ich } h = \frac{\omega'^2 - \omega''^2}{2(\omega_1 - \omega_2)\omega} \sin^2\varphi \text{ setze.}$$

Führe ich nun die Zahlenwerthe $n = 1{,}55338$, $n' = 1{,}54423$, $d_0 = 0{,}1207$ und $\lambda = 0{,}000\,589$ ein, so ergibt sich für die ersten Theorien $p = 15{,}28$, resp. 15,27. Für die Cauchy'sche und die Lommel'sche Theorie erhalte ich dann:

für $\Theta = 2^0\ 22{,}4'$ $k_2 = 0{,}806$ $d = 0{,}1233$
$\Theta = 7^0\ 11{,}4'$ $k_2 = 0{,}243$ $d = 0{,}2672$.

Die zweite von v. Lang entwickelte Theorie ergibt:

für $\Theta = 2^0\ 22{,}4'$ $k_2 = 0{,}806$ $d = 0{,}1234$
$\Theta = 7^0\ 11{,}4'$ $k_2 = 0{,}237$ $d = 0{,}2686$.

Die Voigt'sche Theorie ergibt für $\Theta = 2^0\ 22{,}4'$, $k_2 = 0{,}805$ und für $\Theta = 7^0\ 11{,}4'$, $k_2 = 0{,}237$.

Aus den oben angeführten Beobachtungen ergibt sich:

für $\Theta = 2^0\ 22{,}4'$ $k_2 = 0{,}75\ (\pm 0{,}02) - d = 0{,}1224\ (\pm 0{,}0003)$,
$\Theta = 7^0\ 11{,}4'$ $k_2 = 0{,}24\ (\pm 0{,}01) - d = 0{,}2750\ (\pm 0{,}001)$.

Dieselben stimmen also für den ersten Winkel in Bezug auf das Axenverhältniss und für den zweiten Winkel in Bezug auf den Gangunterschied mit keiner der Theorien überein.

Jamin hatte für den Einfallswinkel:

$3^0\ 11'$ $k = 0{,}855$ $d = 0{,}123$ $10^0\ 39'$ $k = 0{,}285$ $d = 0{,}261$
$3^0\ 49'$ $k = 0{,}789$ $d = 0{,}124$ $11^0\ 35'$ $k = 0{,}252$ $d = 0{,}284$

gefunden. Er würde also für den Einfallswinkel:

$3^0\ 40'$ ungefähr $k = 0{,}805$ $d = 0{,}124$ und für
$11^0\ 8'$ $k = 0{,}268$ $d = 0{,}273$

beobachtet haben.

Während die Werthe bei dem ersten Winkel mit den theoretischen sehr gut übereinstimmen, zeigt sich bei dem zweiten Winkel eine bedeutende Abweichung, sodass die Beobachtungen Jamin's auch nicht als die Theorieen unbedingt bestätigend betrachtet werden können, und dass neue Messungen und Beobachtungen über denselben Gegenstand wünschenswerth erscheinen.

IV. *Zur Theorie des Lichtes; von W. Voigt.*

Hr. Lommel hat in einem Aufsatz[1]) „Zur Theorie des Lichtes“ auf die von mir vor einem Jahre erhobenen Bedenken gegen seine optischen Theorien[2]) geantwortet; ich halte mich bei der Wichtigkeit der Angelegenheit für verpflichtet, seine Ausführungen nicht unerwidert zu lassen, um so mehr, als ihre Besprechung Veranlassung zu allgemeineren Betrachtungen gibt.

Der erste meiner Einwände betraf Hrn. Lommel's Einführung der zwischen Aether und Materie angenommenen Reibungskraft in die Differentialgleichungen, welche im Widerspruch mit dem Princip der entgegengesetzten Gleichheit von actio und reactio oder mit dem Princip der Schwerpunktsbewegung steht. Hr. Lommel gibt in seiner Erwiderung[3]) letzteres zu, bestreitet aber ersteres. Dies ist sehr befremdlich, da ja bekanntlich das letztere Princip eine ganz directe Folge des ersten ist; insofern nämlich actio und reactio entgegengesetzt gleich sind, sind für ein Massensystem die Componentensummen aller inneren Kräfte verschwindend, und gelten demgemäss, wenn äussere Kräfte fehlen, die Formeln:

$$\sum m_h \frac{\partial^2 x_h}{\partial t^2} = 0, \qquad \sum m_h \frac{\partial^2 y_h}{\partial t^2} = 0, \qquad \sum m_h \frac{\partial^2 z_h}{\partial t^2} = 0,$$

d. h. die Gleichungen der Schwerpunktsbewegung.

Hr. Lommel setzt aber in seiner Erwiderung, ebenso wie früher, die Beschleunigung der Aethermasse $= + \partial^2 u / \partial t^2$, die der ponderabeln $= - \partial^2 U / \partial t^2$ (wenn u und U die Differenz der x-Coordinaten im verschobenen und natürlichen Zustande bezeichnen) und führt zur Begründung an, dass u und U stets entgegengesetztes Zeichen haben.[4]) Dies ist aber durchaus gleichgültig; welches auch das Vorzeichen

1) E. Lommel, Wied. Ann. **19.** p. 908. 1883.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **17.** p. 468. 1882.

3) E. Lommel, l. c. p. 909.

4) Auf die Betrachtungen, durch welche Hr. Lommel dies erweisen will, komme ich später.

von u und U sei, stets ist die Beschleunigung durch $+\partial^2 u/\partial t^2$, $+\partial^2 U/\partial t^2$ die wirkende Kraft durch $+m(\partial^2 u/\partial t^2)$ $+\mu(\partial^2 U/\partial t^2)$ gegeben.

Ich erachte diese Frage hierdurch endgültig erledigt.[1])

Mein zweiter Einwand war, dass auch, wenn man jenes falsche Vorzeichen beseitigt, die Einführung der Reibungskräfte bedenklich sei, da sie Resultate ergibt, die mit der Beobachtung im Widerspruch stehen.[2]) Er ist ganz allgemein von Hrn. Lommel anerkannt und dadurch (da jenes falsche Vorzeichen in keiner Weise gerechtfertigt werden kann) indirect die Unhaltbarkeit seiner Theorie zugegeben.

Mein dritter und vierter Einwand betraf die Gesetze, die Hr. Lommel für diejenigen Kräfte einführt, welche die bewegten ponderabeln Massen von den umgebenden erfahren. Hr. Lommel hat in seiner Erwiderung die frühere physikalische Begründung derselben theilweise verlassen, um sich ernstlicher derjenigen Vorstellung zuneigen, die seiner Zeit Hr. von Helmholtz „zur Vereinfachung der Rechnung, obgleich wohl nicht ganz der Wirklichkeit entsprechend" ausgesprochen hatte. Aber er hat sie durch die nicht zulässigen Reibungskräfte zwischen Aether und Materie ergänzt und im übrigen so geändert, dass sie das von Hrn. von Helmholtz ausgesprochene Prädicat „mechanisch unanstössig" nicht mehr verdient.

Hr. Lommel stellt an die Spitze seiner Theorie den Grundsatz[3]):

„Die Lichtwellen werden nur durch den Aether, nicht aber durch die Körpermolecüle fortgepflanzt."

Der Sinn dieses an sich nicht ganz klaren Satzes und

---

1) Das von Hrn. Lommel angeführte Bild (Stimmgabel — Luft) ist nicht richtig verwandt. Die Reibungskräfte sind für das betrachtete Volumenelement innere und nicht äussere, darum müssen sie der Schwerpunktsgleichung genügen, trotzdem Hr. Lommel sie als „von der Lichtwelle ausgeübt" bezeichnet.

2) Auf das kleine Missverständniss meiner Darlegung dieses Einwandes durch Hrn. Lommel brauche ich wohl nicht einzugehen, da dasselbe klar am Tage liegt.

3) l. c. p. 910.

der Gedankengang seiner Begründung wird aus den folgenden Sätzen ersichtlich.

„Wenn eine Lichtwelle durch den in einem Körper enthaltenen Aether fortschreitet, so werden die Lagen der Körpermolecüle . . . durch sie nicht alterirt.“

„Durch die Lichtbewegungen werden nur intramoleculare Schwingungen . . . hervorgerufen, nicht aber intermoleculare Schwingungen der ganzen Molecüle um ihre Gleichgewichtslagen innerhalb des aus ihnen zusammengesetzten Körpers.“

„Eine vermöge intermolecularer Wirkungen durch die Körpermolecüle fortgepflanzter Welle ist nichts anderes als eine Schallwelle“, aber keine Lichtwelle. „Die gewöhnliche Elasticitätstheorie vermag nur die Fortpflanzung des Schalles durch die Körper und die des Lichtes durch den freien Aether zu erklären, niemals aber die Fortpflanzung von Licht durch ponderable Massentheilchen.“

Diese Schlussreihe ist nicht haltbar. Um dies hervortreten zulassen, betrachte ich die Fortpflanzung einer Welle in einem aus zwei Arten von Molecülen (Aether und Materie) zusammengesetzten isotropen Medium und lege diejenigen Differentialgleichungen zu Grunde, welche ich als für durchsichtige Medien zulässig nachgewiesen habe[1]), nämlich (indem ich auf Grund der Erfahrung die sicher sehr kleinen Glieder mit n und r hinweglasse und die Dichte des Aethers vorläufig noch nicht unendlich klein neben der der Materie annehme):

$$\text{(1.)}\quad \begin{aligned} m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= e\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + a\frac{\partial^2 (u-U)}{\partial z^2} + a'\frac{\partial^4 (u-U)}{\partial t^2\,\partial z^2} \\ \mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \varepsilon\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a\frac{\partial^2 (u-U)}{\partial z^2} - a'\frac{\partial^4 (u-U)}{\partial t^2\,\partial z^2} \end{aligned}$$

Setzt man hierin:

$$u = \alpha \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right)$$

$$U = A \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right), \text{ wo } \tau = \frac{T}{2\pi} \text{ ist,}$$

so erhält man:

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19**. p. 884. 1883.

$$\alpha\left(m\omega^2 - (e + a) + \frac{a'}{\tau^2}\right) = - A\left(a - \frac{a'}{\tau^2}\right)$$

$$A\left(\mu\omega^2 - (\varepsilon + a) + \frac{a'}{\tau^2}\right) = - \alpha\left(a - \frac{a'}{\tau^2}\right),$$

wofür ich kürzer setze:

$$(2.)\quad \left|\begin{array}{l} \alpha\left(\omega^2 - \frac{e'}{m}\right) = - A\frac{\varkappa}{m} \\ A\left(\omega^2 - \frac{\varepsilon'}{\mu}\right) = - \alpha\frac{\varkappa}{\mu}. \end{array}\right.$$

Hieraus folgt die quadratische Gleichung für ω^2:

$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{e'}{m} + \frac{\varepsilon'}{\mu}\right) = \frac{\varkappa^2}{m\mu} - \frac{e'\varepsilon'}{m\mu}$$

also:

$$(3.)\quad \left|\ \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{e'}{m} + \frac{\varepsilon'}{\mu}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{e'}{m} - \frac{\varepsilon'}{\mu}\right)^2 + \frac{4\varkappa^2}{m\mu}}\right]\right.$$

Die durch das obere Zeichen gegebene Wurzel für ω^2 liefert eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit (ω_1) von der Ordnung derjenigen des Lichtes, die durch das untere Zeichen, eine (ω_2) von der Ordnung derjenigen des Schalles. Stets also treten zwei Wellen auf.[1] Es handelt sich darum, zu untersuchen, unter welchen Umständen nur eine von beiden merklich ist. Hierzu bemerke ich, dass:

$$(4.)\quad \left|\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{e'}{m} + \frac{\varepsilon'}{\mu} \text{ ist.}\right.$$

Setze ich in der ersten Gleichung (2) ω_1 für ω, so sind α und A zugleich mit α_1 und A_1 zu vertauschen und bezeichnen specieller diejenigen Amplituden von Aether und Körpertheilchen, welche der mit Lichtgeschwindigkeit fortgepflanzten Welle entsprechen; setze ich in der zweiten Gleichung (2) ω_2, α_2, A_2 für ω, α und A, so sind damit die Grössen gegeben, die sich auf die mit Schallgeschwindigkeit fortgepflanzten Welle beziehen.

Die Summe der erhaltenen beiden Gleichungen aber gibt nach (4):

$$\frac{A_1}{m\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\mu A_2} = 0,$$

oder anders geschrieben:

---

1) Dies habe ich bereits in der früheren Arbeit über Hrn. Lommel's Theorie betont, vgl. Wied. Ann. 17. p. 473. 1882.

$$\frac{\mu A_1^2}{m \alpha_1^2} = \frac{m \alpha_2^2}{\mu A_2^2}.$$

Dies heisst: In demselben Medium ist das Verhältniss der lebendigen Kräfte von Materie und Aether bei der **Lichtbewegung** das **Reciproke** von dem bei der **Schallbewegung** stattfindenden. Ist also bei der Lichtbewegung die lebendige Kraft der Materie verschwindend klein gegenüber der des Aethers, so ist bei der Schallbewegung in demselben Medium die lebendige Kraft des Aethers unendlich klein gegenüber derjenigen der ponderabeln Materie. Damit diese Verhältnisse wirklich unendlich klein seien, ist nur über die gänzlich unbestimmt gebliebenen Grössen e', ε', m und μ geeignet zu verfügen.

Dieser Satz bildet eine nicht unwichtige Ergänzung der früher mitgetheilten Theorie des Lichtes für vollständig durchsichtige Medien.[1]) Ich hatte damals nicht Veranlassung, mehr als einen Theil seines Inhaltes zu benutzen.

Die Lommel'sche Schlussfolgerung erscheint hiernach hinfällig; es ist keine Veranlassung vorhanden, bei der Schall- und Lichtbewegung in demselben Medium verschiedene Umstände wirksam zu denken.

Auch wenn dies nicht stattfände, wäre hierdurch doch noch nicht die Ruhe der ponderabeln Molecüle bei der Lichtbewegung befriedigend erwiesen, man müsste dieselbe vielmehr noch physikalisch begründen. Dabei bietet sich aber die grosse Schwierigkeit, dass Hr. Lommel die Atome bewegt einführt; da sie es nun aber sind, welche das Molecül bilden, so kann man sich kaum Eigenschaften denken, welche den Atomen in dem Molecül die Bewegung gestatten, dem gemeinsamen Schwerpunkt aber Ruhe gebieten; am wenigsten ist hier die Grösse der Dichtigkeit der Materie gegenüber der des Aethers zu verwenden.

Ist somit der Lommel'sche Grundsatz der Ruhe der ponderabeln Molecüle bei der Lichtbewegung weder als nothwendig erwiesen, noch physikalisch begründet und darum schon als Grundlage einer Theorie wenig geeignet, so geräth das ganze Gebäude dadurch ins Wanken, dass es, wie sich

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 873. 1883.

bei einiger Aufmerksamkeit ergibt, gar nicht consequent auf diesem Grundsatz aufgeführt ist.

Wir lesen bei Hrn. Lommel am Anfang seiner Erwiderung:

„Die in einem Volumenelement enthaltene Körpermasse m und Aethermasse μ" (genauer $m\,dV$ und $\mu\,dV$) „werden durch die von einem leuchtenden Punkt kommende Lichtwelle auseinandergedrängt, nach entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinschaftlichen Gleichgewichtslage. Diese gemeinschaftliche Gleichgewichtslage ... (nicht zu verwechseln mit dem gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Massen ...) bleibt fest liegen."

Das ist ja aber der vollkommenste Gegensatz zu dem ausführlich „begründeten" Grundsatz von der Ruhe der Körpermolecüle!

Nimmt man hinzu die darauf folgenden Differentialgleichungen des Hrn. Lommel:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -f \cdots, \qquad \mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -f \cdots,$$

in welchen von intramolecularen Bewegungen gar nichts vorkommt, sondern UVW sich auf die Bewegung der ganzen ponderabeln Masse bezieht, so erhält man: auf p. 908 Bewegung von Aether und Materie nach verschiedenen Seiten, auf p. 909 Bewegung nach derselben Seite, auf p. 910 Ruhe der Materie und Bewegung des Aethers allein! —

Es erübrigt noch die Untersuchung der neuen Begründung der von mir früher beanstandeten intramolecularen Wirkungen, welche Hr. Lommel aus zwei Theilen zusammensetzt, die resp. den absoluten Verschiebungs- und Geschwindigkeitscomponenten proportional sind.

Hr. Lommel motivirt den ersten Theil (p. 910) durch die Bemerkung, dass aus dem Ruhen des Schwerpunktes des ganzen Molecüles auch das Ruhen der Gleichgewichtslage eines jeden Atomes folge. Dies ist selbstverständlich, wenn man unter Gleichgewichtslage den Ort versteht, an welchem sich im natürlichen (Ruhe-)Zustande das betreffende Atom befindet (vorausgesetzt, dass man rotatorische Bewegungen des Molecüles ausser Betracht lässt), es ist aber

eine völlig willkürliche Behauptung, wenn man, wie Hr. Lommel thut, darunter diejenige Stelle versteht, in Bezug auf welche genommen die relativen Coordinaten eines Atomes zu einer beliebigen Zeit die Grösse der auf dasselbe ausgeübten Kraftcomponenten geben. Der Schwerpunkt des Molecüles oder die Gleichgewichtslage des Atomes ist kein Kraftcentrum, sondern die bewegten Atome stellen dergleichen dar. Will man überhaupt die wirkenden Componenten als lineare Functionen der Verschiebungen der Atome darstellen, so müssen in denselben alle Verschiebungscomponenten für alle Atome desselben Molecüles vorkommen, und es ist nicht einmal erlaubt, zur Vereinfachung der Ausdrücke einen dreifach symmetrischen Bau der Molecüle anzunehmen, denn ein solcher ist z. B. bei dreiatomigen Molecülen nicht denkbar.

Dasselbe unzulässige Verfahren, einem geometrischen Ort die Eigenschaften eines Kraftcentrums beizulegen, bildet auch die Grundlage der Motivirung der zweiten Art intramolecularer Wirkungen: die dem Molecül als integrirender Bestandtheil zugehörige verdichtete Aetherhülle soll „nach dem obigen Grundsatz mit dem Molecül festliegen und sonach den bewegten Atomen einen ihrer absoluten Geschwindigkeit proportionalen Widerstand leisten.“ Die verdichtende Kraft geht aber doch nicht von dem ruhenden Schwerpunkt aus, sondern von den bewegten Atomen, und darum muss jene Aetherhülle, wenn sie wirklich ein von dem übrigen Aether abweichendes Verhalten zeigt, sich mit den Atomen bewegen und demnach, wenn überhaupt, eine Reibungskraft veranlassen, welche, soweit sie nicht in den früher eingeführten Wechselwirkungen zwischen dem äusseren Aether und den Atomen (mit ihrer Hülle) steckt, nur einzig von der relativen Geschwindigkeit der Atome desselben Molecüles abhängen kann.

Nebenbei sei nochmals darauf aufmerksam gemacht, dass der Grundsatz, auf welchem Hrn. Lommel's ganze Schlussfolgerung ruht, des Beweises völlig entbehrt, und ausserdem seine Differentialgleichungen mit seinen Worten in directem Widerspruch stehen, da sie die als intramoleculare bezeichneten Kräfte für die gesammte Masse, d. h. für den

Schwerpunkt der Molecüle einführen. Augenscheinlich müssten bei Berücksichtigung der intramolecularen Bewegungen die folgenden Gleichungen benutzt werden, von welchen die erste für den Aether eines Volumenelementes, die letzteren je für eine Atomgattung der zusammengesetzten Molecüle gilt:

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_1 + A_2 + \cdots + X,$$

$$\mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = - A_1 + \Sigma^h \Xi_{1h} + \Xi_1,$$

$$\mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = - A_2 + \Sigma^h \Xi_{2h} + \Xi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die A sind hierin die Wechselwirkungen zwischen Aether und den einzelnen Atomgattungen, die Ξ_{ih} die inneren Kräfte der Molecüle, welche demgemäss $\Sigma^i \Sigma^h \Xi_{ih} = 0$ geben müssen, die X und Ξ endlich die Wechselwirkungen mit den Nachbarmolecülen derselben Art. Dabei ist vorausgesetzt (was zur Behandlung unumgänglich), dass man die gleichartigen Atome verschiedener Molecüle innerhalb eines Volumenelementes gleichmässig nach derselben Richtung bewegt denken kann.

Nimmt man die Masse der Körperatome (also μ_h) gross gegen die der Aetheratome (also m) an, so reduciren sich diese Formeln auf die von mir der Theorie vollkommen durchsichtiger Medien zum Grunde gelegten.[1])

Das Resultat der vorstehenden Untersuchung ist also, dass die neuerdings von Hrn. Lommel zur Stütze seiner Lichttheorie entwickelte Grundvorstellung weder mechanisch haltbar, noch mit seinen eigenen Differentialgleichungen verträglich ist.

Anmerkung. Ich benutze die Gelegenheit, um ein in meinem Aufsatz „Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Medien"[2]) stehengebliebenes Versehen zu berichtigen, das vielleicht zu Missverständnissen Veranlassung geben könnte.

Auf p. 889 fehlt vor dem Formelsystem (15) die Bemer-

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 883. 1883.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 873. 1883.

kung, dass fortan in der Abkürzung $b_{hk} + e = (b_{hk})$ (da eine Verwechselung nicht vorkommen kann) die Klammer weggelassen werden soll. Wo weiterhin also b_{12} etc. vorkommt, hat es die Bedeutung von (b_{12}).

Zugleich corrigire ich noch zwei Schreibfehler. Die letzte Formel für $1/n^2$ auf p. 885 muss lauten:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{m}{e} \cdot \frac{(e + a) + \frac{n \lambda^2}{4 \pi^2}}{m + r + \frac{4 a' \pi^2}{\lambda^2}}.$$

Die Formeln für den Winkel der optischen Axen mit der Mittellinie auf p. 889 sind:

$$\cos^2 \varphi = \frac{(b_{12} - b_{13}) - \frac{1}{\tau^2}(b_{12}' - b_{13}')}{(b_{12} - b_{23}) - \frac{1}{\tau^2}(b_{12}' - b_{23}')}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{(b_{13} - b_{23}) - \frac{1}{\tau^2}(b_{13}' - b_{23}')}{(b_{12} - b_{23}) - \frac{1}{\tau^2}(b_{12}' - b_{23}')}.$$

Beides ergibt sich unmittelbar aus dem ihm Vorhergehenden.

Königsberg i. Pr., August 1883.

V. *Ueber die Umwandlung meines Photometers in ein Spectrophotometer; von H. Wild.*

(Aus Bulletin de l'Acad. Imp. des sc. de St. Petersbourg. T. 28. 1883. mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

(Hierzu Taf. II Fig. 50 u. 51.)

In der Beschreibung meines neuen Krystall-Polarisationsphotometers[1]) habe ich unter I, § 3 (p. 217) darauf hingewiesen, dass dieses Photometer im Gegensatz zu den gewöhnlichen Instrumenten der Art auch eine Vergleichung etwas verschieden gefärbter Lichtquellen, wie z. B. des electrischen Lichtes mit einer Gas- oder Petroleumlampe in einer für technische Zwecke meist ausreichenden Weise gestatte. Es heisst nämlich dort: „In der Technik kommt es in der Regel blos darauf an, diejenigen Strahlen der

1) H. Wild, Pogg. Ann. 118. p. 193. 1863.

beiden wenig verschieden gefärbten Lichtquellen, welche für das Auge die hellsten sind, nämlich die gelben und die grüngelben Strahlen des Spectrums mit einander zu vergleichen. Während nun bei den gewöhnlichen Photometern der unmittelbare Vergleich verschieden gefärbter Lichtstrahlen fast unmöglich ist, indem das Auge bei verschiedener Farbennuance nur sehr unsicher die Gleichheit der hellsten Strahlen beurtheilt, macht das bei unserem Photometer und überhaupt bei allen Polarisationsphotometern (wo Interferenzfarben benutzt werden) keine grosse Schwierigkeit. Allerdings verschwinden in diesem Falle die Interferenzfarben im Polariskop bei keiner Stellung des Kalkspathpolarisators ganz, indem, wenn für eine gewisse Farbe die Bedingung der Neutralisation erfüllt ist, sie für die anderen nicht auch zugleich erfüllt sein wird; man findet indessen beim Drehen des Polarisators stets, dass die übrig bleibenden Interferenzfarben bei einer gewissen Stellung des letzteren ein Minimum der Intensität erreichen. Alsdann neutralisiren sich aber offenbar die hellsten Theile der Spectren beider Lichtquellen; indem wir also diese Minimumstellung beobachten, werden wir daraus das Intensitätsverhältniss der für das Auge hellsten Strahlen beider Lichtquellen berechnen können, worauf es eben ankommt."

Da die hellsten Strahlen in den Spectren der gewöhnlichen weissen Lichtquellen diejenigen an der Grenze von gelb und grün sind, so kommt dieses Verfahren praktisch überein mit dem von Crova angegebenen, wonach man beim Vergleich verschieden gefärbter Lichtquellen, z. B. der Sonne und einer Carcellampe vermittelst der gewöhnlichen Photometer für das Auge eine gleiche Färbung erzielt durch Vorsetzen entweder einer 9 mm dicken, senkrecht zur Axe geschnittenen Quarzplatte, die zwischen zwei gekreuzte Nicol'sche Prismen eingeschaltet ist[1]) oder einer ungefähr gleich dicken Schicht Flüssigkeit, welche durch passende Mischung einer Eisenchloridlösung mit einer Lösung von Nickelchlorür hergestellt ist und blos orange, gelb- und grüngefärbte

1) Crova, Bulletin hebdomadaire de l'Assoc. scientifique de France du 23 Octobre 1881, p. 56.

Strahlen mit einem Maximum in der Nähe der Linie *D* (0,582 μ) durchlässt.[1])

Nach der oben erwähnten Methode habe ich z. B. seiner Zeit mit meinem Photometer ohne Schwierigkeit folgende Lichtquellen mit einander verglichen, wobei vor den Prismenapparat desselben eine durch ein Uhrwerk in rasche Rotation versetzte, durchscheinende (geölte) Papierscheibe so gestellt wurde, dass das Licht von der einen Hälfte derselben durch die eine, und das von der anderen Hälfte durch die zweite Oeffnung ins Photometer gelangte. Durch passend aufgestellte undurchsichtige Schirme wurde bewirkt, dass das Licht von der einen Lichtquelle nur auf die eine, und das von der anderen nur auf die zweite Hälfte der Papierscheibe auffallen konnte. Bei starkem Intensitätsunterschiede nahm ich zur Ausgleichung der Beleuchtung auch noch die verschiedene Entfernung der Lichtquellen von der Papierscheibe zu Hülfe.

Es werde bezeichnet die Beleuchtungsintensität bei gleicher Entfernung:

einer Stearinkerze (5 auf 1 Pfund) . . . durch J_1,
einer Petroleumlampe mit Banddocht . . „ J_2,
einer Petroleumlampe mit Runddocht . . „ J_3,
derselben mit eingeleitetem Sauerstoff . . „ J_4,
einer electrischen Lampe von Duboscq mit Strom von 40 Bunsen'schen Elementen „ J_5,

so ergaben die unmittelbaren Beobachtungen zunächst:

$J_2 = J_1 \,.\, 5{,}13$, also auch:
$J_3 = J_2 \,.\, 2{,}33$, $J_3 = J_1 \,.\, 11{,}9$;
$J_4 = J_2 \,.\, 4{,}92$, $J_4 = J_1 \,.\, 25{,}2$;
$J_5 = J_3 \,.\, 26{,}4$, $J_5 = J_1 \,.\, 316$.

Die ersten drei Lichtquellen konnte ich auch noch mittelst eines Bunsen'schen Photometers vergleichen, dagegen war mir dies mit Sicherheit bei den beiden anderen des allzu grossen Farbenunterschiedes halber nicht mehr möglich. Mit diesem Photometer fand ich:

---

1) Crova, Compt. rend. **95.** p. 1271. 1882.

$$J_2 = J_1 \,.\; 6{,}12, \qquad \text{also:}$$
$$J_3 = J_2 \,.\; 1{,}83, \qquad J_3 = J_1 \,.\, 11{,}2;$$
$$J_3 = J_1 \,.\, 12{,}3;$$

wo die Differenz der beiden Werthe für das Verhältniss von $J_3 : J_1$ zugleich ein Maassstab für die Genauigkeit der letzteren Messungen ist, während die mit meinem Photometer erhaltenen Daten bis auf 1 % als ganz sicher zu bezeichnen sind.

Die streng wissenschaftliche Methode freilich zur Vergleichung verschieden gefärbter Lichtquellen, bei der allein auch die volle Leistungsfähigkeit unseres Instrumentes (0,1 %) ausgenützt werden kann, besteht, wie ich ebenfalls schon in jener Abhandlung (p. 216) bemerkt habe, darin, dass man nach dem Vorschlage von Govi[1]) von den beiden Lichtquellen vermittelst ein und desselben Prismas zwei aneinander grenzende Spectren derselben erzeugt und dann die Helligkeit der entsprechenden gleich gefärbten Theile derselben vergleicht. Ich schlug damals (l. c.) vor — und habe auch seither bezügliche Messungen in der Art angestellt —, zu dem Ende zwischen den Prismenapparat und das drehbare Nicol ein Prisma mit Linse und Spalte gegen den ersteren hin einzuschalten und die Sehaxe in geeigneter Weise beim Prisma zu brechen. Diese Art des Gebrauches meines Instrumentes als analysirendes Photometer ist indessen sehr unbequem, da sie eine Zerlegung desselben mit besonderer Aufstellung einzelner Theile erheischt.

Seither sind von verschiedenen Forschern eigentliche Spectrophotometer construirt worden, von welchen dasjenige von Glan[2]) und insbesondere das von Trannin[3]) nahe auf denselben Principien wie mein Photometer basirt sind. Doch scheint mir unter den bekannt gewordenen Instrumenten dieser Art keines die Grenze der möglichen Leistungsfähigkeit für den Fall zu erreichen, wo wir es mit dem Vergleich von Lichtquellen mit continuirlichen Spectren zu thun haben. Angeregt durch die bezüglichen Verhandlungen im Schosse

---

1) Govi, Compt. rend. 50. p. 156. 1860.
2) Glan, Wied. Ann. 1. p. 351. 1877.
3) Trannin, Journ. de Phys. 5. p. 297. 1876.

der dritten Commission (Bestimmung einer Lichteinheit) der internationalen electrischen Conferenz, die im October 1882 zu Paris tagte, habe ich daher gesucht, in einfacherer Weise, als oben angegeben, mein Photometer auch in ein analysirendes zu verwandeln und damit ein Spectrophotometer von grösserer Leistungsfähigkeit herzustellen. Inwiefern mir dies gelungen ist, wird die nachfolgende Beschreibung zeigen.

Die verhältnissmässig einfache Umwandlung meines Photometers in ein Spectrometer habe ich an einer modificirten Form des ersteren vorgenommen, welche ich im Jahre 1876 von den Herren Hermann und Pfister, Mechaniker in Bern, ausführen liess. Es dürfte nicht blos wegen des leichteren Ueberganges zum letzteren, sondern auch deshalb am Platze sein, hier zuerst jene noch nicht publicirte Form des Photometers zu beschreiben, weil dasselbe in dieser Gestalt bereits Eingang in verschiedene physikalische Institute gewonnen hat. An der Hand der beistehenden zwei Figuren erinnere ich kurz an das dem Instrument zu Grunde liegende Princip.

Fig. 1 zeigt die Anordnung des Instrumentes als Photometer. Es sei ABC eine Fläche, welche auf der einen Hälfte AB von der einen Lichtquelle der Intensität J^2 und auf der anderen BC von der zweiten Lichtquelle der Intensität J_1^2 beleuchtet werde. Zwei Strahlenbündel von der einen und anderen Hälfte der erleuchteten Fläche aus der Nähe der Trennungslinie B gehen zunächst durch einen Polarisator PP und fallen dann senkrecht auf die vordere natürliche Begrenzungsfläche RR des Kalkspathrhomboëders RRR^1R^1. Beim Austritt aus diesem Rhomboëder werden im Raume $\alpha\beta$ die gewöhnlich gebrochenen, parallel zum Hauptschnitt des letzteren polarisirten Strahlen von AB, resp. J^2 her mit den ungewöhnlich gebrochenen, senkrecht zum Hauptschnitt des Rhomboëders polarisirten von BC, resp. J_1^2 her zusammenfallen. Das vereinigte Strahlenbündel durchsetzt schliesslich, ehe es zum Auge des Beobachters gelangt, das aus der farbengebenden Krystallplatte KK und dem Polarisator NN bestehende Polariskop. Die Interferenz-

farben im letzteren verschwinden, wenn das vereinigte Strahlenbündel $\alpha\beta$ gleiche Quantitäten senkrecht zu einander polarisirten Lichtes enthält; dies ist aber der Fall, wenn man hat:

$$\frac{J^2}{J_1^2} = C.\,\mathrm{tg}^2 v, \tag{1}$$

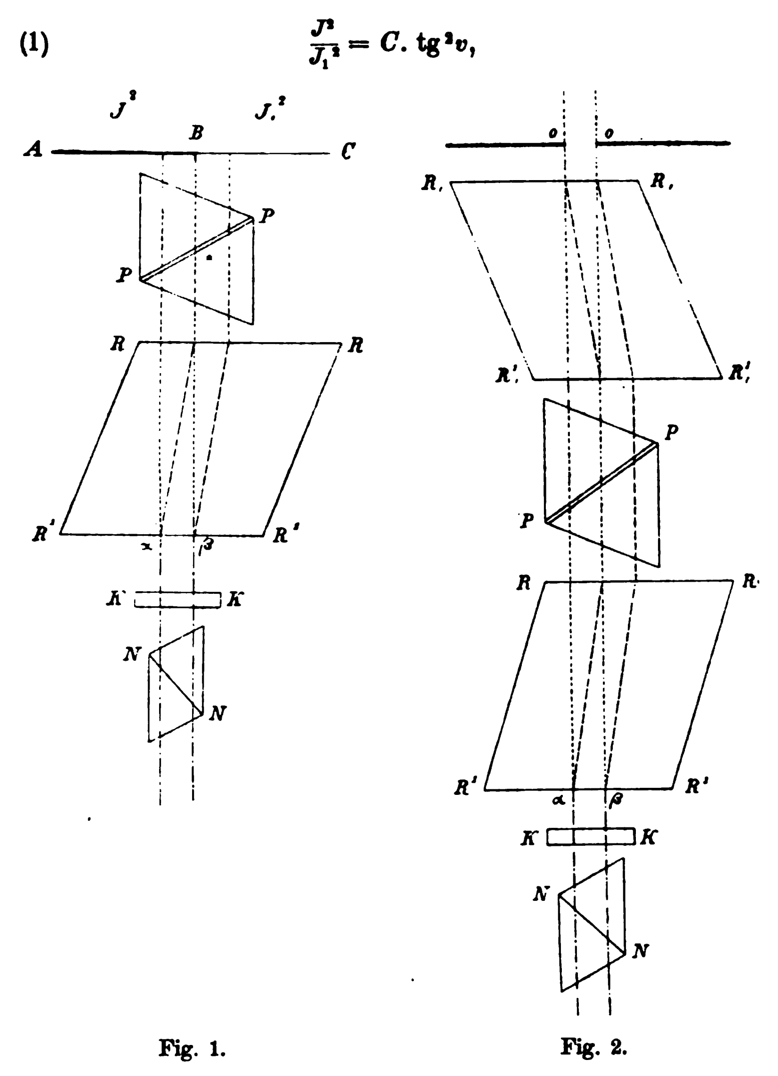


Fig. 1. Fig. 2.

wo v den Winkel darstellt, welchen die Polarisationsebene PP mit dem Hauptschnitt des Kalkspathrhomboëders ein-

schliesst und C nach der Neumann'schen Theorie[1]) gegeben ist durch:

$$C = \frac{(1 + a^2)\sqrt{c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu}}{a(1 + c^2 \sin^2 \nu + a^2 \cos^2 \nu)}, \tag{2}$$

wo a das reciproke Brechungsverhältniss des gewöhnlich und c dasjenige des ungewöhnlich gebrochenen Strahles im Kalkspath, endlich ν den Winkel der Normalen der Rhomboëderfläche RR mit der Hauptaxe oder optischen Axe des Krystalles darstellen. Sind diese letzteren Grössen und damit C gegeben, so ist also das Intensitätsverhältniss der beiden Lichtquellen aus dem zu beobachtenden Winkel v nach Formel (1) zu berechnen. Der Winkel $2v$ aber wird erhalten, wenn man den Polarisator PP um seine Axe einmal nach der einen und dann nach der anderen Seite dreht, bis jeweilen die Farben im Polariskop verschwinden, und dabei die Kreistheilung auf einer zu dieser Axe senkrechten Scheibe abliest.

Soll das Instrument zur allgemeinen Lösung einer photometrischen Aufgabe noch als Polarimeter verwendet werden, so hat man nach Fig. 2 vor dem Polarisator PP noch ein zweites Kalkspathrhomboëder $R_1 R_1 R_1{}^1 R_1{}^1$ so anzubringen, dass seine parallelen Begrenzungsflächen ebenfalls senkrecht zu den einfallenden Strahlen, resp. zur Sehaxe des Polariskopes sind, und sein Hauptschnitt mit demjenigen des ersteren einen Winkel von 180° einschliesst. Das zu untersuchende Lichtbündel muss hier durch einen Schirm mit Oeffnung von solcher Breite 00 begrenzt werden, dass, wie die Figur es zeigt, die Rhomboëder durch Doppelbrechung eben zwei aneinander grenzende Bilder derselben erzeugen. Richtet man nun den Versuch so ein, dass die Polarisationsebene

1) F. E. Neumann, Math. Abh. der Acad. der Wiss. zu Berlin. 1835. — Die Richtigkeit dieser Theorie im vorliegenden speciellen Falle habe ich mit diesem Instrumente selbst (siehe 2. Theil meiner eingangs erwähnten Abhandlung) seiner Zeit nachgewiesen. Vor kurzem hat Hr. Krech (siehe wissenschaftliche Beilage zum Programm des Luisenstädt'schen Gymnasiums in Berlin. Ostern 1883) für nahezu denselben speciellen Fall einen neuen experimentellen Beweis der Richtigkeit, und zwar mit ungefähr derselben Genauigkeit von ± 0,002 des Intensitätsverhältnisses beigebracht.

des durch die Oeffnung 00 einfallenden, theilweise polarisirten Lichtes mit dem Hauptschnitt der Rhomboëder zusammenfällt, und dreht dann wieder den Polarisator *PP* bis zum Verschwinden der Interferenzfarben im Polariskop, so berechnet sich das gesuchte Verhältniss der Intensität P^2 des polarisirten Lichtes zur Intensität J^2 des natürlichen Antheiles im partiell polarisirten Licht nach der Formel:

$$\frac{P^2}{J^2} = \tfrac{1}{2}(C^2 . \operatorname{tg}^4 v_1 - 1), \tag{3}$$

wo v_1 entsprechend, wie oben v, den beobachteten Winkel zwischen der Polarisationsebene des Polarisators und dem Hauptschnitt der Rhomboëder darstellt, und C wieder durch Gleichung (2) gegeben ist, a, c und ν bei beiden Rhomboëdern als gleich vorausgesetzt.

Beim neuen, in Tafel III Fig. 50 und 51 perspectivisch dargestellten Instrumente werden sämmtliche Theile des Apparates von vier Säulen 1, 2, 3 und 4 getragen, welche auf einem *T*-förmigen Lineal *TT* aufgeschraubt sind. Dieses Lineal ist vermittelst eines Charniers *B* und einer Verticalaxe *B'* auf der Säule *A* mit Dreifuss befestigt, also im Horizont und in einer Verticalebene drehbar.

Von den vier Säulen trägt 1 das Polariskop *N*, welches jetzt wie beim einem Polaristrobometer[1]) aus einem ungefähr fünfmal vergrössernden, auf die Unendlichkeit eingestellten Fernrohr mit einer Doppelplatte aus Kalkspath (statt Bergkrystall) vor dem Objectiv, einem andreaskreuzförmigen, justirbaren Fadenkreuz im Focus des letzteren und einem Nicol vor dem Ocular gegen das Auge zu besteht. Die Säule 2 dient dem Theilkreis *K*, in dessen Axe nach hinten zu der Polarisator *P* (Senarmont'sches Prisma oder Polarisator nach Hoffmann, beide mit geraden Endflächen) ebenfalls durch seitliche Schrauben justirbar befestigt ist, als Lager. Vermittelst des Knopfes *r* in der Nähe des Beobachters und eines am anderen Ende dieser Stange sitzenden Getriebes, das in ein Zahnrad am Kreise eingreift, kann der letztere

---

1) H. Wild, Bull. de l'acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg **14.** p. 149. 1869.

sammt Polarisator bequem um seine Axe gedreht werden. Die Kreistheilung aber ist am Nonius vermittelst des Fernrohres *S* auf der anderen Seite des Polariskopes vom Beobachter abzulesen, ohne dass er sich von seinem Platze zu erheben braucht.

Innere, etwas weniger als halbkreisförmige Ansätze an den Säulen 1 und 2 sind als Lager für das in doppelter Metallfassung steckende Kalkspathrhomboëder *R* bestimmt. In der inneren Röhre ist das Rhomboëder mit Korken und einem Wachsguss unveränderlich so befestigt, dass seine beiden polirten Endflächen nahe senkrecht zur Röhrenaxe sind, und mit dieser Röhre ist dann das Rhomboëder in der äusseren Fassung durch seitliche, in der Zeichnung sichtbare Schrauben justirbar eingesetzt. Zwei Deckel mit passender centraler Oeffnung, von welcher der eine fest, der andere drehbar und durch zwei vorragende Schrauben klemmbar angebracht ist, dienen als Schutz für die Kalkspathflächen und halten seitliches Licht davon ab. Um das Rhomboëdergehäuse ist endlich noch eine Art Zaum *zz* gelegt, vermittelst dessen und der Schraube *s* dasselbe auf seinem Lager festgehalten wird.

In ganz gleicher Weise ist das zweite Rhomboëder R_1 gefasst und auf Lagern an der Innenseite der Ständer 3 und 4 befestigt. Beim Gebrauche des Instrumentes als Photometer wird statt desselben eine leere, entsprechend geformte Trommel eingelegt.

Der Ständer 4 endlich trägt ausserdem noch eine Messingröhre *M*, in welche die Röhre *E* (siehe die Nebenfigur) des Prismenapparates *JJ* einzuschieben und durch *m* festzuklemmen ist. Die innere Einrichtung des letzteren ist aus der Nebenfigur leicht ersichtlich. Eine Abschlussplatte der Röhre *E* besitzt eine runde centrale Oeffnung, welche besonders für den Gebrauch des Instrumentes als Polarimeter durch zwei Schieber σ und σ_1 beliebig begrenzt werden kann. Darauf folgen in dem würfelförmigen Kasten *G* zwei auf einem Stuhl befestigte rechtwinkliche Glasprismen, die mit ihren einen Kanten gegenüber der Axe der Röhre *E* zusammenstossen. In die seitlichen Röhrenansätze dieses Kastens

sind diejenigen von zwei anderen dreieckigen Kasten *FF* eingeschoben, die ebenfalls rechtwinklige, durch Schrauben justirbare Glasprismen enthalten. Die Oeffnungen α, β und γ (wo β nach eventueller Entfernung des einen oder anderen Prismas im Stuhl benutzt wird) sind durch Deckel verschliessbar.

Diese von der früheren abweichende Construction des Photometers gestattet eine viel leichtere Zerlegung und Justirbarkeit der einzelnen Theile desselben und ebenso eine bequeme Umwandlung in das Polarimeter sowie in ein Spectrophotometer. Die Hauptfigur auf der beiliegenden Tafel weist bereits die zum Gebrauch des Instrumentes als Spectrophotometer nothwendigen Zuthaten auf. Wie man sieht, ist das Polariskop *N* mit seinem Ansatz *n* nicht direct in die am Ständer 1 befestigte Röhre *O* bis zum Anschlag n_1 eingeschoben, sondern zunächst in ein Zwischenstück *D*, welches seinerseits wieder in *O* eingeschoben ist. Dieses Zwischenstück *D* besteht aus zwei durch ein Charnier bei *e* verbundenen Theilen, von welchen der fixe, im Rohr *O* steckende ein fünffaches Amici'sches Prisma von Steinheil in München (brechende Kante der Prismen horizontal) enthält, während der um eine horizontale Axe dagegen vermittelst der Mikrometerschraube ϱ verstellbare zweite Theil zur Aufnahme des Polariskopes dient, sodass eben dieses auf die verschiedenen Theile des aus jenem Prisma (à vision directe) austretenden Spectrums central eingestellt werden kann. Um hierbei ein hinlänglich reines Spectrum zu erhalten, ist zunächst noch hinter den Schiebern $\sigma\sigma_1$ des Prismenkastens ein zweiter, leicht zu entfernender Schieber mit horizontaler Spectralspalte eingesetzt, dessen Spaltweite durch die Schraube τ regulirt, resp. mikrometrisch gemessen werden kann, und sodann ist beim Ständer 3 eine achromatische Linse von 110 mm Brennweite (Abstand von der Spectralspalte) in seine centrale Oeffnung eingeschraubt.[1])

---

1) Zur Rückverwandlung in das gewöhnliche Photometer ist also einfach die Linse bei 3 abzuschrauben, das Stück mit der Spectralspalte zu entfernen und durch einen Schieber mit runder centraler Oeffnung zu ersetzen, sowie endlich das Stück *D* beim Polariskop wegzunehmen und

Denken wir uns für einen Moment das Kalkspathrhomboëder *R* entfernt, so wird man im Polariskopfernrohr zwei nebeneinander liegende, in einer Verticalen sich berührende Spectren der beiden Lichtquellen erblicken, da die eine Hälfte der Spectralspalte von der einen und die andere von der anderen Lichtquelle beleuchtet wird. Auf diesen Spectren werden sich die Interferensfransen der Savart'schen Doppelplatte als horizontale schwarze Querlinien projiciren und bei Einsetzung des Rhomboëders jeweilig im centralen Theile des Gesichtsfeldes (resp. dem Raum $\alpha\,\beta$, wo jetzt die gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochenen Strahlen der beiderlei Lichtquellen zusammenkommen) verschwinden, wenn für die betreffende Farbe durch Drehung des Polarisators die Intensitätsgleichheit dieser senkrecht zu einander polarisirten Strahlen erzielt ist. Dabei kann auch die Farbe, für welche die Vergleichung jeweilig stattgefunden hat, genau definirt werden, indem man blos die Stellungen des Mikrometers ϱ unter Hinrichten des Instrumentes nach der Sonne ein für allemal ermittelt, welche dem Einstehen der optischen Axe des Polariskopfernrohres auf die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien entsprechen.

Das Intensitätsverhältniss der beiden Lichtquellen für die fragliche Farbe ist dann aus dem beobachteten Winkel v ebenfalls nach der Formel (1) zu berechnen, wobei nur im Ausdruck (2) für die Constante C jeweilig für a und c die der betreffenden Farbe entsprechenden reciproken Brechungsverhältnisse einzuführen sind.

Bei der natürlichen Bruchfläche des Kalkspathes, wie wir sie hier benutzen, ist aber:

$$\nu = 44^0\,34'\,38'',$$

und nach Rudberg's Bestimmungen am Kalkspath[1]) ergeben

---

letzteres direct in die Röhre *O* einzuschieben. — Man ersieht hieraus, dass zu jedem fertigen Photometer die zu seinem Gebrauch als Spectrophotometer nöthigen Theile leicht besonders angefertigt und eingesetzt werden können. Hr. Mechanikus Pfister in Bern (Nachfolger von Hermann und Pfister daselbst) hat mir zu meinem Instrument die fraglichen Theile zum Preise von 120 Fr. nachgeliefert.

1) Rudberg, Pogg. Ann. **14.** p. 45. 1828.

sich folgende Werthe von a, c und somit auch von C für die Fraunhofer'schen Linien:

Linie	a	c	C
B	0,60493	0,67389	1,0251
D	0,60295	0,67279	1,0256
E	0,60111	0,67174	1,0261
F	0,59951	0,67080	1,0266
G	0,59660	0,66911	1,0274

Man sieht schon aus der geringen Variation der Werthe von C für den grössten Theil des Spectrums, dass es sich nicht lohnt, die Constante C mit den seit meiner ersten Berechnung neu und wohl auch sicherer bestimmten Werthen der Brechungsindices der ordinären und extraordinären Strahlen durch Mascart[1]) und durch van der Willigen[2]) nochmals zu berechnen. Die Differenzen von Rudberg's Bestimmungen und denen der letzteren Forscher erreichen im Maximum eine Einheit in der 4. Decimale.

Es gibt noch eine zweite Benutzungsweise unseres so abgeänderten Apparates zu spectrophotometrischen Messungen, welche bei schwachen oder discontinuirlichen, resp. durch Absorption stark modificirten Spectren mit Vortheil angewendet werden kann. Man ersetzt in diesem Falle den Schieber links (σ_1) beim Prismenapparat durch einen solchen, der in der Entfernung $\alpha\beta$, resp. 00 (Fig. 1 u. 2 p. 457 oben) von seinem Rande einen gleich breiten Längsschlitz besitzt, und schiebt ihn mit seinem Rande bis B (Fig. 1) nämlich bis zur Axe des Apparates vor. Alsdann werden wir beim Austritt aus dem Rhomboëder von J^2 und $J_1{}^2$ her nicht mehr zwei über einander fallende gewöhnlich und ungewöhnlich gebrochene, sondern zwei einander in β berührende getrennte Strahlenbündel dieser Art erhalten, deren Intensitätsverhältniss ganz in der bisherigen Weise durch Drehen des Polarisators verändert werden kann. Ersetzt man dann auch das

1) Mascart, Ann. scient. de l'école norm. supér. à Paris. 1. p. 237. 1864.

2) Van der Willigen, Archiv. du Musée Teyler. 2. p. 181. 1869. et 3. p. 53. 1870.

Polariskopfernrohr durch ein gewöhnliches ohne Savart'sche Platte und ohne Nicol (oder entfernt diese respective), so sieht man zwei einander tangirende, den Lichtquellen J^2 und J_1^2 angehörige Spectren. Hat man wieder an irgend einer Stelle, jetzt nach blosser Schätzung mit dem Auge, die Intensitätsgleichheit der benachbarten Theile durch Drehen des Polarisators *PP* erzielt, so ist das gesuchte Intensitätsverhältniss nach derselben Formel (1) aus dem gemessenen Winkel v abzuleiten.

Für diesen letzteren Gebrauch des Instrumentes, sowie denjenigen als Polarimeter, ist ferner noch auf einen Umstand besonders aufmerksam zu machen. Die Figur 1 p. 457 oben zeigt, dass beim Gebrauch als Photometer das Polariskopfernrohr nicht centrisch, sondern um die halbe Breite $\alpha\beta$ excentrisch nach *A* hin anzubringen ist, wenn die Trennungslinie *B* nämlich die Berührungskante der beiden Prismen in *G*, wie angenommen, centrisch zur Axe des ganzen Apparates eingerichtet ist. Für das Polarimeter behält das Polariskop dieselbe Lage bei, wenn, wie dies in Fig. 2 vorausgesetzt ist, das Licht von J^2 her auf seinen Polarisationszustand zu untersuchen ist, dagegen muss es um die volle Breite $\alpha\beta$ zugleich mit der Schirmöffnung 00 — durch Versetzen der beiden Schieber σ und σ_1 — nach *C* hin verschoben werden, wenn im Licht von J_1^2 her der polarisirte Antheil gemessen werden soll. Bei der oben erwähnten zweiten Modification der Benutzung als Spectrophotometer endlich muss das Polariskopfernrohr offenbar centrisch placirt werden. Aus dem allen folgt, dass die zur Aufnahme des Polariskopes bestimmte Röhre *O* nicht fest, sondern horizontal verschiebbar am Ständer 1 anzubringen ist.

Die Fig. 50 lässt nun in der That erkennen, dass zu dem Ende die Röhre *O* bei *H* an einer Messingplatte mit abgeschrägten Rändern befestigt ist, welche auf dem Ständer 1 zwischen aufgeschraubten Lamellen verschiebbar, ist und deren Lage dabei durch zwei seitliche Schrauben in vorspringenden Nasen fixirt wird. Eine Millimetertheilung auf der oberen Lamelle und ein Index an der Platte lassen jeweilen die Grösse der Verschiebung bestimmen. Solche

Theilungen befinden sich auch zur leichteren Einstellung bei den Schiebern σ und σ_1 des Prismenapparates.

In Betreff der Justirung der verschiedenen Theile des Instrumentes auf ihre richtige, durch die Theorie geforderte Stellung, welche ebenfalls durch die jetzige Construction wesentlich erleichtert und vervollkommnet wird, ist kurz Folgendes zu bemerken.

Man entfernt aus dem Polariskop die Savart'sche Doppelplatte und ersetzt das Ocular mit Nicol'schem Prisma durch ein anderes, in der Nebenfigur mit *W* bezeichnetes, welches eine seitliche Oeffnung und dieser gegenüber im Inneren statt des Nicols ein unter 45° zur Axe geneigtes dünnes Glasplättchen besitzt. Nachdem man sodann auch die Kalkspathrhomboëder und den Polarisator entfernt hat, visirt man mit dem direct in die Röhre *O* eingeschobenen Fernrohre, die man mit dem Schieber centrisch gestellt hat, nach der centralen Lichtlinie am Prismenapparat, die man durch Zusammenschieben von σ und σ_1 bis fast zur Berührung hergestellt hat. Das Ocular soll sich soweit ausziehen lassen, dass man ein hinlänglich scharfes Bild der Spalte erhält, um zu erkennen, ob sie die Mitte des Gesichtsfeldes wie das Fadenkreuz einnimmt. Justirungen am Fadenkreuz, resp. am Ständer 1 lassen so den Parallelismus der optischen Axe des Fernrohres mit der Längsaxe des ganzen Instrumentes genügend genau erzielen. Schraubt man hierauf die Linse am Ständer 3 ein, und zeigt sie bei jeder Stellung jene Spalte in Uebereinstimmung mit dem Fadenkreuz des wieder auf die Unendlichkeit eingestellten Fernrohres, so ist man dieses Parallelismus noch besser für die Folge versichert und hat zugleich die richtige Stellung der Linse erkannt.

Nunmehr setzt man den Polarisator *P* ein und justirt ihn in seiner Fassung so, dass das von seiner Vorderfläche reflectirte Bild des beleuchteten Fadenkreuzes im Fernrohre — man stellt zu dem Ende vor der seitlichen Oeffnung des Oculares eine Kerzenflamme auf und bringt hinter dem Polarisator ein schwarzes Papier an — sich mit dem direct gesehenen Fadenkreuz deckt. Geschieht das auch bei einer Umdrehung des Polarisators zusammen mit seinem Kreise,

so ist auch diese Axe, wie verlangt, parallel der optischen Axe des Fernrohres; wenn nicht, muss der Ständer 2 corrigirt werden. Beim Hindurchsehen durch den Polarisator nach der centralen Lichtspalte soll jetzt auch, wenn dieser gut ist, keine erhebliche Verschiebung der letzteren durch Drehung des Polarisators um seine Axe erfolgen.

In gleicher Weise werden darauf auch die beiden Rhomboëder nach Auflegen auf ihre Träger in ihren Büchsen so justirt, dass ihre Endflächen auf der optischen Axe des Fernrohres, resp. der Sehaxe senkrecht stehen.

Das Rhomboëder *R* wird nun eingelegt, nachdem man die Linse bei 3 entfernt, die Schrauben seines vorderen Deckels etwas gelöst und auch den Zaum gelockert hat, und um seine Längsaxe solange gedreht, bis es von der etwas erweiterten Spalte zwei möglichst genau in der Senkrechten zu ihr resp. horizontal nebeneinander liegende Bilder gibt.[1]) Alsdann klemmt man Deckel und Zaum und kann so später das Rhomboëder immer wieder genau genug in dieselbe Lage beim Einlegen bringen, indem die eine der Deckelschrauben genau in eine Oeffnung der betreffenden Unterlage passt.

Bei geeigneter Stellung des Polarisators wird das Rhomboëder im Fernrohr zwei gleich helle neben einander liegende Bilder des verticalen Spaltes erzeugen, und man kann also dem Fernrohre die richtige Stellung für die Benutzung des Apparates als Photometer geben, wenn man es seitlich mit dem Schlitten *H* solange verschiebt, bis das Fadenkreuz auf die Mitte zwischen den beiden Bildern einsteht. Selbstverständlich muss man hierbei das Ocular wieder ausgezogen haben.

Man ersetzt hierauf das Spiegelocular durch dasjenige mit dem Nicol'schen Prisma und schiebt auch vor dem Objectiv die Savart'sche Doppelplatte mit ihrer Fassung so ein, dass die Marken an dieser und am Rohre coincidiren. Der Verfertiger soll nämlich bereits das Polariskop so justirt haben, dass in diesem Falle die Polarisationsebene des Nicols,

---

1) Wenn man zugleich die horizontale Spectralspalte einschiebt, so lässt sich diese Justirung noch vollkommener erzielen. Dabei wird dann auch gleich die richtige Lage des Prismenapparates ein für alle mal durch Anbringung einer Marke zu fixiren sein.

welches durch einen seitlichen, in einem Schlitz sich bewegenden Stift in seiner Lage ebenfalls fixirt ist, unter 45° zum Hauptschnitte des Kalkspathes jener Doppelplatte geneigt ist.

Es soll weiterhin dieser Hauptschnitt auch unter 45° zum Hauptschnitte des Kalkspathrhomboëders R orientirt werden. Man öffnet zu dem Ende die Schieber σ und σ_1 vorn, sodass das ganze Gesichtsfeld hell wird, oder nimmt noch besser den ganzen Prismenapparat ab und stellt den Polarisator so, dass sich lebhaft gefärbte Fransen zeigen. Durch Drehen des Polariskopfernrohres um seine Axe können diese zum Verschwinden gebracht werden; dies ist der Fall, wenn die fraglichen beiden Hauptschnitte parallel sind. Eine Theilung an dem Ansatz n_1 in 45° und ein über n bei dieser Stellung herüber zu ziehender Strich erlaubt, das Polariskop genau genug um 45° zurück zu drehen und ihm damit die gewünschte Stellung zu geben, auf welche man es dann auch zu jeder Zeit mittelst der Marke wieder einstellen kann.

Die Justirung endlich des zweiten Rhomboëders für den Gebrauch des Instrumentes als Polarimeter kann am genauesten in folgender Weise erfolgen. Nach Entfernung des Prismenapparates richtet man ohne zweites Rhomboëder das Instrument nach einer gleichförmig beleuchteten Fläche, die natürliches Licht ausstrahlt, und stellt den Polarisator auf das Verschwinden der Farbfransen ein. Legt man jetzt das zweite Rhomboëder mit losem Deckel auf sein Lager, setzt den Prismenapparat vor und verengt die Lichteinlassungsöffnung 00 in der Fig. 2 entsprechenden Weise, so werden im Gesichtsfeld keine Farbfransen auftreten, wenn die Hauptschnitte beider Rhomboëder 180° miteinander einschliessen. Man hat also eventuell das zweite Rhomboëder um seine Axe nur solange zu drehen, bis die wieder erschienenen Farbfransen ausgelöscht sind, und alsdann den Deckel durch Anziehen der Schrauben zu fixiren, um auch für diesen Theil die normale Lage ein für alle mal bestimmt zu haben. Damit diese Justirung die Lage des Rhomboëders in anderer Beziehung nicht wesentlich verändere, hat man dasselbe schon gleich zu Anfang bei Justirung der Stellung seiner End-

flächen entsprechend wie das erste Rhomboëder nach den Bildern der Spectralspalte angenähert in die richtige Lage gebracht.

Es bedarf schliesslich kaum noch der Erwähnung, dass die bei Aufstellung der Gleichung (1) gemachte Voraussetzung einer gleich starken Absorption, resp. Reflexion des Lichtes der beiderlei Lichtquellen beim Durchgang durch den Prismenapparat und durch eine durchscheinende Platte vor ihm, resp. beim Reflex von einer weissen Fläche an ihrer Stelle, in Wirklichkeit nur annäherungsweise als erfüllt zu betrachten ist, dass man sich aber bei genauen Untersuchungen einfach durch Vertauschen der beiden Lichtquellen im Resultat davon unabhängig machen kann. Wo dies nicht angeht, kann man die Constante C, welche in diesem Falle auch noch diese unbekannte Relation einschliesst, wenigstens für die Dauer der augenblicklichen Versuche genau genug durch Hinrichten des Apparates nach einer ganz gleichmässig erleuchteten Fläche ($J^2 = J_1^2$) empirisch bestimmen. — Stehen die beiden zu untersuchenden Lichtquellen einander gegenüber, sodass man den Prismenapparat ohne die beiden äusseren Prismen F benutzt, so kann auch durch blosses Umkehren desselben um 180° der betreffende Fehler annähernd eliminirt werden. Hat man z. B. mattgeschliffenes Glas zur gleichförmigen Erleuchtung des Gesichtsfeldes als durchscheinende Schirme unmittelbar an den Eintrittsöffnungen des Prismenapparates fest angebracht, so wird überhaupt die Umkehr des letzteren um 180° den fraglichen Fehler ganz beseitigen.

VI. *Untersuchungen über erzwungene Schwingungen von Platten; von Adolf Elsas.*

(Hierzu Taf. II Fig. 1—49.)

II. Theil. Schwingungen quadratischer Platten.

Bei kreisförmigen Platten konnten und mussten die erzwungenen mit den freien Schwingungen, welche von der mathematischen Theorie in vollständiger Weise beschrieben

sind, verglichen werden. Ein solcher Vergleich kann bei der Untersuchung quadratischer Platten nicht stattfinden, da die mathematische Theorie ihrer freien Schwingungen noch zu den Desideraten der theoretischen Akustik gehört.

Wir besitzen indessen erstens eine grosse Anzahl von Beobachtungen der Klangfiguren tönender Quadratscheiben, der Chladni'schen Klangfiguren[1]), und zweitens haben wir in Wheatstone's Methode der Superposition[2]) einen von theoretischen Gesichtspunkten ausgehenden Versuch, diese mannigfachen Klangfiguren miteinander und mit den Schwingungsformen rectangulärer Stäbe in Zusammenhang zu bringen.

Die gegenwärtige Untersuchung hat nun eine dreifache Absicht: 1) die von mir mehrmals erwähnten Savart'schen Gesetze erzwungener Schwingungen[3]) auch für quadratische Platten als richtig nachzuweisen; 2) zu untersuchen, ob und welche erzwungenen Schwingungsformen mit Chladni'schen Klangfiguren freischwingender Platten übereinstimmen, und 3) zu prüfen, ob die Methode der Superposition, gegen welche sich auf Grund der Beobachtung von Schwingungszahlen tönender Platten gewichtige Bedenken erheben lassen, durch die Resultate dieser Untersuchung unterstützt oder am Ende gar widerlegt wird.

Die Methode der Untersuchung ist dieselbe, welche ich bereits für Membrane und kreisförmige Platten angewendet habe. Die erzwungenen Schwingungen, welche ich beschreiben werde, sind sämmtlich durch eine vom Mittelpunkt der Platte ausgehende Erregung hervorgebracht worden, in derselben Weise, wie ich es in den citirten Abhandlungen beschrieben habe. Ueber die Versuchsanordnung, den Gang der Untersuchung und die bei derselben nothwendigen Vorsichtsmaassregeln habe ich nichts neues zu sagen, und was die Bestimmung der Tonhöhen betrifft, so kann ich mich füglich auf die Bemerkung beschränken, dass ich das Intervall der den

1) E. F. F. Chladni, Neue Beitr. z. Akustik. Leipz. 1817.

2) Ch. Wheatstone, Phil. Trans. f. 1833. p. 593.

3) F. Savart, Ann. de chim. et de phys. (2). **32.** p. 384. 1826. — A. Elsas, Nova Acta d. Kaiserl. Leop.-Carol. Acad. **45.** p. 1. 1882. — Wied. Ann. **19.** p. 474. 1883.

ersten Chladni'schen Klangfiguren entsprechenden Töne gleich 1/1,48 gefunden und dieser Bestimmung zu Grunde gelegt habe.

Es sei mir gestattet, zur Orientirung über die in Betracht kommenden Fragen einige Bemerkungen über die Theorie der Superpositionen dem Bericht über die Resultate meiner Untersuchungen vorauszuschicken.

Wheatstone ging von der Betrachtung aus, dass die Schwingungen eines rechteckigen Stabes unabhängig sind von der Breite desselben, dass also rectanguläre Stäbe von gleichem Material, gleicher Länge, gleicher Dicke, aber verschiedener Breite dieselben Tonhöhen und dieselben Schwingungsformen der möglichen Eigentöne zeigen. Aus dieser Thatsache folgerte Wheatstone, dass eine rechteckige Platte mit vollkommen frei beweglichen Kanten nach zwei zu einander senkrechten und zu den Kanten parallelen Richtungen wie ein frei-freier Stab, d. h. wie ein Stab mit freien Enden, schwingen könne, welche Folgerung auch dann gültig bleibe, wenn die Platte ein Quadrat ist. Wenn diese Annahme richtig ist, so sind die einfachsten Schwingungsformen der quadratischen Platte solche, bei denen 2, 3, 4 ... n gerade Knotenlinien parallel einem Kantenpaar auftreten. Bezeichnen wir die Periode einer solchen Fundamentalschwingungsart mit n Knotenlinien durch T_n, so wird die Platte mit derselben Periode schwingen, wenn sie so zum Tönen gebracht wird, dass dieselbe Anzahl von Knotenlinien parallel zu dem anderen Kantenpaar auftritt. Es werden aber auch solche Schwingungen von der Periode T_n möglich sein, bei denen beide Schwingungsformen gleichzeitig auftreten und sich bei beliebiger Phasendifferenz combiniren, bei denen eine Superposition der Funtamentalschwingungen stattfindet. Wheatstone ging indessen noch weiter und zeigte, dass auch solche elementare Schwingungsformen quadratischer Platten, bei welchen m Knotenlinien parallel dem einen, n Knotenlinien parallel dem anderen Kantenpaar auftreten, und für welche die Periode T_{mn} nicht aus den Schwingungen eines frei-freien Stabes theoretisch abgeleitet werden kann, sondern empirisch bestimmt werden muss, in derselben Weise superponirt werden

können, wie die vorhin erwähnten Fundamentalschwingungen, und durch diese Superpositionen die Ableitung anderer Chladni'scher Klangfiguren möglich machen.

Für die Fundamentalschwingungen m/n (das Zeichen m/n soll bedeuten, dass m Knotenlinien parallel dem einen, n Knotenlinien parallel dem anderen Kantenpaar verlaufen) hat Wheatstone eine solche Form angenommen, dass dieselben durch einfache mathematische Ausdrücke dargestellt werden können. Wir legen ein rechtwinkliges Coordinatensystem parallel zu den Kanten der Platte und lassen den Anfangspunkt desselben mit einer Ecke des Quadrates zusammenfallen; die Kante der Platte habe die Länge a; ferner bezeichnen wir durch C_1 und C_2 zwei Constanten. Alsdann wird die Fundamentalschwingung m/n dargestellt durch die Function:

$$w_1 = C_1 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}, \text{ resp. } w_2 = C_2 \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a}.$$

Eine durch Superposition dieser Schwingungstypen hervorgehende Schwingungsform wird also ausgedrückt sein durch:

$$\text{(1)} \qquad w = C_1 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} + C_2 \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a}.$$

Zur Bestimmung der Knotenlinien dieser Klangfigur hat man $w = 0$ zu setzen. Nun wird w identisch gleich Null für alle Punkte der Platte, für welche gleichzeitig $\cos m\pi x/a . \cos n\pi y/a$ und $\cos n\pi x/a . \cos m\pi y/a$ verschwindet, d. i. für die Schnittpunkte der Knotenlinien der Fundamentalschwingungen:

$$\text{(2)} \left\{ \begin{array}{llll} x = \frac{a}{2m}, & x = \frac{3a}{2m}, & x = \frac{5a}{2m}, \ldots & x = \frac{(2m-1)a}{2m}, \\ y = \frac{a}{2m}, & y = \frac{3a}{2m}, & y = \frac{5a}{2m}, \ldots & y = \frac{(2m-1)a}{2m}, \\ \text{und:} & & & \\ x = \frac{a}{2n}, & x = \frac{3a}{2n}, & x = \frac{5a}{2n}, \ldots & x = \frac{(2n-1)a}{2n}, \\ y = \frac{a}{2n}, & y = \frac{3a}{2n}, & y = \frac{5a}{2n}, \ldots & y = \frac{(2n-1)a}{2n}, \end{array} \right.$$

sodass also die $m^2 + n^2$ Schnittpunkte dieses Parallelennetzes Knotenpunkte der zusammengesetzten Schwingung sind, welches auch das Verhältniss der Constanten C_1 und C_2 sein

mag. Dieses Verhältniss, welches von den Amplituden und der Phasendifferenz der Fundamentalschwingungen abhängt, bestimmt die Knotenlinien, welche durch die m^2+n^2 Knotenpunkte hindurchgehen.

Aus Wheatstone's Theorie der Superposition ist demnach der Schluss zu ziehen, dass, wenn alle Chladni'schen Klangfiguren nach derselben erklärt werden können, bei ein und demselben Tone T_{mn} verschiedene Klangfiguren möglich sind, welche aber die gemeinsame Eigenschaft zeigen, dass die Knotenlinien derselben durch die Schnittpunkte des fundamentalen Knotenliniennetzes hindurchgehen. Nun ist es Thatsache, dass die Superpositionsmethode zu Figuren führt, welche mit den beobachteten Chladni'schen Klangfiguren im allgemeinen ziemlich gut übereinstimmen. Auch kann zur Ableitung der bekannten Klangfiguren die einfache Annahme gemacht werden, dass die sich combinirenden Fundamentalschwingungen gleiche Amplituden haben und sich in gleichen oder entgegengesetzten Phasen befinden, sodass sich also sämmtliche Figuren aus der Gleichung:

$$(3) \qquad 0 = \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} \pm \cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{a},$$

ergeben, wenn man für m und n bestimmte ganze Zahlen einsetzt, Null nicht ausgeschlossen.

Wheatstone's Annahmen über die Form der Fundamentalschwingungen sind indessen insofern unzulässig, als sie nicht auf die Schwingungen des frei-freien Stabes anwendbar sind. Soll die Function $w_1 = C_1 \cos m\pi x/a = C_1 \cos \mu x/a$ die Schwingungsform eines frei-freien Stabes ausdrücken, so hat sie für alle Punkte desselben die Differentialgleichung:

$$(4) \qquad \frac{d^4 w_1}{dx^4} = \frac{\mu^4}{a^4} w_1,$$

zu erfüllen und für die freien Enden $x = 0$ und $x = a$ den Grenzbedingungen:

$$(4_a) \qquad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0,$$

zu genügen.[1]) Man sieht nun sofort, dass die Form $w_1 = C_1 \cos \mu x/a$

1) cf. Lord Rayleigh, die Theorie d. Schalles, deutsch v. Fr. Neesen. 1. p. 278. 1880.

der Differentialgleichung (4) sowohl als der zweiten Grenzbedingung genügt, dass aber die erste Grenzbedingung nicht erfüllt wird.

Die wirklichen particulären Lösungen des Problems haben vielmehr, wenn wir die Constante C fortlassen, die Form:

$$(5)\quad \begin{cases} w_1 = (\sin\mu + i\sin i\mu)\left(\cos\frac{\mu x}{a} + \cos i\frac{\mu x}{a}\right) \\ \quad - (\cos\mu - \cos i\mu)\left(\sin\frac{\mu x}{a} - i\sin i\frac{\mu x}{a}\right), \end{cases}$$

in welcher Gleichung $i = \sqrt{-1}$ ist, und die abstracte Zahl μ nicht mehr ein ganzes Vielfaches von π darstellt, sondern aus der Gleichung:

$$(5_a)\qquad \cos\mu\cos i\mu = 1$$

zu bestimmen ist.[1])

Bezeichnen wir durch w_2 diejenige Function, welche aus w_1 durch Vertauschung von x mit y hervorgeht, so kann man, wenn die Superpositionstheorie die Schwingungen quadratischer Platten überhaupt darzustellen vermag, diese Formen von w_1 und w_2 ebenso combiniren, wie die Wheatstone'schen. Das heisst, man kann sagen, die möglichen Schwingungsformen einer quadratischen Platte, welche der Ordnung $m/0$ angehören, seien dargestellt durch die Function:

$$(6)\qquad w = w_1 \pm w_2,$$

und um die einzelnen Klangfiguren zu finden, habe man in diesen Ausdruck die nach der Gleichung (5_a) zulässigen Werthe von μ der Reihe nach zu substituiren und dann $w = 0$ zu setzen. Lord Rayleigh hat auf diese Weise einige der einfachsten Superpositionsfiguren construirt, gleichzeitig aber auch darauf aufmerksam gemacht, dass auch die Gleichung (6) der strengen Theorie der quadratischen Platte nicht genügt, indem eine solche Platte überhaupt nicht wie ein frei-freier Stab schwingen kann.[2])

Die partielle Differentialgleichung, welche die Schwingungen einer quadratischen Platte für jeden Punkt derselben erfüllen muss, wird zwar durch w befriedigt; es hat aber die

---

1) Rayleigh, l. c. p. 292.

2) Rayleigh, l. c. p. 405—411.

Schwingungsfunction w zweien Paaren von Grenzbedingungen zu genügen, welche zuerst Kirchhoff abgeleitet hat[1]), und zwar einem Paar für $x = 0$ und $x = a$, nämlich:

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{d^2 w}{dx^2} + (2 - \sigma)\dfrac{d^2 w}{dy^2}\right\} = 0, \\ \dfrac{d^2 w}{dx^2} + \sigma \dfrac{d^2 w}{dy^2} = 0, \end{cases}$$

wo σ das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bedeutet. Das andere Paar der Grenzbedingungen, welches für $y = 0$, $y = a$ erfüllt sein muss, wird erhalten, wenn man in den Gleichungen (7) x und y vertauscht. Drei dieser Grenzbedingungen werden durch die angenommene Form von w befriedigt; dagegen wird die zweite Grenzbedingung für $y = 0$, $y = a$, nämlich:

$$(7_a) \quad \frac{d^2 w}{dy^2} + \sigma \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

verletzt, wenn nicht $\sigma = 0$ ist. „Das zeigt, dass, ausgenommen den einen eben reservirten Fall, eine freie rechtwinklige Platte nicht in der Art eines Stabes schwingen kann." „Wenn auch die Constante σ .... für alle bekannten Substanzen positiv ist, so ist sie bei einigen wenigen Substanzen (Kork z. B.) verhältnissmässig sehr klein. Es liegt, soweit unsere Kenntnisse reichen, nichts Absurdes in dem Gedanken an eine Substanz, für welche σ verschwindet. Eine Untersuchung des durch diese Annahme vereinfachten Problemes entbehrt daher nicht des Interesses, wenn auch die Resultate auf gewöhnliche Glas- oder Metallplatten, für die der Werth von σ ungefähr $^1/_3$ ist, nicht genau anwendbar sind."

Bei den vorliegenden Untersuchungen sind nun Platten von solchen Substanzen, für welche man σ als klein voraussetzen darf, nämlich Platten von Carton und Actendeckel, angewandt worden. Auf solche Platten müsste sich also die Superpositionstheorie annähernd anwenden lassen.

Indessen verlangt jede Superpositionstheorie, dass den zusammengesetzten Schwingungsformen genau dieselben Tonhöhen entsprechen, wie den Fundamentalschwingungen, aus

1) G. Kirchhoff, Crelle's Journ. **40.** p. 51. 1850.

denen sie abgeleitet werden. Es wird demnach keine Superpositionsmethode zur Erklärung der Schwingungen von Platten anwendbar sein, wenn die Thatsachen zeigen, dass Schwingungen, welche aus denselben elementaren Formen durch Superposition erzeugt sind, verschiedene Tonhöhen haben. Die zahlreichen Beobachtungen Chladni's, deren Zuverlässigkeit wahrhaft staunenerregend ist, weisen eine solche Verschiedenheit der Tonhöhen zusammengehöriger Klangfiguren auf das evidenteste nach, und gerade diese Beobachtungen sind es, welche Savart auf den Gedanken brachten, dass eine Verschiedenheit in den Klangfiguren eine Verschiedenheit der Tonhöhen bedinge.[1])

Wir müssen demnach constatiren, dass die Anschauungen Savart's und diejenigen Wheatstone's unvereinbar sind. Die Einwände, welche W. Weber gegen Savart geltend gemacht hat[2]), und welche sich auf eine durchgreifende Unterscheidung zwischen tönenden und Resonanzschwingungen gründen, werden durch die Methode der vorliegenden Untersuchung bedeutungslos gemacht, da wir alle Schwingungsformen, worunter wir auch Chladni'sche erkennen werden, in derselben Weise darstellen.

Man wird aus den vorstehenden Bemerkungen erkennen, dass es nicht unsere Absicht ist, die Differenz zwischen den Grundvorstellungen Wheatstone's und Savart's abzuschwächen, indem wir hervorheben, dass nur für die tiefsten Töne der Platte bei verwandten Klangfiguren ein grosses Intervall constatirt worden ist.

Soviel zur Orientirung über das Problem. Wenden wir uns nunmehr zur Discussion der Beobachtungsresultate.

Als Grundton der Platten, welche nicht zum Selbsttönen gebracht werden können, bezeichne ich denjenigen Ton der erregenden Stimmgabel, bei welchem sich als Klangfigur eine durch den Mittelpunkt der Platte gehende Parallele zu jedem Kantenpaar zeigt, beziehungsweise die Klangfigur 7 der beigefügten Tafel. Die entsprechende Tonhöhe nehme ich als

1) F. Savart, l. c., p. 1 ff.

2) W. Weber, Schweigger's und Schweigger-Seidel's Jahrb. 50. p. 176. 1827.

Einheit für die Bestimmung der Tonhöhen anderer Schwingungsformen.

Solange die Tonhöhe der erzwungenen Schwingung bedeutend kleiner ist als Eins, schwingt die Platte als Ganzes, indem die Intensität der Schwingungen von der Mitte nach den Kanten zu abnimmt. Dieser Schwingungszustand wird dadurch erkannt, dass aufgestreuter Sand von der Platte heruntergeworfen wird, während Lycopodiumstaub in der Mitte derselben einen kleinen Wirbel bildet. Bei allmählich wachsender Tonhöhe wird dann ein Schwingungszustand erreicht, bei welchem eine durch Lycopodiumstaub gebildete Linie um den Mittelpunkt herum sich als Linie der stärksten Ausschwingung charakterisirt, sodass die Intensität der Schwingungen vom Mittelpunkt bis zu dieser Maximallinie allmählich zunimmt und ausserhalb derselben wieder abnimmt. Die Maximallinie deformirt sich continuirlich, und der von derselben begrenzte Raum, welcher den Mittelpunkt enthält, wird immer grösser. Wenn das Intervall zwischen der erzwungenen Schwingung und dem Grundton ungefähr 2:3 ist, wird der Mittelpunkt der Platte ein Knotenpunkt, und wenn die Tonhöhe 0,70 geworden ist, bildet sich eine kleine Knotenlinie um die Mitte (Fig. 1).

Wir wollen die allmähliche Veränderung dieser Knotenlinie und das Auftreten neuer Knotenlinien bei wachsender Tonhöhe verfolgen, um die Savart'schen Gesetze zu bestätigen.

Der kleine Ring von Fig. 1 deformirt sich zu einer ellipsenähnlichen Figur, deren Axen mit den Diagonalen der Platte zusammenfallen, und diese Knotenlinie nimmt schnell an Grösse zu, wobei die grosse Axe bedeutend schneller wächst, als die kleine (Fig. 2 und 3). Die Fig. 4, welcher die Tonhöhe 0,83 entspricht, zeigt, dass die geschlossene Knotenlinie nach der raschen Ausdehnung in der Richtung der einen Diagonale gewissermassen zerrissen ist und sich in ein Paar von parallelen geraden Linien deformirt hat. Die Parallellinien bilden den Uebergang von einer ellipsenähnlichen zu einer hyperbelähnlichen Figur, für welche ebenfalls die Diagonalen Axen sind (Fig. 5). Die Schwingungsformen

6 und 7, welchen die Tonhöhe 0,94 resp. 1,00 zukommt, zeigen die continuirliche Deformation dieser hyperbelartigen Knotenlinie. Nach den Angaben von Strehlke[1]), der gefunden hat, dass die Chladni'schen Klangfiguren freischwingender quadratischer Platten stets durch krumme Linien gebildet werden, welche sich nie durchschneiden, ist Fig. 7 als diejenige Klangfigur anzusehen, welche sich bei dem tiefsten Eigenton der Platte bildet.

Beiläufig bemerkt, kann ich diesen Angaben Strehlke's eine grosse Bedeutung für die Theorie nicht beimessen, da sich die Abweichung der beobachteten Knotenlinien von den aus geraden Linien zusammengesetzten und abgeleiteten Figuren sehr einfach dadurch erklären lässt, dass die Punkte, in welchen die Platte bei freien Schwingungen gehalten wird, nicht wirklich gezwungen sind, in Ruhe zu bleiben.

Diese Erklärung wird durch die Thatsache unterstützt, dass bei den erzwungenen Schwingungen, welche von dem Mittelpunkt der Platte aus erregt werden, dieser sich sehr wohl als ein scheinbarer Ruhepunkt charakterisiren kann.

Fig. 7 entspricht also der Chladni'schen Klangfigur 1/1. Ich will an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, dass ich keine andere Schwingungsform $(2m+1)/n$ mit einer ungeraden Anzahl zu den Kanten paralleler Knotenlinien erhalten habe, als diese eine.

Die Schwingungsform 1/1 scheint gewissermassen einem labilen Gleichgewichtszustand zu entsprechen, indem bei allmählichem Anwachsen der Tonhöhe die Klangfigur der erzwungenen Schwingung keine Verwandtschaft mit Fig. 7 mehr zeigt, sondern wahrscheinlich zuerst in einen Kreis überspringt (Fig. 8[2])), welcher sich dann wieder zu einer Ellipse deformirt, deren Axen aber mit den Kanten der Platte parallel sind.

Der Uebergang dieser elliptischen Figur zu einem Paar paralleler gerader Linien wird durch die Figuren 9 und 10, welchen die Tonhöhen 1,14, resp. 1,20 entsprechen, dargestellt.

---

1) Strehlke, Pogg. Ann. 4. p. 205. 1825.

2) Die Klangfigur ist nur schwierig rein zu erhalten.

Die Lage der parallelen Knotenlinien in Fig. 11 entspricht aber keineswegs der Klangfigur 2/0, welche erhalten wird, wenn man die Platte als einen frei-freien Stab betrachtet. Wenn die Tonhöhe 1,28 überschritten wird, bildet sich eine hyperbolische Klangfigur, deren Scheitel sich immer mehr einander nähern, während die Schnittpunkte mit den Kanten sich mehr nach den Ecken des Quadrates zu verschieben, sodass wir durch ganz allmähliche Deformation das Kreuz der Diagonalen als Klangfigur erhalten (Fig. 12, 13 u. 14). Als Tonhöhe fand ich bei der Schwingungsform 14 die Zahl 1,48, was sehr gut mit den Angaben Chladni's übereinstimmt.

Fig. 14 wird bekanntlich nach der Superpositionsmethode aus der Fundamentalschwingung 2/0 abgeleitet. Wenn wir die Wheatstone'schen Schwingungsfunctionen als Annäherungen betrachten wollen, so hätten wir zur Ableitung der Figur die Gleichung:

$$0 = \cos\frac{2\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi y}{a},$$

von welcher man sofort sieht, dass sie befriedigt wird für alle Punkte der Diagonale $y = x$, und man überzeugt sich leicht durch Einsetzen von $y = a - x$, dass auch die andere Diagonale Knotenlinie ist. Die Fundamentalschwingung 2/0 wird bekanntlich bei freischwingenden Platten nicht erhalten, und zur Ordnung 2/0 zählt man gewöhnlich nur noch eine Eigenschwingung, für welche aus den Wheatstone'schen Schwingungsfunctionen das der Platte eingeschriebene Quadrat, dessen Ecken in die Mitten der Kanten fallen, abgeleitet wird. Diese Klangfigur habe ich bei den erzwungenen Schwingungen nicht erhalten; wohl aber zeigt sich eine ganze Reihe von Schwingungsformen, welche nach der Superpositionstheorie zur Ordnung 2/0 gehören, indem ihre Knotenlinien durch dieselben vier Punkte hindurchgehen, sodass, wenn wir der Einfachheit halber wieder die Wheatstone'schen Schwingungsfunctionen als richtig annehmen, alle diese Figuren durch die Gleichung:

$$0 = C_1 \cos\frac{2\pi x}{a} + C_2 \cos\frac{2\pi y}{a}$$

dargestellt werden können. Indessen gehört zu jeder dieser Klangfiguren eine bestimmte Tonhöhe, welche am kleinsten ist, wenn $C_2 = - C_1$ ist, und allmählich grösser wird, wenn C_2 sich dem Werthe 0 nähert und durch diesen Werth hindurchgehend positiv wird, sodass die Tonhöhen der Schwingungsformen, welche am meisten auseinander liegen, etwa um eine grosse Terz verschieden sind.

Wenn die Tonhöhe 1,48 überschritten ist, so bilden sich wieder hyperbolische Figuren, deren erste Axe jedoch grösser ist, als bei denjenigen hyperbelähnlichen Knotenlinien, welche bei der Annäherung an die Tonhöhe 1,48 erhalten wurden (vgl. Fig. 15). Die Hyperbel deformirt sich alsdann in ein Paar zu den Kanten paralleler gerader Linien (Fig. 16), deren Abstand voneinander grösser ist, als der Abstand der Parallelen in Fig. 11, und zwar etwas grösser als 0,5 a, wie es die Theorie der frei-freien Stäbe verlangt.

Bei der Schwingungsform 16 ist die Tonhöhe 1,70. Lassen wir dieselbe noch weiter wachsen, so erhalten wir krummlinige, zweiästige Figuren, deren Aeste ihre concave Seite nach der Mittellinie der Platte richten, und welche sich, soweit ich es erkennen konnte, bis zur Tonhöhe 1,80 aus der Fundamentalschwingung 2/0 ableiten lassen.

Da nun jede der erzwungenen Schwingungsformen durch die zugehörige Schwingungszahl genau bestimmt ist, da also eine Verschiedenheit der Klangfiguren nur durch eine Verschiedenheit der Tonhöhen erklärt werden kann, so müssen wir schliessen, dass jede Superpositionstheorie zur Erklärung der Schwingungen quadratischer Platten unzulässig und höchstens als eine Methode zur angenäherten Construction der Schwingungsformen brauchbar ist.

Wenn die Tonhöhe 1,80 überschritten wird, deformiren sich die Knotenlinien allmählich weiter, gehen aber nicht mehr durch die Schnittpunkte der Fundamentalschwingungen 2/0.

Es darf nicht übersehen werden, dass Chladni solche Schwingungsformen wie Fig 15 und 17 als Abänderungen der regelmässig erscheinenden Klangfiguren $\underline{2/0}$ und $\overline{2/0}$ bei freischwingenden Platten erhalten hat.[1])

1) Chladni, l. c. Tab. IV. Fig. 67 u. 68.

Ich brauche den Uebergang von Figur 16 zu Figur 28 nicht näher zu erörtern; man erkennt die Continuität in den Klangfiguren ohne weiteres. Nur will ich bemerken, dass in den Figuren 16 und 17 die Mitte der Platte ein Schwingungsmaximum zeigt, dass sich dann eine Maximallinie um den Mittelpunkt herum bildet, und dass bei Erweiterung dieser Maximallinie, etwa bei der Tonhöhe 2,72 (Fig. 23), der Mittelpunkt zu einem Knotenpunkt wird, sodass nach Ueberschreitung dieses Tones sich eine neue Knotenlinie um den Mittelpunkt bildet, welche allmählich grösser wird und in Fig. 28 (Tonhöhe 3,75) mit den vorher vorhandenen Knotenlinien gewissermassen verschmilzt.

Der Chladni'schen Klangfigur 2/1 kommt die Tonhöhe 2,50 zu. Diese Figur freischwingender Platten wird bei den erzwungenen Schwingungen nicht erhalten, wie denn überhaupt alle Chladni'schen Figuren, für welche eine der Ordnungszahlen ungerade ist, sich nicht zeigen. Es ist bei den Deformationen der erzwungenen Schwingungsformen der Durchgang durch die Tonhöhe 2,50 nur dadurch bemerkenswerth, dass die Knotenlinien ihre convexen Seiten der Mittellinie der Platte zukehren, während sie vorher derselben die concaven Seiten zuwandten.

Die Tonhöhe 4,17 kommt der Eigenschwingung 3/0 zu. Auch in der Nähe dieses Tones erfolgen die Abänderungen der Knotenlinienfiguren continuirlich, wie die Figuren 29 und 30 zeigen, ohne auf die Chladni'sche Klangfigur hinzudeuten. Es darf nicht übersehen werden, dass bei allen Chladni'schen Klangfiguren von der Ordnung 3/0 der Mittelpunkt der Platte nach der Superpositionstheorie ein Ruhepunkt sein muss, in welchem sich Knotenlinien schneiden, dass bei den erzwungenen Schwingungen 29 und 30 hingegen in der Mitte der Platte ein Schwingungsmaximum liegt. Die Chladni'sche Klangfigur 2/2, zu welcher die genannten Figuren den Uebergang darstellen, verlangt ja die Bildung eines Schwingungsmaximus in der Mitte der Platte. Bei der Tonhöhe 4,56 bildet sich diese Schwingungsform recht scharf und deutlich (Fig. 31).

Ich dürfte nunmehr die eingehende Discussion der be-

obachteten Schwingungsfiguren abbrechen und es dem Leser überlassen, die Uebergänge von der Schwingungsform 2/2 zu den Klangfiguren von der Ordnung 4/0 und weiter zu den Klangfiguren 4/2 zu verfolgen. Es ist nur darauf aufmerksam zu machen, dass die Tonhöhen 5,0 und 7,5, welchen die freien Schwingungen von der Ordnung 3/1, resp. 3/2 entsprechen, überschritten werden, ohne dass die Continuität der erzwungenen Schwingungsformen gestört wird. Ebensowenig werden die Eigenschwingungen 4/1 und 3/3, deren Tonhöhe 9,16—9,33, resp. 10,66—10,83 ist, in den Klangfiguren der erzwungenen Schwingungen angedeutet.

Die Figuren 39—43 sind sämmtlich durch Superpositionen der Fundamentalschwingungen 4/0 erklärbar; aber während die Schwingungsformen durch allmähliche Deformationen in einander übergehen, wächst die Tonhöhe stetig von 7,60 bis 8,50, also um einen grossen ganzen Ton, sodass zu jedem bestimmten Tone dieses Intervalls eine ganz bestimmte Klangfigur gehört. Ein ähnliches Verhältniss findet bei den Figuren 46—49 und den zwischen diesen liegenden Schwingungsformen, welche ich nicht gezeichnet habe, statt; dieselben sind sämmtlich nach der Superpositionstheorie aus den Fundamentalschwingungen 4/2 herzuleiten; die Tonhöhe wächst indessen continuirlich von 11,20 bis 12,00, also um einen grossen halben Ton.

Das Intervall, in welchem verwandte Klangfiguren auftreten, wird immer kleiner; diese Thatsache, welche man, wie schon bemerkt, nicht zu Gunsten der Superpositionstheorie deuten darf, entspricht vollkommen den Beobachtungen erzwungener Schwingungen bei anderen Körpern: je grösser die Tonhöhe der erzwungenen Schwingung wird, desto schneller gehen die Verwandlungen der Klangfiguren vor sich.

Eine Darstellung der Schwingungsformen, welche ich bei grösseren Tonhöhen als 12,0 erhalten habe, habe ich unterlassen, weil dieselben ausser den Formen der Uebergänge nichts Neues zeigen. Ich fasse daher nur noch die Resultate meiner Untersuchungen zusammen:

1. Die beobachteten Klangfiguren einer quadratischen

Platte, welche durch eine im Mittelpunkt wirkende periodische Erregung in erzwungene Schwingungen versetzt wird, bestätigen die Allgemeingültigkeit der Savart'schen Gesetze, denen zufolge die Schwingungsformen continuirlich in einander übergehen.

2. Jede Abänderung einer Klanfigur ist bedingt durch eine Veränderung der Tonhöhe.

3. Die Chladni'schen Klangfiguren $2m/2n$ werden sämmtlich auch als Schwingungsformen erzwungener Vibrationen erhalten. Hingegen fehlen alle Chladni'schen Klangfiguren, deren Ordnungszeichen eine ungerade Zahl enthält, bei den Klanfiguren der erzwungenen Schwingungen. Ausgenommen von letzterer Regel ist die Klangfigur 1/1.

4. Die Deformationen in der Nähe der Klangfiguren $2m/2n$ erfolgen in der Weise, dass die Schwingungsformen durch Superposition zweier Fundamentalschwingungen mit geraden Knotenlinien parallel der Kanten abgeleitet werden können. Da aber nach (2) eine Verschiedenheit in den Klangfiguren durch eine Verschiedenheit der Tonhöhen bedingt ist, so ist jede Superpositionstheorie zur Erklärung der Plattenschwingungen ungenügend. Bezeichnet man die fundamentalen Schwingungsformen durch w_1 und w_2, indem unter w_1 eine Function von x allein, unter w_2 eine Function von y allein verstanden wird, so würden die superponirten Schwingungen dargestellt sein durch eine Gleichung von der Form:

$$w = C_1 w_1 + C_2 w_2 .$$

Die Tonhöhe der erzwungenen Schwingungen bestimmt das Verhältniss der Constanten C_1 und C_2 und damit auch die Function w. Die Beobachtung ergibt, dass die Tonhöhe am kleinsten ist, wenn $C_2 = - C_1$ gesetzt werden kann, und dass sie allmählich wächst, wenn der Quotient $C_2 : C_1 > -1$ wird und sich dem Nullwerth nähert. Ein Mittelwerth der Tonhöhe wird erreicht, wenn $C_2 = 0$ wird, und die Tonhöhe wächst weiter bis zu einem Maximalwerth, wenn man C_2 das gleiche Vorzeichen gibt wie C_1 und C_2 von Null bis C_1 wachsen lässt. Geht man über die dem Verhältniss $C_2/C_1 = +1$ entsprechende Tonhöhe hinaus oder unter das Verhältniss $C_2/C_1 = -1$ herunter, so sind die Klangfiguren nicht mehr

aus der obigen Gleichung abzuleiten. Auch diese Thatsache spricht gegen die Anwendbarkeit einer Superpositionsmethode zur Ableitung einer Theorie schwingender quadratischer Platten; denn das Problem der erzwungenen Schwingungen kann nur gelöst werden durch Aufsuchen einer stetigen Function der Periode T der erzwungenen Schwingung und der Coordinaten x und y, welche erstens eine Lösung der Differentialgleichung der Bewegung darstellt, zweitens den Kirchhoff'schen Grenzbedingungen für die Kanten genügt und drittens die Bedingung:

$$w = \frac{A}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

für $x = a/2$, $y = a/2$ erfüllt; aus dieser Function würden sich auch die möglichen Eigenschwingungen ergeben, wenn man T angemessene Werthe beilegt.

Schlussbemerkung.

Mittelst Erzeugung erzwungener Schwingungen können die Gesetze, welche die Abhängigkeit der absoluten Tonhöhen gleicher Schwingungsformen von den Dimensionen der Platte darstellen, in sehr einfacher Weise demonstrirt werden. Die gleichen Schwingungszuständen entsprechenden Tonhöhen von Platten, welche aus demselben Material hergestellt sind, aber verschiedene Grösse und Dicke haben, sind bekanntlich dem Flächeninhalt umgekehrt und der Dicke direct proportional.

Um das erste Gesetz experimentell zu bestätigen, schneide man aus einem und demselben Bogen Actendeckel zwei kreisförmige oder quadratische Scheiben aus, deren Radien, resp. Kanten sich wie die Quadratwurzeln aus den Tonhöhen zweier bestimmter Stimmgabeln verhalten, und erzeuge mittelst der tieferen Stimmgabel auf der grösseren Platte, mittelst der höheren Stimmgabel auf der kleineren Platte die erzwungene Schwingung. Alsdann erscheinen, wenn man Sand aufstreut, auf beiden Platten dieselben Klangfiguren. Ferner kann man die Gabeln durch zwei andere ersetzen, deren Schwingungszahlen in demselben Verhältnisse stehen; man erhält dann andere, aber wiederum auf beiden Platten gleiche Klang-

figuren. Auch ist es leicht, die Gültigkeit des Gesetzes für beliebig gestaltete Platten nachzuweisen, indem man Ellipsen von beliebiger Excentricität oder andere Platten von gleicher Gestaltung ausschneidet, in welchen homologe Linien sich wie die Quadratwurzeln der anzuwendenden Stimmgabeln verhalten.

Um die Proportionalität der Tonhöhen mit der Dicke der Platte zu demonstriren, construire man drei Platten aus demselben Material, von derselben Gestalt und Grösse; man verbinde zwei dieser Platten durch einen schwachen Leim und bringe die Doppelplatte und die einfache Platte in Verbindung mit Stimmgabeln, deren Tonhöhen sich wie 2:1 zu verhalten, alsdann erhält man auf beiden Seiten gleiche Klangfiguren.

Marburg, im Juli 1883.

VII. *Zu Boltzmann's Theorie der elastischen Nachwirkung; von Eduard Riecke.*

Die von Boltzmann für die elastische Nachwirkung aufgestellten Gleichungen lassen sich auf einem anderen Wege ableiten als dem von ihm befolgten.

Wir betrachten ein Parallelepipedon, dessen Kanten den Axen x, y, z eines rechtwinkligen Coordinatensystemes parallel sind. Der zu einer bestimmten Zeit t bestehende Zustand dieses Prismas sei in folgender Weise gegeben. In dem Augenblick t werden auf die drei Seitenflächen des Prismas drei Drucke p_1, p_2, p_3 ausgeübt; ausserdem seien in der Richtung der drei Axen elastische Nachwirkungen vorhanden, erzeugt dadurch, dass zu einer beliebigen früheren Zeit τ während des kleinen Zeitraumes $d\tau$ Dilatationen von dem Betrage λ_1^τ, λ_2^τ, λ_3^τ in der Richtung der drei zu einander senkrechten Axen unterhalten worden waren. Wir machen die Hypothese, dass die durch einen einzelnen Druck p_1 erzeugten Wirkungen ganz ebenso sich gestalten, wie

wenn keine anderen Drucke, keine Nachwirkungen vorhanden wären, d. h. der Druck p_1 erzeuge eine Verlängerung in der Richtung der x-Axe, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$p_1 = -E\frac{\xi_1}{x},$$

Contractionen in der Richtung der y- und z-Axe, welche gegeben sind durch:

$$\frac{\eta_1}{y} = \frac{\zeta_1}{z} = -\mu\frac{\xi_1}{x}.$$

Hier bezeichnet E den Elasticitätsmodul, μ das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation.

Ganz ebenso gelten für die Drucke p_2 und p_3 die Gleichungen:

$$p_2 = -E\frac{\eta_2}{y}, \qquad \frac{\zeta_2}{z} = \frac{\xi_2}{x} = -\mu\frac{\eta_2}{y},$$

$$p_3 = -E\frac{\zeta_3}{z}, \qquad \frac{\xi_3}{x} = \frac{\eta_3}{y} = -\mu\frac{\zeta_3}{z}.$$

Bezeichnen wir durch $d\lambda_1^\nu$, $d\lambda_2^\nu$, $d\lambda_3^\nu$ die zur Zeit t bestehenden Nachwirkungsdilatationen, durch λ_1, λ_2, λ_3 die gesammten zu dieser Zeit vorhandenen Dilatationen des Prismas, so ist:

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{x} + d\lambda_1^\nu, \qquad \lambda_2 = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{y} + d\lambda_2^\nu,$$

$$\lambda_3 = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{z} + d\lambda_3^\nu,$$

Wenn man mit Hülfe dieser Gleichungen die Verlängerung ξ_1 ausdrückt durch die Gesammtdilatationen λ_1, λ_2, λ_3, so ergibt sich:

$$p_1 = -\frac{E}{1+\mu}\left\{\lambda_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\right\}$$

$$+\frac{E}{1+\mu}\left\{d\lambda_1^\nu + \frac{\mu}{1-2\mu}(d\lambda_1^\nu + d\lambda_2^\nu + d\lambda_3^\nu)\right\}.$$

Setzt man:

$$E = 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta}, \qquad \mu = \frac{\Theta}{1+2\Theta},$$

so erhält man die Kirchhoff'sche Form der Gleichungen:

$$p_1 = -2K[\lambda_1 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)] + 2K[d\lambda_1^\nu + \Theta(d\lambda_1^\nu + d\lambda_2^\nu + d\lambda_3^\nu)].$$

Im allgemeinen wird die elastische Nachwirkung des Prismas nicht durch eine einzige während eines isolirten Zeitelementes $d\tau$ ausgeübte Dilatation bedingt sein, son-

dern in dem ganzen Zeitraum von $t = -\infty$ bis $t = t$ werden Dilatationen bestanden haben. Wir machen die Hypothese, dass auch in diesem Fall das Princip der Superposition der Wirkungen und Verschiebungen Geltung besitze. Es tritt dann an Stelle der obigen Gleichung die allgemeinere:

$$p_1 = -2K[\lambda_1 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)]$$
$$+2K\left\{\sum_{-\infty}^{t} d\lambda_1^{\nu} + \Theta\sum_{-\infty}^{t}(d\lambda_1^{\nu} + d\lambda_2^{\nu} + d\lambda_3^{\nu})\right\}.$$

In dieser Gleichung sind an Stelle der Nachwirkungsdilatationen diejenigen gegebenen Dilatationen einzuführen, deren Folge jene Nachwirkungen sind. Es setzt dies die Kenntniss eines Elementargesetzes der elastischen Nachwirkung voraus, d. h. eines Gesetzes, durch welches die einer einfachen Dehnung in der Richtung einer Hauptaxe entsprechende Nachwirkung bestimmt wird.

Um zu den speciellen, von Boltzmann aufgestellten Gleichungen zu gelangen, müssen wir dieses Gesetz in der folgenden Form supponiren.

1. Die elastische Nachwirkung, welche durch eine einfache Dehnung ξ_1^{τ} eines Prismas in der Richtung der x-Axe erzeugt wird, ist zur Zeit t dargestellt durch den Ausdruck:

$$d\xi_1^{\nu} = \xi_1^{\tau}\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Hier ist $\Phi(t-\tau)$ eine Function der Zeit t, welche für $t - \tau = 0$ einen bestimmten endlichen Werth besitzt, für $t - \tau = \infty$ verschwindet; $d\tau$ das Zeitelement, während dessen die Dehnung ξ_1^{τ} unterhalten wurde.

2. Die der Verlängerung ξ_1^{τ} entsprechenden Quercontractionen η_1^{τ} und ζ_1^{τ} haben Nachwirkungen $d\eta_1^{\nu}$ und $d\zeta_1^{\nu}$ zur Folge, welche in derselben Weise von $d\xi_1^{\nu}$ abhängen, wie η_1^{τ} und ζ_1^{τ} von ξ_1^{τ}, es ist somit:

$$d\eta_1^{\nu} = \eta_1^{\tau}\,\Phi(t-\tau)\,d\tau, \qquad d\zeta_1^{\nu} = \zeta_1^{\tau}\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

3. Wenn zur Zeit τ gleichzeitig drei primäre Dehnungen ξ_1^{τ}, η_2^{τ}, ζ_3^{τ} in der Richtung der Hauptaxen erzeugt worden sind, so haben die gesammten so entstehenden Nachwirkungsdilatationen zur Zeit t den Werth:

$$\frac{d\xi_1^\tau + d\xi_2^\tau + d\xi_3^\tau}{x} = d\lambda_1^\tau = \lambda_1^\tau \Phi(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{d\eta_1^\tau + d\eta_2^\tau + d\eta_3^\tau}{y} = d\lambda_2^\tau = \lambda_2^\tau \Phi(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{d\zeta_1^\tau + d\zeta_2^\tau + d\zeta_3^\tau}{z} = d\lambda_3^\tau = \lambda_3^\tau \Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in der früheren Gleichung, so ergibt sich:

$$p_1 = -2K[\lambda_1 + \Theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)]$$
$$+ 2K\sum_{-\infty}^{t+} [\lambda_1^\tau + \Theta(\lambda_1^\tau + \lambda_2^\tau + \lambda_3^\tau)]\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Mit Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Axen eine beliebige Lage gegen die Hauptdruckaxen besitzen, ergeben sich die Gleichungen:

$$X_x = -2K\left\{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+ 2K\int_{-\infty}^{t}\left\{\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x} + \Theta\left(\frac{\partial\xi^\tau}{\partial x} + \frac{\partial\eta^\tau}{\partial y} + \frac{\partial\zeta^\tau}{\partial z}\right)\right\}\Phi(t-\tau)\,d\tau,$$

$$Y_z = Z_y = -K\left\{\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right\} + K\int_{-\infty}^{t}\left\{\frac{\partial\eta^\tau}{\partial z} + \frac{\partial\zeta^\tau}{\partial y}\right\}\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Gleichungen, welche mit den von Boltzmann aufgestellten im wesentlichen identisch sind.

Die von Boltzmann aufgestellten Gleichungen haben durch die Erfahrung nur eine theilweise Bestätigung gefunden. Insbesondere sind es die Beobachtungen von Kohlrausch an Silberdraht, welche mit denselben in Widerspruch stehen. Der Grund hierfür kann entweder darin liegen, dass für den Silberdraht die Annahme der Superposition der Wirkungen nicht zutreffend ist, oder darin, dass das für die Ausdehnung angenommene Nachwirkungsgesetz:

$$d\xi_1^\tau = \xi_1^\tau\,\Phi(t-\tau)\,d\tau$$

nicht allgemein richtig ist. Beide Möglichkeiten hängen unter sich insofern zusammen, als bei gewissen anderen Formen des Elementargesetzes, wie sie eben durch Kohl-

rausch's Beobachtungen nahe gelegt werden, durch die Superposition der Verschiebungen der zwischen $d\xi_1^{\text{I}}$ und ξ_1^{I} bestehende Zusammenhang nicht mehr auf $d\lambda_1^{\text{I}}$ und λ_1^{I} sich überträgt, sodass die entstehenden Formeln die Analogie mit den Entwickelungen der gewöhnlichen Elasticitätstheorie vollständig verlieren.

Die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen sollen benutzt werden, um wenigstens eine Vermuthung über denjenigen Einfluss zu begründen, welcher durch die elastische Nachwirkung des Suspensionsdrahtes auf galvanometrische Messungen ausgeübt wird. Bezeichnet man den Winkel, um welchen zu irgend einer Zeit das untere Ende des Drahtes gedreht ist, durch φ, so sind die Verschiebungen, welche ein Theilchen des Drahtes erleidet:

$$\xi = -\frac{zy}{l}\cdot\varphi, \qquad \eta = \frac{zx}{l}\cdot\varphi.$$

Es wird somit:

$$Y_z = -K\frac{x}{l}\varphi + K\frac{x}{l}\int_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau,$$

$$X_z = \quad K\frac{y}{l}\varphi - K\frac{y}{l}\int_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Das von diesen Kräften ausgeübte Drehungsmoment ist:

$$\begin{aligned} M &= \int (Y_z x - X_z y)\,dx\,dy \\ &= -K\frac{\pi r^4}{2l}\left\{\varphi - \int_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau\right\} \\ &= -D\cdot\varphi + D\int_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Setzt man: $t - \tau = \omega$, so wird:

$$\int_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty}\varphi(t-\omega)\,\Phi(\omega)\,d\omega.$$

Mit Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung ergibt sich somit für die Bewegung eines bei geschlossenem Multiplicator schwingenden Nadelpaares die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2q\frac{d\varphi}{dt} + p^2\varphi = \frac{D}{K}\int_0^\infty \varphi(t-\omega)\,\Phi(\omega)\,d\omega,$$

wo jetzt K das Trägheitsmoment des astatischen Paares bezeichnet.

Wir betrachten zuerst den Fall einer periodisch gedämpften Schwingung. In diesem hat man, wenn elastische Nachwirkung nicht vorhanden ist, die Gleichungen:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{p^2-q^2}}\cdot e^{-qt}\sin\sqrt{p^2-q^2}\cdot t$$

$$q = \frac{\lambda}{\tau}, \qquad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-q^2}}.$$

Bei Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung kann man setzen:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\sqrt{p^2-q^2}}\cdot e^{-(q+\varkappa)t}\sin\left[\sqrt{p^2-q^2}+\delta\right]t,$$

und erhält dann:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2q\frac{d\varphi}{dt} + p^2\varphi =$$

$$-\,2\delta\omega_0 e^{-(q+\varkappa)t}\sin\left[\sqrt{p^2-q^2}+\delta\right]t$$

$$-\,2\varkappa\omega_0 e^{-(q+\varkappa)t}\cos\left[\sqrt{p^2-q^2}+\delta\right]t$$

Substituirt man andererseits den Werth von $\varphi(t-\omega)$ in dem auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung stehenden Integral, so ergibt sich durch Vergleichung der beiden Seiten:

$$\delta = -\frac{D}{2K\sqrt{p^2-q^2}}\cdot\int_0^\infty \Phi(\omega)\cos\sqrt{p^2-q^2}\cdot\omega\,d\omega$$

$$\varkappa = \frac{D}{2K\sqrt{p^2-q^2}}\cdot\int_0^\infty \Phi(\omega)\sin\sqrt{p^2-q^2}\cdot\omega\,d\omega.$$

Infolge der elastischen Nachwirkung erleidet die Schwingungsdauer und das logarithmische Decrement des astatischen Paares eine Veränderung; die neuen Werthe, welche diese beiden Grössen annehmen, sind bestimmt durch:

$$\tau' = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-q^2}+\delta}, \qquad \lambda' = (q+\varkappa)\,\tau'.$$

Woraus:

$$p = \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda'^2}}{\tau'} - \frac{\delta\pi + \varkappa\lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \lambda'^2}}, \qquad q = \frac{\lambda'}{\tau'} - \varkappa.$$

Wir gehen über zu dem Fall der aperiodischen Bewegung, und zwar zu der Betrachtung derjenigen Bewegung, welche dem astatischen Paare durch einen constanten den Multiplicator durchfliessenden Strom ertheilt wird. Es sei K das Trägheitsmoment des astatischen Paares, C die Empfindlichkeitsconstante des Multiplicators, i die Stromstärke, φ der Winkel, welchen die magnetische Axe der Nadeln mit dem magnetischen Meridiane bildet. Wir erhalten dann die Gleichung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2q\frac{d\varphi}{dt} + p^2\varphi = \frac{C}{K}i + \frac{D}{K}\int_0^t \varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Wenn die Bewegung so weit vorgeschritten ist, dass $d^2\varphi/dt^2$ und $d\varphi/dt$ vernachlässigt werden können, so ergibt sich:

$$p^2\varphi = \frac{C}{K}i + \frac{D}{K}\int_0^t \varphi(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Bezeichnen wir die Zeit, zu welcher die schliessliche Ruhelage erreicht wird, durch t_∞, den entsprechenden Werth des Ablenkungswinkels durch φ_∞, so wird:

$$\frac{C}{K}i = p^2\varphi_\infty - \frac{D}{K}\int_0^{t_\infty} \varphi(\tau)\,\Phi(t_\infty-\tau)\,d\tau.$$

Setzen wir: $\psi = \varphi_\infty - \varphi$,
so kann die Bewegungsgleichung auf die Form gebracht werden:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2q\frac{d\psi}{dt} + p^2\psi$$

$$= \frac{D}{K}\int_0^{t_\infty} [\varphi_\infty - \psi(\tau)]\,\Phi(t_\infty-\tau)\,d\tau,$$

$$- \frac{D}{K}\int_0^{t} [\varphi_\infty - \psi(\tau)]\,\Phi(t-\tau)\,d\tau.$$

Machen wir die Substitution $t - \tau = \omega$, so wird:

$$\int_0^t [\varphi_\infty - \psi(\tau)]\,\Phi(t-\tau)\,d\tau = \varphi_\infty \int_0^t \Phi(\omega)\,d\omega - \int_0^t \psi(t-\omega)\,\Phi(\omega)\,d\omega.$$

Ist keine elastische Nachwirkung vorhanden, so ist das Integral der Gleichung:

$$\psi = \varphi_0 \frac{\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

wo: $\alpha_1 + \alpha_2 = -2q, \quad \alpha_1 \alpha_2 = p^2,$

und wo der Winkel φ_0 bestimmt ist durch:

$$\frac{C}{K} i = p^2 \varphi_0.$$

Mit Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung setzen wir:

$$\psi = \varphi_0 \frac{\alpha_1 e^{(\alpha_2 + \nu_2)t} - \alpha_2 e^{(\alpha_1 + \nu_1)t}}{\alpha_1 - \alpha_2} + \chi.$$

Für: $t = 0$ ist $\chi_0 = \varphi_\infty - \varphi_0,$

für: $t = \infty \quad \chi_\infty = 0.$

Aus dem gemachten Ansatze ergibt sich mit Vernachlässigung der Differentialquotienten von χ:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2q\frac{d\psi}{dt} + p^2\psi =$$

$$-\varphi_0 \alpha_2 e^{(\alpha_1 + \nu_1)t}\nu_1 - \varphi_0 \alpha_1 e^{(\alpha_2 + \nu_2)t}\nu_2 + p^2\chi.$$

Wenn man ferner auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung für $\psi(t-\omega)$ seinen Werth substituirt, so ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die neu eingeführten Grössen:

$$\nu_1 = \frac{D}{2K\sqrt{q^2 - p^2}} \int_0^\infty e^{-\alpha_1 \omega}\,\Phi(\omega)\,d\omega,$$

$$\nu_2 = -\frac{D}{2K\sqrt{q^2 - p^2}} \int_0^\infty e^{-\alpha_2 \omega}\,\Phi(\omega)\,d\omega,$$

$$\chi = \frac{D}{p^2 K}\varphi_\infty \left[\int_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega - \int_0^t \Phi(\omega)\,d\omega\right],$$

Die für $(C/K)i$ aufgestellte Gleichung reducirt sich auf:

$$\frac{C}{K} i = p^2 \varphi_\infty - \frac{D}{K}\varphi_\infty \int_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega = p^2(\varphi_\infty - \chi_0) = p^2\varphi_0.$$

Für χ ergibt sich der zweite Ausdruck:

$$\chi = \chi_0 - \frac{D}{p^2 K} \varphi_\infty \int_0^t \Phi(\omega)\, d\omega.$$

Setzen wir: $\alpha'_1 = \alpha_1 + \nu_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2 + \nu_2$,
so wird: $p^2 = \alpha'_1 \alpha'_2 - (\alpha'_1 \nu_2 + \alpha'_2 \nu_1)$,

$$2q = -(\alpha'_1 + \alpha'_2) + \nu_1 + \nu_2,$$

$$i\frac{C}{K} = \alpha'_1 \alpha'_2 \varphi_\infty - (\alpha'_1 \nu_2 + \alpha'_2 \nu_1) \varphi_\infty - \alpha'_1 \alpha'_2 \chi_0.$$

Gleichungen, durch welche in Verbindung mit den für ν_1, ν_2 und χ gegebenen Ausdrücken der Einfluss der elastischen Nachwirkung auf die zu messenden Constanten bestimmt wird.

VIII. *Ueber wässerige Lösungen; von J. A. Groshans.*

I. Allgemeine Betrachtungen.

Die Dichte einer Lösung, in welcher p Theile irgend eines löslichen Körpers in $(100 - p)$ Theilen Wassers gelöst sind, kann man mit grosser Annäherung nach der folgenden Interpolationsformel:

$$d = 1 + \frac{\alpha}{\frac{100 - p}{p} + \beta}$$

berechnen. Setzt man $p = 1$ und führt für $100 - p$ die Bezeichnung aq (aqua) ein, so gilt also die vereinfachte Formel

$$d = 1 + \frac{\alpha}{aq + \beta}$$

für eine Lösung, welche einen Theil (ein Gramm) in der durch aq bezeichneten Anzahl von Grammen Wasser gelöst enthält. Gewöhnlich nimmt man als Einheit der Dichte die des Wassers bei der Versuchstemperatur t an.

In den Beobachtungen von Kremers ist die Wassermenge constant $= 100$; man hat demnach bei Anwendung der obigen Formel: $aq = \frac{100}{p}$ zu setzen.

Für den Fall, dass die Lösungen ein Molecül des löslichen Körpers auf A Molecüle Wasser enthalten, kann man von der Formel

$$d = 1 + \frac{a\alpha}{18(A + \lambda)}$$

Gebrauch machen, welche dieselben Werthe von d gibt, wie die Formel mit aq; a ist das Moleculargewicht des löslichen Körpers, 18 dasjenige des Wassers; λ ist $= a/18 \cdot \beta$.

Wir lassen zunächst die Anwendung der Formel auf die Versuche von Gerlach mit Lösungen von Zucker $C^{12}H^{22}O^{11}$ folgen.

Aus den beiden Beobachtungen:

p	aq	beob. Dichte
25	3	1,105 995
10	9	1,040 104

erhält man:

$$\alpha = 0{,}387\,077; \quad \log\alpha = 9{,}587\,798\,0$$
$$\beta = 0{,}651\,849; \quad \log\beta = 9{,}818\,147\,2$$

Zwischen den Grenzen $p = 25$ und $= 10$ gibt die Formel:

p	aq	beob. Dichte	ber. Dichte	Diff.
20	4	1,083 234	1,083 209	+0,000 025
15	$5^2/_3$	1,061 278	1,061 260	+0,000 018

Die Formel kann innerhalb eines kleinen Intervalles auch noch oberhalb und unterhalb der angegebenen Grenzen angewandt werden, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht.

p	aq	beob. Dichte	ber. Dichte	Diff.
5	19	1,019 686	1,019 696	−0,000 010
30	$2^1/_3$	1,129 586	1,129 666	+0,000 080
35	$^{13}/_7$	1,154 083	1,154 276	+0,000 143
40	1,5	1,179 358	1,179 881	+0,000 523

Würde aq den Werth 0 annehmen, so würde die Formel das specifische Gewicht des gelösten Körpers im wasserfreien Zustande bezeichnen:

$$d = 1 + \frac{\alpha}{\beta} = \delta.$$

In einigen Fällen stimmt dieser Werth von δ mit dem direct beobachteten specifischen Gewicht des löslichen Körpers nahezu überein. Indessen ist es klar, dass δ sich je

nach der Wahl der zur Bestimmung von α und β verwandten beobachteten Dichten etwas ändern muss.

Um nur ein Beispiel zu geben, so ist das specifische Gewicht des krystallisirten Zuckers = 1,59 (Marignac); die oben aufgestellte Formel, berechnet nach $p = 25$ und 10, gibt $\delta = 1{,}5938$, nach $p = 75$ und 50, $\delta = 1{,}5666$. Für $aq = \infty$, (d. h. sehr gross oder etwa hinreichend gross) verschwindet die Constante β; alsdann ist 1) $d = 1$, Dichte des reinen Wassers, 2) $aq(d - 1) = \alpha$; für die A enthaltenden Formeln findet man in diesem Fall:

$$18\,A(d-1) = a\alpha.$$

Die Werthe α und $a\alpha$ stehen in directer Beziehung mit einer interessanten Eigenthümlichkeit löslicher Körper, die man mit dem Namen „Rest" bezeichnen könnte.

Thomsen scheint zuerst die Aufmerksamkeit auf diese „Reste" gelenkt zu haben, welche vielfach die Untersuchung von Lösungen erleichtern und dazu dienen können, die als „Contraction der Lösungen" bezeichnete Erscheinung nachzuweisen und zugleich zu messen. Man kann die Reste nach der Formel:

$$r = \frac{18A + a}{d} - 18A$$

berechnen. Diese lässt sich umwandeln in:

$$d = 1 + \frac{a - r}{18\left(A + \frac{r}{18}\right)},$$

und ergibt ein Blick auf die oben aufgestellte Formel

$$d = 1 + \frac{a\alpha}{18\,(A + \lambda)}$$

die grosse Aehnlichkeit beider. Man würde gewiss versucht sein, $a\alpha$ mit $a - r$ gleich zu setzen, wenn nicht die Erwägung davon zurückhielte, dass $a\alpha$ als eine Constante anzusehen ist, während doch r variabel zu sein scheint, und zwar abhängig von dem Werthe von A.

Die Schwierigkeit verschwindet, sobald in beiden Formeln $A = \infty$ wird. Alsdann hat man:

$$18\,A(d-1) = a - r,$$

wie schon für die andere Formel die Beziehung $18 A (d - 1) = a\alpha$ gegeben war. Daraus folgt:

$$a\alpha = a - r; \quad r = a - a\alpha; \quad r = a(1 - \alpha);$$
$$r/a = 1 - \alpha = \varrho; \quad r = a\varrho;$$

ϱ würde den Rest für 1 g eines in einer sehr grossen Wassermenge gelösten Körpers bezeichnen. Die Zahl 1 in $\varrho = 1 - \alpha$ ist ein Cubikcentimeter. Auch noch auf andere, vielleicht regelrechtere Weise gelangt man zu ganz denselben Formeln.

Durch Verbindung von:

$$d = 1 + \frac{\alpha}{aq + \beta} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{aq + 1}{d} - aq$$

erhält man:

$$\varrho = 1 - \alpha \frac{aq + 1}{aq + \alpha + \beta}.$$

Ist $aq = \infty$, so hat man $\varrho = 1 - \alpha$ für ein Gramm des gelösten Körpers und für ein Molecül (a Gramm) $r = a\varrho = a - a\alpha = a(1 - \alpha)$. Für $aq = 0$ würde $\varrho = 1 - \alpha/(\alpha + \beta)$ sein. Die letztere Formel gibt ein Maximum, wenn $\alpha + \beta - 1 = \varepsilon$ eine positive Grösse ist.

Wie die Beobachtung zeigt, sind α und β für Lösungen, deren Dichte grösser ist als die des Wassers, beide positiv und ebenso auch ε.

Für den Fall, dass man bei irgend einem Körper:

$$\alpha + \beta = 1$$

haben würde, hätte man ebenso wenig eine Zusammenziehung wie eine Ausdehnung der Lösung; ϱ wäre dann auch constant (infolge dessen auch r). Ungefähr scheint dies so, nach Thomsen, bei der Ueberjodsäure, JO^6H^5 zu sein. Wie aus der Formel hervorgeht, nimmt zwischen den beiden Grenzwerthen (0 und ∞) ϱ mit zunehmendem aq ab. Der Werth von ϱ (d. h. hier nur von dem constanten Werth von ϱ, für $aq = \infty$) hängt von α ab, wie man aus $\varrho = 1 - \alpha$ ersieht. Es lassen sich hier zwei Fälle unterscheiden, jenachdem α positiv oder negativ ist.

1) α ist positiv bei den Lösungen, deren Dichte grösser ist als die des Wassers; meist ist α kleiner, als 1; sodass also ϱ und r positiv sind; r ist dann kleiner als a. In

einigen wenigen Fällen ist α grösser als 1; dann sind ϱ und r negativ. Thomsen hat einige Beispiele beobachtet, in denen die Reste r negativ sind.

2) α ist negativ für Lösungen, deren Dichte unter der des Wassers liegt, z. B. bei NH^4OH; hier ist ϱ positiv und grösser als 1; daher r grösser als a. Für die Lösung von NH^4OH ist der Ausdruck:

$$\alpha + \beta - 1 \qquad \text{negativ.}$$

Nach den Beobachtungen von Thomsen hat man bei NH^4OH für $\alpha = -0{,}16285$; für $\beta = -2{,}08029$; $\alpha + \beta = -2{,}24$. Lässt man den Fall

$$aq = -(\alpha + \beta) = +2{,}24$$

ausser acht, so nehmen die Werthe von ϱ mit zunehmendem aq ab, wie aus den folgenden Berechnungen hervorgeht.

$$aq = 15, \quad \varrho = 1{,}20; \qquad aq = 30, \quad \varrho = 1{,}18,$$
$$aq = 50, \quad \varrho = 1{,}17; \qquad aq = \infty, \quad \varrho = 1{,}16.$$

Bekanntlich haben einige Beobachter gezweifelt, ob die Lösung von NH^4OH der Contraction unterworfen sei.

Die Versuche von Gerlach über Zuckerlösung mögen als Beispiel für die allmähliche Abnahme der Reste bis zu dem constanten Werthe dienen.

Tabelle 1.
Zuckerlösung. Versuche von Gerlach.

p	A	beob. Dichte	Reste
75	$6^1/_3$	1,383 342	215,64
50	19	1,232 748	214,48
25	57	1,105 995	210,88
10	171	1,010 404	210,13
5	361	1,019 686	209,95
4	456	1,015 691	209,91
3	$614^1/_3$	1,011 725	209,88
2	931	1,007 788	209,85
1	1881	1,003 880	209,82

Ausserdem findet man nach den correspondirenden Dichten bei $p = 10$ und 25 (vergleiche die oben nach diesen Dichten berechnete Formel) für $A = \infty$:

$$a\alpha = 132{,}378; \qquad r = 342 - a\alpha = 209{,}62.$$

Es muss noch bemerkt werden, dass die in der Tabelle gegebenen Dichten nicht etwa durch Interpolation oder aus einer kleinen Anzahl von Versuchen erhaltene Werthe sind; vielmehr sind sämmtliche Dichten, selbst für jedes Hundertel von p, die Resultate einer oder mehrerer Wägungen. Daher dürfte man hier auch mit Angabe von sechs Decimalen kaum zu weit gehen.

Uebrigens gibt es unter den Versuchen von Gerlach über eine Menge von Lösungen noch andere Körper, ausser dem Zucker, für welche die Interpolationsformel mit α und β bis zur vierten Decimale incl. übereinstimmende Werthe gibt. Man kann sich in folgender Weise eine Anschauung von dem „Rest" (bezeichnet mit ϱ oder r) bilden. In einer grossen Wassermasse (1000 oder mehrere 1000 l) sei ein Gramm irgend eines löslichen Körpers gelöst, oder besser noch ein Molecül, d. h. a Gramm; dann wird das Volumen des Wassers durch den Vorgang der Lösung eine kleine dauernde Veränderung erleiden, welche entweder in einer Zunahme oder in einer Abnahme besteht.

Diese Aenderung wird durch den Rest festgestellt.

2. Eigenthümlichkeiten der Zahlen $a\alpha = a - r$.

Zwei verschiedene Körper, z. B. NaBr und $MgCl^2$ oder BaN^2O^6 und $SrBr^2$, haben oft fast dieselbe Interpolationsformel:

$$d = 1 + \frac{a\alpha}{18(A + \lambda)}.$$

Daraus folgt also, dass bei gleichen A, A' die Lösungen dieser ähnlichen Körper dieselben Dichten haben werden. Für zwei ähnliche Körper sind die Werthe $a\alpha$ vollständig gleich.

Was die beiden Constanten λ anbetrifft (λ ist $= a/18 \cdot \beta$), so sind sie auch gleich, oder doch nur wenig verschieden; aber da diese Constanten eine geringere Bedeutung haben, so ist auf dieselbe in der Tabelle AB, welche acht je aus zwei Körpern bestehende Gruppen enthält, nicht besonders Rücksicht genommen.

Für die einzelnen Gruppen hat man resp.:

$$a\alpha = a'\alpha'.$$

Tabelle AB.

Nr. der Gruppe	Körper	a	α	$a\alpha$	$a\alpha$ Mittelwerth
1	$LiNO^3$	69	0,58110	40,10	40,65
	NaCl	58,5	0,70424	41,20	
2	$MgCl^2$	95	0,82556	78,43	78,47
	NaBr	103	0,76238	78,52	
3	KJ	166	0,72594	120,52	120,83
	$ZnCl^2$	136	0,89084	121,15	
4	$CdCl^2$	183	0,83959	153,65	152,38
	$MgBr^2$	184	0,82127	151,11	
5	$CaBr^2$	200	0,82454	164,91	166,22
	SrN^2O^6	211,6	0,79176	167,53	
6	BaN^2O^6	261	0,81094	211,65	211,37
	$SrBr^2$	247,6	0,85261	211,10	
7	$CdBr^2$	272	0,83462	227,02	226,93
	MgJ^2	278	0,81600	226,84	
8	SrJ^2	341,6	0,82945	283,44	283,85
	PbN^2O^6	331	0,85883	284,27	

Die Werthe α und $a\alpha$ dieser Tabelle sind nach Versuchen von Kremers berechnet; die folgende Tabelle enthält die beiden Versuche, welche für jeden Körper die Constante α gegeben haben; die Dichten d sind in gebräuchlicher Weise mit vier Decimalen wiedergegeben.

Tabelle 3.

Versuche von Kremers; Wasser = 100.

Nr. der Gruppe	Körper	Erster Körper der Gruppe		Zweiter Körper der Gruppe	
		p	d	p	d
1	$LiNO^3$	12,7	1,0689	6,84	1,0460
	NaCl	79,4	1,3194	36,11	1,2036

Nr. der Gruppe	Körper	Erster Körper der Gruppe		Zweiter Körper der Gruppe	
		p	*d*	*p*	*d*
2	$MgCl^2$	22,0	1,1592	31,74	1,2175
	NaBr	35,5	1,2388	71,36	1,4342
3	KJ	22,06	1,1494	16,7	1,1331
	$ZnCl^2$	143,88	1,7105	38,8	1,2714
4	$CdCl^2$	17,508	1,1402	12,2	1,0965
	$MgBr^2$	71,311	1,5000	88,6	1,5693
5	$CaBr^2$	17,65	1,1386	28,21	1,2027
	SrN^2O^6	77,04	1,5214	59,21	1,3862
6	BaN^2O^6	1,80	1,0145	16,15	1,1327
	$SrBr^2$	9,01	1,0707	98,13	1,6809
7	$CdBr^2$	33,048	1,2570	14,2	1,1121
	MgJ^2	92,616	1,6413	100,5	1,6623
8	SrJ^2	27,5	1,2160	11,10	1,0981
	PbN^2O^6	58,4	1,4329	59,02	1,4496

Von meiner ursprünglichen Absicht, in einer Spalte der Tabelle die Werthe für aq besonders zu geben, um einer möglichen Verwechslung vorzubeugen, weil aq in verschiedener Weise berechnet wird (bei Gerlach $aq = (100 - p)/p$; bei Kremers $aq = 100/p$), habe ich abgesehen; denn selbst wenn man ungewiss wäre, ob ein bestimmter Versuch von Gerlach oder von Kremers herrührt, würden die beiden verschiedenen Werthe von aq denselben Werth für α geben; man kann also diejenige Methode zur Berechnung wählen, welche am bequemsten erscheint.

Die Constante β differirt je nach den beiden verschiedenen Werthen von aq genau um eine Einheit; würde man eine Beobachtung von Kremers nehmen und die Berechnung nach den Beobachtungen von Gerlach durchführen, so würde man β um eine Einheit zu gross finden. Aus diesem grossen Unterschiede könnte man mit Bestimmtheit auf den Namen des wirklichen Beobachters schliessen.

Das sind die mathematischen Consequenzen der Formel

$$d = 1 + \frac{\alpha}{\alpha q + \beta},$$

und diese lassen gleichzeitig den physikalischen Charakter der beiden Constanten α und β hervortreten. Nach der Tabelle AB kann man sich über die Eigenthümlichkeiten der Zahlen $a\alpha$ klar werden.

Wir geben dafür ein Beispiel:

Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	$a\alpha$ Mittelwerth	Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	$a\alpha$ Mittelwerth
8	SrJ^2	283,85	7	MgJ^2	226,93
6	$SrBr^2$	211,37	4	$MgBr^2$	152,38
	$J^2 - Br^2 =$	72,48		$J^2 - Br^2 =$	74,55

Als das Resultat dieser Vergleichung ergibt sich die Beziehung:

$$R(J^2 - Br^2) = J^2 - Br^2 = \text{const.},$$

und zwar werden wir für die Constante vorläufig den Werth 73,80 annehmen.

Ein weiteres Beispiel ist:

Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	$a\alpha$ Mittelwerth	Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	$a\alpha$ Mittelwerth
4	$MgBr^2$	152,38	7	$CdBr^2$	226,93
2	$MgCl^2$	78,47	4	$CdCl^2$	152,38
	$Br^2 - Cl^2 =$	73,91		$Br^2 - Cl^2 =$	74,55

Die Gruppen 7 und 4 konnten zweimal zur Verwendung kommen; aus dieser Vergleichung folgt in evidenter Weise:

$$R(J^2 - Br^2) = R(Br^2 - Cl^2) = J^2 - Br^2 = Br^2 - Cl^2 = 73,80.$$

Allgemein findet man, wenn die Werthe für $a\alpha$ bei drei Körpern mit J, Br und Cl vergleichbar sind:

$$J^n - Br^n = Br^n - Cl^n = n \times 36,90.$$

Hierfür gibt Tabelle AB ein Beispiel, wenn $n = 1$ ist:

Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	$a\alpha$
2	NaBr	78,47
1	NaCl	40,65
	Br — Cl	= 37,82 (36,90)

Im allgemeinen kann man aus den Beobachtungen von Gerlach, Kremers und Thomsen über die Dichten der Lösungen von Körpern RX^1 und RX^2 die folgende Thatsache schliessen: (unter X^1, resp. X^2 hat man ein-, resp. zwei-

mal Cl, Br, J oder NO_3 zu verstehen; R in RX^1 ist H, Li, Na oder K; R in RX^2 ist ein Metall, wie Mg, Ca, Zn etc.)

Jedes Element (C, H, O, Cl, Br, J, N, S etc. und die Metalle) wird in der Grösse *aα* derjenigen Verbindung, in welche es eingetreten ist, durch eine gewisse constante Zahl repräsentirt. Diese Zahl ist einem jeden Element eigenthümlich, doch können zwei oder drei Elemente dieselbe Zahl haben.

Hierin hat man denn auch den Grund dafür zu suchen dass man unter den Werthen von *aα* gleiche Differenzen findet, wenn zwei Körper dasselbe Metall mit J^2 und Br^2, oder mit Br^2 und Cl^2 enthalten. Oben war schon ersichtlich, dass man verschiedene Schlüsse aus dem Vergleich von denselben zwei Gruppen ziehen kann, wenn man die eine jede Gruppe bildenden Körper variiren lässt.

Auf dieselbe Weise gelangt man zu noch weiteren Folgerungen, wie aus dem folgenden Beispiel hervorgeht.

Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	*aα*	Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	*aα*
8	PbN^2O^6	283,85	7	$CdBr^2$	226,93
6	BaN^2O^6	211,37	4	$MgBr^2$	152,38
	Pb — Ba =	72,48		Cd — Mg =	74,55

Somit existirt die Differenz 73,80 nicht nur für:

$$J^2 - B^2 = Br^2 - Cl^2,$$

sondern auch für:

$$Pb - Ba \text{ und } Cd - Mg.$$

Man ist gewöhnt, J, Br, Cl als eine zusammengehörige Gruppe von Körpern zu betrachten, und ist, wie man sich überzeugt hat, die Constante 36,90 für J — Br und Br — Cl gleich.

Ebenso können Ba, Sr, Ca als zu einer Gruppe von Metallen gehörig angesehen werden; und hier tritt dieselbe Erscheinung hervor; indessen ist die Constante eine andere.

Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	*aα*	Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	*aα*
6	BaN^2O^6	211,37	6	$SrBr^2$	211,37
5	SrN^2O^6	166,22	5	$CaBr^2$	166,22
	Ba — Sr =	45,15		Sr — Ca =	45,15

Somit hat man:

$$Ba - Sr = Sr - Ca = 45,15.$$

Aus den vorausstehenden Beobachtungen kann man ohne weiteres schliessen:

$$2SrX^2 = BaX^2 + CaX^2,$$

X^2 wird in den drei Verbindungen dieselbe Bedeutung haben müssen. Durch analoge Vergleichungen lässt sich der Werth von *aα* für einen Körper mit Hülfe der entsprechenden Werthe für zwei andere Körper verificiren. Weiter folgt noch aus den Gruppen 6 und 5:

$$SrBr^2 - SrN^2O^6 = Br^2 - N^2O^6 = 45{,}15.$$

Somit: $$Br - NO^3 = 22{,}57.$$

Danach lässt sich also der Werth von *aα* berechnen, welchen $NaNO^3$ haben würde, eine Verbindung, die in Tabelle AB nicht mit aufgeführt ist.

$$NaBr = 78{,}47;\ NaNO^3 = 78{,}47 - 22{,}57 = 55{,}90.$$

In betreff der Werthe *aα* kommt man zu dem Schluss:

$$2RBr = RJ + RCl$$

und ebenso: $$2RBr^2 = RJ^2 + RCl^2.$$

Für den letzten Fall gibt Tabelle AB ein Beispiel:

Gruppe	Ein Körper der Gruppe	*aα*	Gruppe	Ein Körper von jeder Gruppe	*aα*
4	$MgBr^2$	152,38	7	MgJ^2	226,93
	2*aα*	= 304,76	2	$MgCl^2$	78,47
				Summe	305,40

Die Grenzen dieser Abhandlung gestatten eine allzugrosse Anhäufung von Beispielen nicht; man sieht schon, dass sich mit Leichtigkeit eine Tabelle wie AB herstellen lässt. Körper, welche eine Gruppe bilden, lassen sich voraussehen, und ebenso werden dort neue Gruppen eingeschoben werden können, wie z. B.:

HBr	LiBr	HJ	$BaCl^2$
$NaNO^3$	KNO^3	$CaCl^2$	CdN^2O^6

und zu der Gruppe 3 (KJ . . . $ZnCl^2$) könnte man CaN^2O^6, ferner zu der Gruppe 4 ($CdCl^2$ . . . $MgBr^2$) die Verbindung ZnN^2O^6 zufügen. Nur fehlen bis jetzt noch für mehr Körper die nöthigen experimentellen Daten. Ich gestatte mir hier die Bemerkung, dass man bei der Berechnung der Werthe von *aα* nicht unterschiedslos von den Dichtebestimmungen von Lösungen, wie sie sich in wissenschaftlichen Journalen

finden, Gebrauch machen darf; denn allen Beobachtungen kann man nicht den Grad der Genauigkeit zuschreiben, wie denjenigen von Gerlach, Kremers und Thomsen; es dürfte daher zuweilen nothwendig sein, die Resultate verschiedener Beobachter für denselben Körper vergleichen zu können.

Die Tabelle AB enthält die Werthe von $a\alpha$ für sechzehn Körper. Natürlich könnte man unter der Voraussetzung, dass eine genügende Anzahl ähnlicher Werthe zur Verfügung stände, die jedem Element eigenthümlichen Zahlen finden. Vergleicht man nämlich die Werthe für $a\alpha$, so beobachtet man ähnliche Beziehungen, wie die folgenden:

$$\mathrm{Mg} = \mathrm{K},\ \mathrm{Na} = \mathrm{Cl}\ \text{etc.}$$

Aus der Vergleichung zweier Körper der Tabelle findet sich für J: $\mathrm{J} = \mathrm{MgJ^2} - \mathrm{KJ}$,
J gibt wieder Br und Cl:

$$\mathrm{Br} = \mathrm{J} - 36{,}90; \quad \mathrm{Cl} = \mathrm{J} - 73{,}80.$$

Gleichzeitig wird man zu der Ueberzeugung kommen, dass man zu einem jeden Werth von $a\alpha$ der Tabelle (und der anderen Körper RX^1 und RX^2) einen bestimmten constanten Betrag zufügen muss, dessen Grösse man feststellen kann.

Ueberblicken wir noch einmal die Beobachtungen von Gerlach über Zuckerlösungen, so ergibt sich uns leicht der Nachweis der folgenden Thatsachen.

1) Alle Differenzen der Werthe von $a\alpha$ in der Tabelle AB sind Multipla von $7{,}38 = 6 \,.\, 1{,}23$.

2) Allen Werthen von $a\alpha$ muss man die Constante $18M$ zufügen; für die Körper der Tabelle AB und für alle Körper RX^1 und RX^2 ist $M = 1$.

3) Ist $a\alpha$ für einen Körper mit einem genügenden Grad von Genauigkeit bestimmt, so erhält man für die Verbindungen RX^1 und RX^2 aus der Formel:

$$B = \frac{a\alpha + 18}{7{,}38}$$

Werthe, welche sich irgend einer ganzen Zahl so sehr nähern, dass diese ganze Zahl (B) selbst nicht zweifelhaft ist.

Die obige Formel:

$$d = 1 + \frac{a\alpha}{18(A + \lambda)}$$

kann in einfacher Weise auf die Form:

$$d = \frac{18A + (a\alpha + 18\lambda)}{18(A + \lambda)}$$

gebracht werden. Man muss also $18.\lambda$ den Werthen von $a\alpha$ zufügen; λ (welches an Stelle von M tritt) ist $= 1$ für alle Körper der Tabelle AB. Die folgende Tabelle enthält die Werthe von B für die mittleren der acht Gruppen der Tabelle AB, berechnet nach der Formel:

$$B = \frac{a\alpha + 18}{6 \times 1.23}.$$

Gleichzeitig ist der Werth der Constante 1,23 beigefügt, der mit γ bezeichnet ist. Dieser constante Coëfficient von B bei Lösungen ist nach der Formel:

$$\gamma = \frac{a\alpha + 18}{6B}$$

berechnet, wobei für B die als die richtige angenommene ganze Zahl gesetzt ist.

Tabelle BB.

Gruppe	$a\alpha$ Mittelwerth	B nach der Formel	B richtiger Werth	Werth von γ
1	40,65	7,95	8	1,222
2	78,47	13,07	13	1,237
3	120,83	18,81	19	1,218
4	152,38	23,09	23	1,235
5	166,22	24,96	25	1,228
6	211,37	31,08	31	1,232
7	226,93	33,19	33	1,237
8	283,85	40,90	41	1,227

Mit Hülfe der Werthe für B und der Tabelle BB und anderer analoger Werthe für Verbindungen RX^1 und RX^2 sind bestimmte Zahlen B (Densitätszahlen) [1]) für jedes in der Tabelle AB erwähntes Element berechnet und in der folgenden Tabelle zusammen gestellt worden.

1) Die Bezeichnung „Densitätszahlen" für eine bestimmte Eigenthümlichkeit der Elemente wird zum ersten mal in einer kleinen Broschüre des Verfassers angewandt. (Ein neues Gesetz, analog dem Gesetz von Avogadro von J. A. Groshans, Deutsch v. Fr. Roth, Leipz., J. A, Barth, 1882.)

Tabelle 5.

Körper	B	Körper	B	Körper	B
O	1	Ca	7	Cd	15
Li	2	Br	9	Ba	19
N	3	Zn	11	Pb	29
Na = Cl	4	Sr	13	—	—
K = Mg	5	J	14	—	—

Dieser Tabelle ist unter Anwendung der erhaltenen Formeln auf Zucker zuzufügen $C = 1$ und $H = 1$, folglich für jede Verbindung $C^pH^qO^r$:

$$B = p + q + r$$

und speciell für Wasser H^2O:

$$B = 2 + 1 = 3,$$

demnach für A Wassermolecüle:

$$B = 3A.$$

Die Elemente gehen also in $a\alpha$ ein mit der Zahl $6 \times 1{,}23\,B$ und die Unterschiede für zwei Werthe von $a\alpha$ (der Tabelle AB) können durch:

$$\text{Diff.} = 6 \times 1{,}23\,(B - B')$$

ausgedrückt werden, in welcher Formel B und B' die Densitätszahlen der beiden Elemente sind, welche in die Verbindung der beiden Vergleichskörper eingehen.

Aus der Formel:

$$d = \frac{18\,A + (a\alpha + 18\,\lambda)}{18\,(A + \lambda)}$$

folgt weiter der Satz:

Die Dichten der Lösungen sind proportional: direct den Summen $B + B'$ der Wassermolecüle ($3A$) und des gelösten Körpers $= B'$; dieser letztere enthält den Coëfficienten $\gamma = 1{,}23$, sodass also die Dichten direct proportional sein werden:

$$3A + B\gamma;$$

indirect der Anzahl A der Wassermolecüle; dieses A ist um eine bestimmte ganze Zahl vermehrt, welche je nach der Natur des gelösten Körpers verschieden ist; diese ganze Zahl wird durch M ersetzt werden.

Es enthält nämlich die vorausgehende Formel für die Dichten einen nunmehr unnöthig gewordenen Factor, 18. das Moleculargewicht des Wassers.

Man kann also Zähler und Nenner durch 18 dividiren, und wird der Bruch alsdann:

$$d = \frac{A + \frac{a\alpha + 18\lambda}{18}}{A + \lambda}.$$

Der Zähler soll die Summen der Densitätszahlen $3A + B\gamma$ ausdrücken, und hat man denselben daher mit 3 zu multipliciren, da:

$$\frac{a\alpha + 18\lambda}{18} = \frac{B\gamma}{3} \text{ ist.}$$

Ebenso muss man dann aber auch den Nenner mit 3 multipliciren; doch hat die Zahl 3 des Nenners eine ganz andere Bedeutung, als die des Zählers, und zwar die folgende. Für reines Wasser H^2O ist nach Uebereinkunft $d = 1$. Hieraus, da Wasser aus 2H und O besteht:

$$d = \frac{3A}{3(A + M)} = 1.$$

$$A \text{ ist } = 1, \quad M = 0.$$

Somit kommt die Zahl 3 in dem Nenner des Bruches von der conventionellen Dichte des Wassers 1 und der Zahl seiner Atome $B = 3$.

Da ferner Division durch 18 und Multiplication mit 3 gleichbedeutend ist einer Division durch 6, so erhält man für jede Lösung die Formel:

$$d = \frac{3A + \frac{a\alpha}{6} + 3\lambda}{3(A + \lambda)} = 1 + \frac{\frac{a\alpha}{6}}{3(A + \lambda)},$$

in welcher:

$$\frac{a\alpha}{6} = B\gamma - 3\lambda \text{ ist.}$$

Hier ist λ, das im Nenner eine empirische Constante bezeichnet, durch M zu ersetzen, welches in:

$$\frac{a\alpha}{6} = B\gamma - 3M$$

eine ganze Zahl bezeichnet. Dieselbe nimmt für die Verbindungen RX^1 und RX^2 den Werth 1 an. Macht man:

$$\frac{a\alpha}{6} = B\gamma - 3M = \mu,$$

so erhält man eine für die Berechnung bequeme Formel:

$$d = 1 + \frac{\mu}{3(A + \lambda)},$$

in welcher: $3(A + \lambda)(d - 1) = \mu$.

Für $A = \infty$ hat man einfach:

$$3A(d - 1) = \mu.$$

Die Formel: $d = 1 + \frac{\mu}{3(A + \lambda)}$

gibt dieselben Dichten, wie die zu Anfang erwähnte:

$$d = 1 + \frac{\alpha}{aq + \beta}, \qquad \mu = 3\frac{a}{18}\alpha; \qquad \lambda = \frac{a}{18}\beta.$$

Wendet man die Formel mit μ auf Zucker an, so hat man:

$$\mu = \frac{a\alpha}{6} = \frac{132{,}378}{6} = 22{,}063.$$

Aus der Formel des Zuckers $C^{12}H^{22}O^{11}$ ergibt sich zur Berechnung von M:

$$B = 45, \quad B\gamma = 1{,}23, \quad B = 55{,}35, \quad B\gamma - 3M = 22{,}063,$$

$$M = \frac{55{,}35 - 22{,}063}{3} = 11{,}09.$$

M ist also $= 11$, als wenn der Zucker die Formel $C^{12} + 11 H^2O$ hätte. Dem Werth $M = 11$ entspricht $\gamma = 1{,}232$.

In betreff des Werthes von M für die löslichen Körper im allgemeinen wird man auf weitere Beobachtungsresultate warten müssen. In:

$$d = 1 + \frac{\mu}{3(A + \lambda)},$$

enthält die Constante $\mu = B\gamma - 3M$ die Constante γ (ungefähr 1,23), und M steckt (negativ) in μ als eine ganze Zahl. Die Constante λ der Formel lässt sich als die Repräsentantin der ganzen Zahl M ansehen, die aber durch die Versuchsbedingungen geändert worden ist; die Natur und das Maass dieser Aenderungen harrt jedoch noch der Erklärung. Vergleicht man schliesslich die beiden Formeln:

$$d = 1 + \frac{B\gamma - 3M}{3(A + M)} \text{ und } d = 1 + \frac{a - r}{18A + r}$$

miteinander, so sieht man, dass für $A = \infty$

$$r = a + 18M - 6B\gamma \text{ ist.}$$

Man kann also M bestimmen, wenn man B kennt und umgekehrt. Wäre weder B noch M bekannt, so könnte man

doch in vielen Fällen feststellen, dass eine Reihe von Körpern denselben Werth für M hat.

Z. B. für NH^4OH findet man nach Beobachtungen von Thomsen $M = 4$; für N^2H^8O würde $M = 7$ sein.

M ist $= 3^1/_2$ für AmCl, AmBr und AmJ; da aber M immer eine ganze Zahl sein soll, so müsste man die Formeln verdoppeln und würde dann für die folgenden Körper mit ähnlichen Formeln $M = 7$ sein:

$(NH^4)^2O$, $(NH^4)^2Cl^2$, $(NH^4)^2Br^2$, $(NH^4)^2J^2$, denen noch $(NH^4)^2N^2O^6$ zugefügt werden kann. Für die Werthe von $a\alpha$ findet man für AmJ, AmBr, AmCl: J — Br = Br — Cl = 36,90, woraus folgt, dass die genannten Körper dasselbe M haben.

Haag, im Juni 1883.

Anhang. Die folgenden Tabellen enthalten eine Zusammenfassung der Eigenschaften der Lösungen von Verbindungen RX^1 und RX^2 nach Beobachtungen von Gerlach, Kremers und Thomsen.

Die beiden ersten Tabellen geben die Zahlen μ ($= a\alpha/6$) von 16 Körpern RX^1 und von 22 Körpern RX^2.

Zur Erleichterung der allgemeinen Uebersicht kommen die 16 Körper der Tabelle AB nochmals in der Tabelle vor, für μ ist $^1/_6$ des Mittelwerthes der beiden $a\alpha$ der Gruppe genommen worden.

Die beiden letzten Tabellen geben (für jeden Körper) die Details zweier Versuche, die zur Berechnung von μ gedient haben; indessen nur für die nicht in der Tabelle AB erwähnten Körper.

B und γ sind berechnet nach den Formeln:

$$B = \frac{\mu + 3}{1,23} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{\mu + 3}{B}.$$

Man sieht, dass die Zahlen μ dieselbe Eigenschaft zeigen, wie die $a\alpha$; nur betragen sie stets, wie schon erwähnt, den sechsten Theil. So ist:

J — Br = Br — Cl = 6,15; Ba — Sr = Sr — Ca = 7,38;

$2RBr^n = RJ^n + RCl^n$ und $2SrX^2 = BaX^2 + CaX^2$ und so fort.

Nur lassen hier die kleiner gewordenen Werthe die Densitätszahl leichter erkennen; denn 6,15 ist 5.1,23, und die Densitätszahlen von J, Br, Cl = 14, 9, 4 haben die constante Differenz 5; 7,38 ist 6.1,23, und die Densitätszahlen von Ba, Sr, Ca sind, resp. 19, 13 und 7 mit der constanten Differenz 6. Man darf wohl behaupten, dass die Versuche über Lösungen zu einem Resultate geführt haben, welches die Beobachter selbst nicht voraussehen konnten; ein jeder von ihnen hatte ein besonderes Ziel vor Augen und richtete je nach diesem Ziele die Versuchsbedingungen ein. Die letzteren sind daher nicht immer geeignet, um mit Genauigkeit die Densitätszahlen der löslichen Körper erkennen zu lassen.

Hoffentlich wird man bald, wenn die Wissenschaft diese Densitätszahlen aufgenommen hat, welche nach den vorhandenen Daten bestimmt sind, dieselben verificiren und die noch vorhandenen Lücken ausfüllen können.

Tabelle 1.

Körper RX^1.

	a	μ	$B = \frac{\mu + 8}{1,23}$	Angen. Werthe für B	Constante γ
HCl	36,5	3,07	4,93	5	1,21
HBr	81	9,39	10,07	10	1,23
HJ	128	15,11	14,72	15	1,21
HNO^3	63	5,68	7,05	7	1,24
LiCl	42,5	4,06	5,74	6	1,18
LiBr	87	9,89	10,48	11	1,17
LiJ	134	16,36	15,74	16	1,21
$LiNO^3$	69	6,78	7,95	8	1,22
NaCl	58,5	6,78	7,95	8	1,22
NaBr	103	13,08	13,07	13	1,24
NaJ	150	19,11	17,98	18	1,23
$NaNO^3$	85	9,42	10,10	10	1,24
KCl	76,5	7,77	8,76	9	1,20
KBr	119	13,97	13,80	14	1,21
KJ	166	20,14	18,81	19	1,22
KNO^3	101	10,40	10,89	11	1,22

Die Daten für HCl und HNO^3 sind von Thomsen, für HBr und HJ von Topsoë; alle übrigen von Kremers.

Tabelle 2.

Körper RX^2.

	μ	B aus μ	B Angenomm. Werth	γ
$MgCl^2$	13,08	13,07	13	1,24
$MgBr^2$	25,40	23,09	23	1,23
MgJ^2	37,82	33,19	33	1,24
$CaCl^2$	15,42	14,97	15	1,23
$CaBr^2$	27,77	24,96	25	1,23
CaJ^2	39,58	34,62	35	1,22
$ZnCl^2$	20,14	18,81	19	1,22
$ZnBr^2$	32,84	29,14	29	1,24
ZnJ^2	44,99	39,01	39	1,23
$SrCl^2$	22,92	21,07	21	1,23
$SrBr^2$	35,23	31,08	31	1,23
SrJ^2	47,31	40,90	41	1,23
SrN^2O^6	27,77	24,96	25	1,23
$CdCl^2$	25,40	23,09	23	1,23
$CdBr^2$	37,82	33,19	33	1,24
CdJ^2	50,06	43,14	43	1,23
$BaCl^2$	30,37	27,13	27	1,24
$BaBr^2$	41,27	36,00	37	1,20
BaJ^2	54,84	47,02	47	1,23
BaN^2O^6	35,23	31,08	31	1,23
$SnCl^2$	23,99	21,95	22	1,23
PbN^2O^6	47,31	40,90	41	1,23

Das Bariumbromid $BaBr^2$ weicht fast allein durch einen zu kleinen Werth von μ ab; man wird in Betreff desselben auf das Resultat neuer Versuche warten müssen.

Alle Werthe von μ folgen aus Versuchen von Kremers, mit Ausnahme der Zahlen für $CaCl^2$, $SrCl^3$ und $SnCl^2$, welche Beobachtungen von Gerlach entlehnt sind.

Tabelle 3.

Verzeichniss der beiden Experimente, aus welchen die Zahlen μ berechnet sind; für die Körper RX^1.

	Erstes Experiment		Zweites Experiment	
	p	*d*	*p*	*d*
HCl	100 A	1,0100	10 A	1,0832
HBr	7,67	1,0550	33,84	1,3020
HJ	7,019	1,0524	57,74	1,7080
HNO^3	100 A	1,0185	10 A	1,1542
LiCl	5,04	1,0278	60,26	1,2862
LiBr	18,3	1,1173	110,2	1,5424
LiJ	23,4	1,1611	142,1	1,7495
NaJ	24,5	1,1752	149,7	1,8047
$NaNO^3$	13,71	1,0844	86,05	1,3805
KCl	6,36	1,0382	33,57	1,1720
KBr	11,22	1,0755	65,29	1,3618
KNO^3	5,12	1,0307	27,37	1,1457

Tabelle 4.

Verzeichniss der beiden Experimente, aus welchen die Zahlen μ berechnet sind; für die Körper RX^2.

	Erstes Experiment		Zweites Experiment	
	p	*d*	*p*	*d*
$CaCl^2$	5	1,04259	25	1,23365
CaJ^2	24,3	1,1854	106,6	1,6845
$ZnBr^2$	42,6	1,3270	150,3	1,8797
ZnJ^2	21,5	1,1715	232	2,1853
$SrCl^2$	15	1,14387	25	1,25806
CdJ^2	21,4	1,1681	88,5	1,6139
$BaCl^2$	8,88	1,0760	35,44	1,2837
$BaBr^2$	31,928	1,2490	96,23	1,6639
BaJ^2	27,0	1,2157	146,0	1,9535
$SnCl^2$	20	1,1442	50	1,4451

Für $CaCl^2$ und $SrCl^2$ (nach Gerlach) hat d fünf Decimalen; bei $SnCl^2$ (Gerlach) bezieht sich p auf das krystallisirte Salz, $SnCl^2 + 2H^2O$; der Werth von μ ist für ein wasserfreies Salz derselbe, wie für ein krystallisirtes, während die Constante λ für jedes im Krystall enthaltene Molecül H_2O um eine Einheit wächst.

Für ZnJ^2 ist die Dichte bei $p = 232$ (Wasser = 100) 2,1853.

IX. *Messung der von einer Zamboni'schen Säule gelieferten Electricitätsmenge; von Eduard Riecke.*

(Aus den Gött. Nachr. vom 6. Juni 1883 mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

---

1. Die folgenden Beobachtungen beziehen sich auf drei Zamboni'sche Säulen, welche durch die Zahlen I, II, III unterschieden werden sollen; die Säule I ist eingeschlossen in einer Glasröhre, deren äusserer Durchmesser 27 mm beträgt; die Länge der Säule ist 150 mm. Die Anzahl der Platten 1960, der Durchmesser der von der Glasröhre eng umschlossenen Platten gleich 21,5 mm. Die Säule II besteht aus 980 Platten von derselben Beschaffenheit, ihre Länge beträgt 75 mm. Die Säule III besitzt eine Länge von 165 mm, der Durchmesser der Platten beträgt 32 mm; dieselben sind aufgeschichtet zwischen vier gespannten Seidenschnüren und umschlossen von einer weiteren Glasröhre, deren äusserer Durchmesser gleich 59 mm ist.

Zur Messung der von diesen Säulen gelieferten Electricitätsmenge diente ein Galvanometer mit astatischem Nadelpaar; die Schwingungsdauer des letzteren betrug 55,69 Sec., das Dämpfungsverhältniss 1,075, vorausgesetzt, dass die Enden des Multiplicators nicht metallisch mit einander verbunden waren. Die Anzahl der Windungen des Multiplicators betrug 24826, die Dicke des umsponnenen Drahtes 0,124 mm. Der Schliessungskreis bestand: 1) aus der zu untersuchenden

Zamboni'schen Säule; 2) aus dem Galvanometer; 3) aus einem Gauss'schen Commutator, dessen Metalltheile durch Paraffin, sowie durch gefirnisste Glasstäbe voneinander isolirt waren; 4) aus zwei möglichst isolirten Quecksilbernäpfen von Hartgummi, deren einer mit der Säule, der andere mit dem Commutator verbunden war; 5) aus verschiedenartigen diese beiden Näpfe miteinander verbindenden Körpern. Die Ruhelage des astatischen Paares wurde bestimmt, indem von 15 zu 15 Secunden der Stand des Fadenkreuzes an der Scala abgelesen und aus je zwei durch die Zeit von einer Minute voneinander getrennten Beobachtungen der Ruhestand mit Rücksicht auf das Dämpfungsverhältniss berechnet wurde. Genau genommen hätte die Zeit zwischen je zwei zur Bestimmung der Ruhelage dienenden Ablesungen nur 56 Sec. betragen dürfen; indess zeigten die in der angegebenen Weise aus den verschiedenen Beobachtungen berechneten Werthe der Einstellungen eine vollkommen genügende Uebereinstimmung. Die beiden Stellungen des Commutators, welchen eine entgegengesetzte Stromrichtung im Multiplicator entspricht, sind im Folgenden bezeichnet durch $\parallel$ und $\times$, diejenige Stellung desselben, bei welcher die Verbindung mit dem Multiplicator unterbrochen ist, durch 0.

II. Die ersten Beobachtungsreihen wurden angestellt mit der Säule I; die Resultate derselben sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Dabei enthält die erste Columne die Zeit, für welche die Einstellungen des Nadelpaares gelten, in Minuten; die folgenden Columnen enthalten die Resultate von je drei Beobachtungssätzen, von welchen der erste und letzte bei paralleler, der zweite bei gekreuzter Stellung des Commutators ausgeführt ist. Die erste Columne jedes einzelnen Satzes enthält die Stellung des Commutators, die zweite die Art und Weise der Verbindung der Quecksilbernäpfe, die dritte die beobachteten Einstellungen des astatischen Paares in Scalentheilen.

I. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 28. Juni 1882. Temperatur 24,4°.
Relative Feuchtigkeit 54 %.

Zeit in Min.	Stellung des Comm.	Verbind. der Näpfe	Einstell. d. Nadelp.	Stellung des Comm.	Verbind. der Näpfe	Einstell. d. Nadelp.	Stellung des Comm.	Verbind. der Näpfe	Einstell.
0	0	Unterbr.	176,62	0	Unterbr.	181,88	0	Unterbr.	18
2	‖	Unterbr.	177,50	×	Unterbr.	182,27	‖	Unterbr.	18
4	‖	Cu Draht	200,69	×	Cu Draht	161,89	‖	Cu Draht	20
6	‖	Unterbr.	179,11	×	Unterbr.	182,94	‖	Unterbr.	18
8	‖	Cu Draht	201,28	×	Cu Draht	162,90	‖	Cu Draht	20
10	‖	Unterbr.	181,28	×	Unterbr.	183,28	‖	Uuterbr.	18
12	0	Unterbr.	181,88	0	Unterbr.	184,27	0	Unterbr.	18

II. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 29. Juni 1882. Temperatur 21,2°.
Relative Feuchtigkeit 68,5 %.

0	0	Unterbr.	189,76	0	Unterbr.	191,78	0	Unterbr.	19
2	‖	Unterbr.	190,14	×	Unterbr.	191,48	‖	Unterbr.	19
4	‖	Alkohol	209,18	×	Alkohol	174,14	‖	Alkohol	20
6	‖	Draht	207,21	×	Draht	175,61	‖	Draht	20
8	‖	Alkohol	206,62	×	Alkohol	175,69	‖	Alkohol	20
10	‖	Unterbr.	191,75	×	Unterbr.	189,78	‖	Unterbr.	19
12	0	Unterbr.	191,78	0	Unterbr.	190,71	0	Unterbr.	19

III. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 28. Juni 1882. Temperatur 21,3°.
Relative Feuchtigkeit 62 %.

0	0	Unterbr.	185,28	0	Unterbr.	187,30	0	Unterbr.	18
2	‖	Unterbr.	185,54	×	Unterbr.	186,93	‖	Unterbr.	18
4	‖	Terpentin	189,14	×	Terpentin	184,11	‖	Terpentin	18
6	‖	Draht	204,89	×	Draht	168,31	‖	Draht	20
8	‖	Terpentin	189,76	×	Terpentin	184,11	‖	Terpentin	18
10	‖	Unterbr.	187,27	×	Unterbr.	186,18	‖	Unterbr.	18
12	0	Unterbr.	187,30	0	Unterbr.	186,25	0	Unterbr.	18

Alkohol und Terpentinöl befanden sich dabei in U-förmig gebogenen Glasröhren, welche durch Siegellackstützen isolirt waren. Die Zuleitung der Electricitäten wurde durch Platinelectroden vermittelt.

IV. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 27. Juni 1882. Temperatur 23,8°. Relative Feuchtigkeit 55%.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.
0	Unterbrochen . . .	0	171,95	0	175,12	0	178,32
2	Unterbrochen . . .	‖	172,09	×	175,09	‖	178,65
4	zwei voneinander isolirte Drähte .	‖	172,58	×	175,21	‖	178,85
6	Geissler'sche Röhre	‖	173,76	×	174,83	‖	178,85
8	zwei voneinander isolirte Drähte .	‖	173,47	×	174,60	‖	178,87
10	Unterbrochen . . .	‖	174,03	×	174,55	‖	178,93
12	Unterbrochen . . .	0	175,12	0	174,62	0	179,15

Bei diesem Beobachtungssatze wurden vor der Einschaltung der Geissler'schen Röhre die beiden zu den Electroden derselben führenden Drähte für sich isolirt in die Quecksilbernäpfe eingesetzt, um zu prüfen, ob ein Electricitätsverlust nicht schon hierdurch bewirkt wird. Die Vergleichung der in der Tabelle enthaltenen Zahlen zeigt, dass dies nicht der Fall war.

Die in den Tabellen enthaltenen Beobachtungsdaten mögen zunächst benutzt werden zur Prüfung der Isolation der beiden Quecksilbernäpfe; es ergibt sich eine solche Prüfung, wenn aus den bei unterbrochener Verbindung der Näpfe beobachteten Einstellungen die Ausschläge für die parallele und gekreuzte Stellung des Commutators berechnet werden. Bezeichnen wir diese Ausschläge durch ‖ — 0 und 0 — ×, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung.

Tag der Beobachtung	Relative Feuchtigk.	Temp.	‖ — 0	0 — ×	‖ — 0	Mittel
26. Juni 1882	54%	24,4°	0,09	0,24	0,07	0,13
27. Juni 1882	55	23,8	—0,34	0,05	0,06	—0,08
28. Juni 1882	62	21,3	0,11	0,22	0,22	0,18
29. Juni 1882	65	21,2	0,19	0,61	0,13	0,31

Bei der letzten Beobachtung dürfte die Isolation der Quecksilbernäpfe keine ganz vollständige mehr gewesen sein, eine Vermuthung, welche namentlich dadurch wahrscheinlich gemacht wird, dass am folgenden Tage bei einer relativen Feuchtigkeit von 70%, einer Temperatur von 21° der Ausschlag ‖ — 0, beziehungsweise 0 — × im Mittel zu 3,09 Scalentheilen sich ergab; für die späteren Beobachtungen wurde daher die seitherige Isolation durch eine wirksamere ersetzt.

Die Scalenausschläge, welche sich ergaben, wenn die Pole der Zamboni'schen Säule metallisch mit den Enden des Multiplicators verbunden waren, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tag der Beobachtung	Relative Feuchtigk.	Temp.	‖ — 0	0 — ×	‖ — 0	Mittel
26. Juni 1882	54%	24,4°	21,88	20,97	21,01	21,01
28. Juni 1882	62	21,3	18,60	18,46	17,81	18,29
29. Juni 1882	63,5	21,2	16,46	15,63	15,08	15,72

Endlich ergeben sich bei der Einschaltung verschiedenartiger Widerstände zwischen die beiden Quecksilbernäpfe die folgenden Ausschläge in Scalentheilen.

Tag der Beobachtung	Art der Einschaltung	Relat. Feuchtigk.	Temp.	‖ — 0	0 — ×	‖ — 0	Mittel
29. Juni 1882	Säule von absolutem Alkohol	63,5%	21,2	17,15	16,33	15,24	16,24
28. Juni 1882	Säule von Terpentinöl	62	21,3	3,16	2,66	2,24	2,69
27. Juni 1882	Geissler'sche Röhre .	55	23,8	0,23	0,04	0,12	0,13

III. Eine zweite Reihe von Beobachtungen bezog sich auf die Säule II, die Resultate derselben sind in den folgenden Tabellen enthalten.

V. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 4. Juli 1882. Temperatur 22,0°.
Relative Feuchtigkeit 64 %.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.
0	Unterbrochen . . .	0	228,36	0	230,81	0	230,16
2	Unterbrochen . . .	‖	229,12	×	229,68	‖	231,00
4	Alkoholsäule . . .	‖	240,38	×	219,78	‖	241,20
6	Cu-Draht	‖	239,48	×	220,58	‖	241,36
8	Alkoholsäule . . .	‖	339,88	×	220,82	‖	241,50
10	Unterbrochen . . .	‖	230,96	×	229,00	‖	233,17
12	Unterbrochen . . .	0	230,81	0	230,16	0	232,58

VI. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 5. Juli 1882. Temperatur 23,1°.
Relative Feuchtigkeit 57%.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.	Stellung des Comm.	Einstell. des Nadelp.
0	Unterbrochen . . .	0	219,11	0	222,34	0	223,12
2	Unterbrochen . . .	‖	219,43	×	222,57	‖	223,50
4	Terpentinölsäule .	‖	223,19	×	221,06	‖	224,74
6	Cu-Draht	‖	233,49	×	210,03	‖	235,89
8	Terpentinölsäule . .	‖	223,61	×	221,29	‖	224,24
10	Unterbrochen . . .	‖	222,15	×	222,57	‖	223,24
12	Unterbrochen . . .	0	222,34	0	223,12	0	223,18

Zur Prüfung der Isolation sind zunächst wieder die Ausschläge berechnet, welche der parallelen und gekreuzten Stellung des Commutators bei den verschiedenen Beobachtungssätzen entsprechen.

Tag der Beobachtung	Relative Feuchtigk.	Temp.	‖ — 0	0 — ×	‖ — 0	Mittel
4. Juli 1882	64%	22,0°	0,46	1,14	0,71	0,77
5. Juli 1882	57	23,1	0,07	0,16	0,22	0,15

Hiernach war bei den Beobachtungen vom 4. Juli eine vollständige Isolation nicht erzielt, obwohl die frühere, bei der höheren Feuchtigkeit unwirksame Isolation durch eine sehr viel bessere ersetzt war.

Die bei directer metallischer Verbindung der Pole der Säule sich ergebenden Ausschläge sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tag der Beobachtung	Relative Feuchtigk.	Temp.	‖ — 0	0 — ×	‖ — 0	Mittel
4. Juli 1882	64 %	22,0°	10,26	9,90	9,99	10,05
5. Juli 1882	57	23,1	12,77	12,70	12,44	12,64

Die Ausschläge bei Einschaltung von Widerständen zwischen den beiden Quecksilbernäpfen sind folgende.

Tag der Beobachtung	Art der Einschaltung	Relat. Feucht.	Temp.	‖ — 0	0 — ×	‖ — 0	Mittel
4. Juli 1882	Säule v. absol. Alkohol	64 %	22,0°	10,55	10,18	9,98	10,24
5. Juli 1882	Terpentinölsäule	57	23,1	2,68	1,56	1,34	1,86

IV. Eine dritte Reihe von Beobachtungen war bestimmt zu der Vergleichung der von den drei verschiedenen Säulen gelieferten Electricitätsmengen.

VII. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 6. Juli 1882. Relative Feuchtigkeit 62 %. Temperatur 23°.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Säule I	Säule II	Säule III
0	Unterbrochen	0	223,57	220,07	216,51
2	Unterbrochen	‖	223,83	220,58	216,97
4	Terpentinölsäule . . .	‖	218,09	223,35	218,96
6	Cu-Draht	‖	203,36	234,78	228,59
8	Terpentinölsäule . . .	‖	220,37	223,82	219,06
10	Unterbrochen	‖	224,81	222,71	218,37
12	Unterbrochen	0	225,20	222,90	219,98

VIII. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 7. Juli 1882. Relative Feuchtigkeit 66 %. Temperatur 21,6°.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Säule I	Säule II	Säule III
0	Unterbrochen	0	219,67	221,02	221,17
2	Unterbrochen	×	219,88	220,39	221,22
4	Terpentinölsäule . . .	×	224,56	221,77	219,29
6	Cu-Draht	×	238,49	232,70	213,82
8	Terpentinölsäule . . .	×	224,31	222,19	219,61
10	Unterbrochen	×	221,38	221,43	220,86
12	Unterbrochen	0	221,36	221,82	221,13

IX. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 10. Juli 1882. Relative Feuchtigkeit 60 %.
Temperatur 20,6°.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Säule I	Säule II	Säule III
0	Unterbrochen	0	—	185,04	181,27
2	Unterbrochen	‖	—	186,17	181,58
4	Terpentinölsäule . . .	‖	—	185,61	182,84
6	Cu-Draht	‖	—	176,65	188,61
8	Terpentinölsäule . . .	‖	—	186,61	183,76
10	Unterbrochen	‖	—	188,39	183,85
12	Unterbrochen	0	—	189,17	183,97

X. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 11. Juli 1882. Relative Feuchtigkeit 63 %.
Temperatur 21°.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Säule I	Säule II	Säule III
0	Unterbrochen	0	209,95	208,73	—
2	Unterbrochen	‖	210,24	208,56	—
4	Terpentinölsäule . . .	‖	208,14	207,16	—
6	Cu-Draht	‖	193,45	197,50	—
8	Terpentinölsäule . . .	‖	208,33	207,68	—
10	Unterbrochen	‖	210,47	209,12	—
12	Unterbrochen	0	210,86	209,34	—

XI. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 12. Juli 1882. Relative Feuchtigkeit 67 %.
Temperatur 21,1°.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Säule I	Säule II	Säule III
0	Unterbrochen	0	232,35	—	230,88
2	Unterbrochen	‖	232,60	—	231,26
4	Terpentinölsäule . . .	‖	229,05	—	232,73
6	Cu-Draht	‖	215,56	—	237,00
8	Terpentinölsäule . . .	‖	229,03	—	232,90
10	Unterbrochen	‖	231,10	—	231,51
12	Unterbrochen	0	231,81	—	231,32

XII. Beobachtungsreihe.

Tag der Beobachtung 13. Juli 1882. Relative Feuchtigkeit 64 %.
Temperatur 21,1°.

Zeit in Min.	Verbindung der Quecksilbernäpfe	Stellung des Comm.	Säule I	Säule II	Säule III
0	Unterbrochen	0	215,13	215,19	214,78
2	Unterbrochen	×	214,94	215,33	214,91
4	Terpentinölsäule . . .	×	218,12	216,17	214,54
6	Cu-Draht	×	233,16	227,00	208,71
8	Terpentinöle	×	218,24	216,41	214,29
10	Unterbrochen	×	216,13	215,86	214,39
12	Unterbrochen	0	216,36	215,94	215,09

Aus diesen Beobachtungen ergeben sich bei unterbrochener Verbindung der Quecksilbernäpfe die folgenden Ausschläge in Scalentheilen als Maassstab für den Grad der Isolation.

Tag der Beobachtung	Relat. Feuchtigkeit	Temp.	Stellung des Comm.	Säule		
				I	II	III
6. Juli 1882	62%	23,0°	∥	0,06	0,16	−0,57
7. Juli 1882	66	21,6	×	0,12	0,01	0,11
10. Juli 1882	60	20,6	∥	—	−0,18	0,09
11. Juli 1882	63	21,0	∥	0,05	0,19	—
12. Juli 1882	67	21,1	∥	−0,09	—	0,28
13. Juli 1882	64	21,1	×	−0,21	−0,22	−0,01

Bei metallischer Verbindung der Säulenpole haben die Ablenkungen des Nadelpaares die folgenden Werthe in Scalentheilen.

Tag der Beobachtung	Relat. Feuchtigkeit	Temp.	Stellung des Comm.	Säule		
				I	II	III
6. Juli 1882	62%	23,0°	∥	21,02	13,80	10,35
7. Juli 1882	66	21,6	×	17,98	11,58	7,38
10. Juli 1882	60	20,6	∥	—	10,45	5,99
11. Juli 1882	63	21,0	∥	16,95	11,53	—
12. Juli 1882	67	21,1	∥	16,20	—	5,90
13. Juli 1882	64	21,1	×	17,42	11,19	6,20

Endlich sind die bei Einschaltung der Terpentinölsäule auftretenden Scalenausschläge die folgenden.

Tag der Beobachtung	Relat. Feuchtigkeit	Temp.	Stellung des Comm.	Säule		
				I	II	III
6. Juli 1882	62%	23,0°	∥	5,15	2,10	0,77
7. Juli 1882	66	21,6	×	3,92	0,81	1,72
10. Juli 1882	60	20,6	∥	—	0,99	0,68
11. Juli 1882	63	21,0	∥	2,17	1,61	—
12. Juli 1882	67	21,1	∥	2,72	—	1,71
13. Juli 1882	64	21,1	×	2,44	0,48	0,46

V. Die von den Zamboni'schen Säulen gelieferten Electricitätsmengen nach absolutem Maasse.

Aus einer in den Abh. d. königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen 30, 1883 mitgetheilten Beobachtungsreihe er-

gibt sich zur Bestimmung der Stromstärke aus der Scalenablenkung n des astatischen Paares die Formel:

$$i = 23{,}0 \times 10^{-10} \times n \begin{Bmatrix} \text{magnet. Maass} \\ \text{mm, mg, sec} \end{Bmatrix}.$$

Wenn man an Stelle des magnetischen Maasses, für welches diese Formel gilt, das mechanische Maass einführt, nach welchem als ein Strom von der Stärke Eins derjenige gilt, bei welchem die gesammte in der Secunde durch den Querschnitt der Leitung fliessende Electricitätsmenge gleich der electrostatischen Einheit ist, so hat man für die Stromstärke in diesem letzteren Maasse den Ausdruck:

$$s = \frac{311\,140 \times 10^{6}}{\sqrt{2}} \times i$$

oder mit Benutzung der vorhergehenden Formel:

$$s = 506 \times n \begin{Bmatrix} \text{mechanisches Maass} \\ \text{mm, mg, sec} \end{Bmatrix}.$$

Mit Hülfe dieser Reductionsformel sind die folgenden Tabellen berechnet.

I. Beobachtung bei metallischer Verbindung der Pole.

Säule I.

Tag der Beobachtung	26. Juni 1882	28. Juni 1882	29. Juni 1882
Relative Feuchtigkeit	55 %	62 %	63,5 %
Temperatur	24,4°	21,3°	21,2°
s	10700	9800	8000

Säule II.

Tag der Beobachtung	3. Juli 1882	4. Juli 1882
Relative Feuchtigkeit	57 %	64 %
Temperatur	23,1°	22,0°
s	6400	5100

Vergleichende Beobachtungen mit den drei Säulen.

Tag der Beobachtung	Relative Feuchtigk.	Temp.	Säule I	Säule II	Säule III
6. Juli 1882	60%	23,0°	10700	6760	5260
7. „ 1882	66	21,6	9050	5860	3720
10. „ 1882	60	20,6	—	5800	3040
11. „ 1882	63	21,0	8600	5860	—
12. „ 1882	67	21,1	8230	—	3000
13. „ 1882	64	21,1	8850	5680	3150
Mittelwerthe der Stromstärke s	—	—	9090	5890	3630

Das Verhältniss der von den Säulen I und II gelieferten Electricitätsmengen schwankt an den verschiedenen Beobachtungstagen zwischen 1,48 und 1,58; grössere Differenzen ergeben sich in den Verhältnissen der von den Säulen I und II gelieferten Ströme zu dem Strom der III. Säule. Im Mittel ist das Verhältniss:

$$s_I/s_{II} = 1{,}53; \quad s_I/s_{III} = 2{,}50; \quad s_{II}/s_{III} = 1{,}60.$$

II. Beobachtungen mit Einschaltung einer Säule von absolutem Alkohol.

	Relative Feuchtigk.	Temp.	Stromstärke s bei Metallschluss	Stromstärke s bei Alkoholschluss
Säule I	68,5%	21,2°	8000	8250
Säule II	64,0	22,0	5100	5200

III. Beobachtungen mit Einschaltung einer Terpentinölsäule.

	Relative Feuchtigk.	Temp.	Stromstärke s bei Metallschluss	Stromstärke s bei Terpentinölsäule	Verhältniss der Ströme
Säule I	62%	21,8°	9300	1370	6,78
Säule II	57	23,1	6400	940	6,79

Vergleichende Beobachtungen der drei Säulen bei Einschaltung des Terpentinölwiderstandes.

	Tag der Beobachtungen 6. Juli 1882	7. Juli 1882	10. Juli 1882	11. Juli 1882	12. Juli 1882	13. Juli 1882	Mittelwerth von s
Säule I	2620	1990	—	1100	1380	1240	1670
Säule II	1070	410	500	810	—	240	610
Säule III	390	870	340	—	870	230	540

Die Mittelwerthe der entsprechenden bei metallischem Schluss beobachteten Stromstärken sind nach dem Vorhergehenden für:

Säule I	Säule II	Säule III
9090	5890	3630

Für das Verhältniss der Stromstärken bei metallischem Schluss und bei Einschaltung der Terpentinölsäule würde sich demnach im Mittel ergeben bei:

Säule I	Säule II	Säule III
5,4	9,8	6,8

Fassen wir endlich die Resultate sämmtlicher Beobachtungsreihen zusammen, indem wir die Mittel aus allen beobachteten Einzelwerthen nehmen, so erhalten wir die Tabelle:

	Stromstärke s bei		
	Stromschluss	Alkoholsäule	Terpentinölsäule
Säule I	9180	8250	1610
Säule II	5570	5200	660
Säule III	3630	—	540

Die **Potentialdifferenz** zwischen den Enden der Säulen wird bestimmt durch die Formel:

$$V_a - V_b = \frac{2}{c^2} \times 9440 \times 10^6 . w . s,$$

wo w den Widerstand des Schliessungsbogens in Siemenseinheiten, s die Stromstärke in mechanischem Maass bezeichnet. Bei metallischer Verbindung der Quecksilbernäpfe ist zu setzen: $w = 6900$. Somit:

$$V_a - V_b = 13,5 \times 10^{-10} . s \left\{ \frac{\text{electrostatisches Maass}}{\text{mm, sec}} \right\}.$$

Bei metallischer Schliessung hat jene Potentialdifferenz somit einen verschwindend kleinen Werth.

Die Länge der Alkoholsäule betrug 0,86 m, der Querschnitt 42 qmm. Setzt man den specifischen Widerstand des käuflichen Alkohols gleich $0,5 \times 10^{10}$, so ergibt sich für den Widerstand der Alkoholsäule der Werth:

$$w = 0,5 \times \frac{0,86}{42} \times 10^{10} = 10^8,$$

und es würde:

$$V_a - V_b = 19,5 \times 10^{-6} . s \left\{ \frac{\text{electrostatisches Maass}}{\text{mm, sec}} \right\}.$$

Die Länge der Terpentinölsäule beträgt 0,87 m, der Querschnitt 100 qmm. Würde man nach Wiedemann's Galvanismus für den specifischen Widerstand des Terpentinöls den Werth 2×10^{10} Siemens annehmen, so würde der Widerstand der Terpentinölsäule gleich:

$$1,7 \times 10^8 \text{ Siemens}$$

sein. Es würde sich somit für die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Zamboni'schen Säule bei Einschaltung des Terpentinölwiderstandes ergeben:

$$V_a - V_b = 33 \times 10^{-6}.s \left\{ \begin{matrix} \text{electrostatisches Maass} \\ \text{mm, sec} \end{matrix} \right\}.$$

Da nun die Stromstärke bei Einschaltung des Terpentinölwiderstandes mindestens fünfmal kleiner ist, als bei Einschaltung der Alkoholsäule, so würde sich für $V_a - V_b$ im ersteren Falle ein kleinerer Werth ergeben wie in dem letzteren. Dies ist aber bei dem besseren Isolationsvermögen des Terpentinöles nicht möglich. Es würde also aus den vorhergehenden Beobachtungen folgen, dass der specifische Widerstand, welchen das Terpentinöl dem Strome einer Zamboni'schen Säule entgegensetzt, erheblich grösser sein muss, als 2×10^{10}. Gleichheit der Potentialdifferenz für Terpentinöl und Alkohol würde erst erreicht durch einen specifischen Widerstand des Terpentinöles von 6×10^{10} Siemens.

Eine vollständige Vergleichung der specifischen Widerstände würde in folgender Weise auszuführen sein. Hat man für den eingeschalteten Widerstand w die Stromstärke s und die Potentialdifferenz $V_a - V_b$ ermittelt, so ist nach dem Vorhergenden:

$$V_a - V_b = \frac{2}{c^2} 9440 \times 10^6 . w . s .$$

Ebenso ergibt sich bei Einschaltung des zweiten Widerstandes w':

$$V'_a - V'_b = \frac{2}{c^2} \cdot 9440 \times 10^6 . w' . s' .$$

$$\frac{(V_a - V_b) . s'}{(V'_a - V'_b) . s} = \frac{w}{w'} .$$

Aus dem Verhältniss w/w' ergibt sich dann mit Berücksichtigung der Dimensionen der eingeschalteten Widerstandssäulen das Verhältniss der specifischen Widerstände.

X. Ueber den galvanischen Temperaturcoëfficienten des Stahles, des Stab- und Gusseisens; von V. Strouhal und C. Barus.

(Hierzu Taf. III)

§ 1. Stahl.

Die bis jetzt angestellten, älteren Versuche über das Verhalten des Stahles in der vorliegenden Frage[1]) lassen einen erheblichen Unterschied dem Verhalten des Eisens gegenüber kaum erkennen. In der That bewegen sich die Angaben über den galvanischen Temperaturcoëfficienten des Stahles innerhalb gleicher Grenzen wie beim Eisen, nämlich 0,004 bis 0,005. Als Beispiele mögen die Data folgender Beobachter angeführt werden, die Stahl und Eisen zugleich untersucht haben.

Nach Mousson ist der specifische Leitungswiderstand s_t bei der Temperatur t gegenüber jenem s_0 bei 0^0 gegeben durch die Beziehung:

$$s_t = s_0 (1 + 0{,}00421 . t)$$

beim Eisen, und:

$$s_t = s_0 (1 + 0{,}00406 . t) \text{ bis } s_t = s_0 (1 + 0{,}00424 . t)$$

beim Stahl.

Nach Benoist, der bei seinen Versuchen höhere Temperaturdifferenzen angewandt hatte, ist:

$$s_t = s_0 (1 + 0{,}00452 . t + 0{,}000\,005\,83 . t^2)$$

beim Eisen (angelassen), und:

$$s_t = s_0 (1 + 0{,}00498 . t + 0{,}000\,007\,35 . t^2)$$

beim Stahl (angelassen).

Trotz diesen Angaben konnten wir uns der Ueberzeugung nicht verschliessen, dass bei einem Metall, welches bei seinen, durch das Härten und Anlassen bedingten Zustandsänderungen ein so verschiedenes Verhalten im galvanischen Leitungswiderstand zeigt, nicht auch der galvanische Temperatur-

1) Eine übersichtliche Darstellung des hierher gehörigen Beobachtungsmaterials enthält unter anderen G. Wiedemann, Lehre von der Electricität, 1. p. 506. 1882.

coëfficient im gleichen Grade, und zwar in bestimmter Gesetzmässigkeit veränderlich sein sollte.

In der That lagen für diese Ansicht auch einige Anhaltspunkte vor.

Es ist bekannt, dass die Legirungen je nach der relativen Menge der legirten Metalle in ihrem galvanischen Leitungsvermögen ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen. Zahlreiche Untersuchungen über diese Frage liegen von Matthiessen und Vogt vor. So ist z. B. für die Legirung Silber-Platin die (relative) Leitungsfähigkeit λ_t wie folgt:

bei $0\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 100 \quad - 0{,}38287 \,.\, t + 0{,}000\,984\,8 \,.\, t^2$,
bei $2{,}51\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 31{,}640 - 0{,}03986 \,.\, t + 0{,}000\,036\,42 \,.\, t^2$,
bei $5{,}05\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 18{,}031 - 0{,}01395 \,.\, t + 0{,}000\,011\,82 \,.\, t^2$,
bei $19{,}65\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 6{,}696 - 0{,}00221 \,.\, t + 0{,}000\,001\,393 \,.\, t^2$,
(Volumenprocente. Drähte hart gezogen).

Beschränkt man sich blos auf den ersten Temperaturcoëfficienten und berechnet denselben im Verhältniss zu der Leitungsfähigkeit selbst, so erhält man übersichtlicher:

$0\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 100 \;(1 - 0{,}00383 \,.\, t)$
$2{,}5\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 31{,}6\,(1 - 0{,}00124 \,.\, t)$
$5{,}1\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 18{,}0\,(1 - 0{,}00077 \,.\, t)$
$19{,}7\,^0/_0$ Pt: $\lambda_t = 6{,}7\,(1 - 0{,}00033 \,.\, t)$.

Man sieht also klar, dass der Temperaturcoëfficient mit dem Leitungsvermögen gleichen Schritt hält, indem er, wie eine graphische Darstellung zeigt, mit dem letzteren in einer bestimmten, gesetzmässigen Abhängigkeit abnimmt.

Dieselbe Beobachtung haben wir auch bei Neusilber gemacht.

So wurde der specifische Widerstand s_t (Mikrohm. cm/cm^2) bei einer Sorte von C. Vogel, Berlin, gefunden:

$$s_t = 16{,}4\,(1 + 0{,}00064 \,.\, t),$$

dagegen bei einer Sorte von W. Siemens, Berlin:

$$s_t = 39{,}0\,(1 + 0{,}00029 \,.\, t).$$

Nun zeigt der Stahl in seinem Verhalten zahlreiche Analogien mit den Legirungen, wie wir in einer anderen Arbeit darlegen wollen. Es war somit zu erwarten, dass der Stahl in seinen verschiedenen Härtegraden sich ähnlich verhalten wird, wie eine Legirung bei verschiedenen Mengen des legir-

ten zweiten Metalles, und zwar in der Weise, dass der galvanische Temperaturcoëfficient in gesetzmässiger Weise abnehmen wird, wenn der galvanische Leitungswiderstand durch Härten zunimmt.

Diese Erwartung hat sich im vollen Grade bestätigt.

Es möge nun gleich von vornherein bemerkt werden, dass es beim Stahl nicht möglich ist, durchweg die quadratische Formel: $s_t = s(1 + at + bt^2)$
für s_t zu Grunde zu legen. Der Temperaturcoëfficient soll ja blos für solche Temperaturschwankungen gelten, innerhalb deren eine bleibende Veränderung des Materiales ausgeschlossen ist. Beim glasharten Stahle sind nun die Grenzen sehr eng gezogen; ebenso bei mässig angelassenem Stahl. Infolge dessen musste man die Grenzen der Temperaturvariationen auch bei geringeren Härtegraden doch nur ebenso eng halten, da ja sonst die Resultate durchaus nicht vergleichbar wären. In der That kann man oft den Coëfficienten von t beträchtlich variiren, wenn man den Coëfficienten von t^2 entsprechend compensirt, ohne dass dann die Formel weniger befriedigend die Beobachtungen wiedergibt. Deshalb wurde durchweg nach der Formel:

$$s_t = s_0(1 + \alpha t)$$

gerechnet, wobei t innerhalb 10° bis 35° geblieben ist.

Da nun die Variationen der Temperatur, und folglich auch jene des Widerstandes so sehr gering waren, der letztere überdies blos etliche Hundertel Ohm betrug, so musste die Widerstandsbestimmung mit besonderer Sorgfalt und Vorsicht vorgenommen werden. Dazu eignete sich die von uns wiederholt mit Erfolg angewandte und a. a. O. ausführlicher beschriebene Matthiessen'sche Methode in ausgezeichneter Weise, und zwar mit folgender Modification:

An Stelle von zwei Nadeln, welche wir sonst als Contactpunkte auf dem Drahte angewandt haben, und welche im Wasser schlechten Contact und dadurch Störungen in der Beobachtung bereitet hätten, wurden zwei feine Kupferdrähte an zwei Stellen um den Draht umgewickelt und fest angezogen, sodass eine Verschiebung derselben ausgeschlossen war. Der Stahldraht wurde dann abwechselnd in zwei grosse

Gefässe mit kaltem und warmem Wasser sehr behutsam gelegt, sodass an den feinen Kupferdrähten kein Zug ausgeübt wurde. Ein Nebenschluss durch die beiden, sehr dünnen Kupferdrähte kam bei dem destillirten Wasser nicht in Betracht.

Die Temperatur des kalten Wasserbades, der Zimmertemperatur gleich, blieb mit der letzteren sehr constant, jene des warmen variirte innerhalb einer Bestimmung nur um wenige Zehntel Grad. Man las vor und nach der Widerstandsbestimmung ab und nahm das Mittel als die für die Beobachtung geltende Temperatur an.

Der Draht wurde 1) ins kalte, 2) warme, 3) kalte, 4) warme und 5) kalte Bad abwechselnd gelegt. Man konnte dann die Beobachtung 1 und 3 combiniren mit 2, oder 3 und 5 mit 4. Aus der Uebereinstimmung der so berechneten Coëfficienten sowie aus der Uebereinstimmung der Messungen 1, 3 und 5 konnte man die Verlässlichkeit der Messungen beurtheilen.

Als Material wurden Drähte von derselben Stahlsorte verwendet, wie bei unseren übrigen Stahlarbeiten, und zwar von einem Durchmesser = 0,15 cm. Nachdem zunächst die Drähte in grösserer Anzahl gehärtet worden waren, wurde das Anlassen derselben durch den galvanischen Strom vorgenommen. Die glasharten Drähte, vorsichtig polirt, wurden in den Schliessungsbogen eines starken galvanischen Stromes eingeschaltet. Beim fortschreitenden Erwärmen zeigte sich das Anlassen durch die nach einander auftretenden Farben in überraschend schöner Weise. Je nach dem Augenblicke, wann der Strom unterbrochen wurde, blieb dann der Draht in der oder jener Farbe dem grössten Theile seiner Länge nach sehr gleichmässig angelassen. Die Beobachtungen dieses Abschnittes liefern somit auch ein Material für den Zusammenhang zwischen den Anlassfarben und dem specifischen Leitungswiderstande des Stahles für die angewandte Stahlsorte.

Die nun folgende Zusammenstellung (Tabelle 1) enthält in übersichtlicher Darstellung die Beobachtungsresultate, wie sie bei sechs Stahldrähten verschiedenen Härtegrades (verschiedener Anlassfarben) erhalten worden sind.

Bei dem Durchmesser 2ϱ cm des Drahtes ergab die Länge l cm desselben den Widerstand w Ohm bei der Temperatur t und den Widerstand W Ohm bei der Temperatur T. Daraus berechnet sich der Widerstand w_0 für 0° und der Temperaturcoëfficient α. Mit Berücksichtigung der Dimensionen des Drahtes ergibt sich dann daraus der specifische Widerstand s in Mikrohm für 0°, bezogen auf 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt. Endlich ist auch das specifische Gewicht Δ der Drähte mitgetheilt, wie sich dasselbe aus ihrem Gewicht und ihren Dimensionen ergeben hat. Die Zahlen, hauptsächlich zur Controle der durch mikroskopische Messungen erhaltenen Durchmesser der Drähte berechnet, geben, der Genauigkeit dieser Methode entsprechend, in befriedigender Weise den Unterschied im specifischen Gewichte wieder, wie derselbe zwischen den beiden extremen Härtegraden besteht, übereinstimmend mit den von C. Fromme erhaltenen Resultaten.

Tabelle 1.

Temperaturcoëfficient des Stahles.

Draht	2ϱ, l, Δ cm, cm	w Ohm	t	W Ohm	T	w_0 Ohm	α	s Mikrohm
Glashart	2ϱ = 0,151	0,04523	10,0	0,04685	32,9	0,04450	0,00161	45,7
	l = 17,52	20	10,2	59	29,5		160	
	Δ = 7,56	24	10,4					
Hellgelb angel.	2ϱ = 0,148	0,03107	10,2	0,03297	35,5	0,03030	0,00250	28,9
	l = 17,98	06	10,3	65	32,2		238	
	Δ = 7,57	10	10,6					
Gelb angel.	2ϱ = 0,150	0,02782	10,9	0,02950	33,2	0,02698	0,00278	26,3
	l = 18,17	84	11,0	22	29,6		279	
	Δ = 7,54	81	11,0					
Blau angel.	2ϱ = 0,149	0,02043	10,0	0,02191	32,5	0,01978	0,00327	20,5
	l = 16,77	47	10,1	75	29,8		332	
	Δ = 7,56	45	10,2					
Hellblau angel.	2ϱ = 0,148	0,01948	9,3	0,02097	31,6	0,01881	0,00357	18,4
	l = 17,58	46	9,5	70	27,7		363	
	Δ = 7,66	47	9,7					
Weich	2ϱ = 0,146	0,01690	9,7	0,01850	32,5	0,01625	0,00428	15,9
	l = 17,13	94	9,9	27	29,4		419	
	Δ = 7,69	96	10,0					

Nimmt man also für α die Mittelwerthe an und stellt sie dem durch s charakterisirten Härtegrade des Stahles gegenüber, so erhält man übersichtlicher:

Tabelle 2.

Anlassfarbe, specifischer Leitungswiderstand und galvanischer Temperaturcoëfficient des Stahles.

	s cm/qcm 0° Mikrohm	α
Glashart . . .	45,7	0,00161
Hellgelb angelassen . .	28,9	244
Gelb „ . .	26,3	280
Blau „ . .	20,5	330
Hellblau „ . .	18,4	360
Weich	15,9	423

Der galvanische Temperaturcoëfficient des Stahles ändert sich also ebenso wie sein Leitungswiderstand continuirlich mit dem Härtegrad des Stahles, und zwar nimmt er bei fortschreitendem Anlassen zu.

§ 2. Stabeisen.

Für Stabeisen liegen zahlreiche ältere Beobachtungen vor, insbesondere von Lenz, Becquerel, Arndtsen, Mousson u. a. In ausgedehnterem Maasse haben insbesondere A. Matthiessen und C. Vogt die galvanische Leitungsfähigkeit und den Temperaturcoëfficienten für verschiedene Eisensorten untersucht und Resultate erhalten, die für die vorliegende Frage von besonderem Interesse sind. Wir wollen deshalb nur die von diesen beiden Beobachtern erhaltenen Zahlenwerthe einer Discussion unterziehen.

Matthiessen und Vogt[1]) legen die quadratische Formel:

$$\lambda = 100 - at + bt^2,$$

der Berechnung der Leitungsfähigkeit λ zu Grunde und erhalten unter der Annahme $\lambda_0 = 100$ für Silber, (hart) folgende

1) A. Matthiessen u. C. Vogt, Pogg. Ann. 118. p. 431. 1863.

ahlen für a, b und λ_0 (hier abgekürzt mitgetheilt), bei den lnfzehn von ihnen untersuchten Eisendrähten:

Tabelle 3.

Temperaturcoëfficienten und Leitungsfähigkeit verschiedener Eisensorten.

Eisensorte		a	b	λ_0
Electrotypeneisen, Nr. 2 und 4 geglüht in Wasserstoff, resp. in Luft	Nr. 1	0,512	0,00129	(16,810) [1]
	„ 2	0,519	134	„
	„ 3	0,514	132	„
	„ 4	0,509	127	„
Gezogene Drähte, Zusammensetzung durch Analyse ermittelt	„ 5	0,473	112	15,712
	„ 6	0,472	112	15,640
	„ 7	0,449	102	14,204
	„ 8	0,453	112	12,132
Eisendrähte von verschiedenem Kohlenstoffgehalt	„ 9	0,463	109	14,723
	„ 10	0,418	092	10,666
	„ 11	0,404	092	9,921
	„ 12	0,397	091	9,449
Clavierdraht	„ 13	0,425	092	13,293
Uhrfeder	„ 14	0,340	063	8,568
Käuflicher Eisendraht	„ 15	0,428	090	18,774

Um diese Resultate mit den unserigen leicht vergleichbar zu machen, haben wir aus der angeführten relativen Leitungsfähigkeit der verschiedenen Eisenproben ihren specifischen Leitungswiderstand s in Mikrohm, bezogen auf 1 cm Länge und 1 qcm Querschnitt berechnet, wobei wir für „Silber, hart“ (Matthiessen 100) den Werth:

$$s = 1{,}574,$$

zu Grunde gelegt haben. Ausserdem sind, der leichteren Uebersicht wegen, die Beobachtungen, von dem reinen Metall ausgehend, nach zunehmendem specifischen Widerstand s angeordnet, der Coëfficient des quadratischen Gliedes weggelassen und nur derjenige a des linearen Gliedes angeführt.

1) Wahrscheinlicher Werth für das reine Eisen, hart, aus den Beobachtungen für das unreine Metall nach den Temperaturcoëfficienten abgeleitet.

Die Bedeutung der letzten, α (interpolirt) enthaltenden Columne werden wir später anführen.

Tabelle 4.

Specifischer Widerstand und Temperaturcoëfficient verschiedener Eisensorten.

Eisenprobe	s cm/qcm 0° Mikrohm	α beobachtet	α interpolirt
Nr. 1 bis 4	9,4	0,0052	0,0052
„ 5	10,0	47	50
„ 6	10,1	47	50
„ 9	10,7	46	49
„ 7	11,1	45	48
„ 15	11,4	43	47
„ 13	11,8	42	46
„ 8	13,0	45	44
„ 10	14,8	42	41
„ 11	15,9	40	40
„ 12	16,7	40	37
„ 14	18,4	34	36
Stahl, ausgeglüht	15,9	42	40

Von diesen Zahlenwerthen ist das erste, dem reinen Metall entsprechende Paar am verlässlichsten, als Mittelwerth, abgeleitet aus mehreren Messungen. Nimmt man nun zu unseren, über Stahl erhaltenen Resultaten noch dieses für das reine Eisen geltende hinzu, entwirft dann eine graphische Darstellung, als Abscisse den specifischen Widerstand s, als Ordinate den Coëfficienten α auftragend (Fig. 1.), so reihen sich die so erhaltenen Punkte in eine Curve, welche man zu einer graphischen Interpolation verwenden kann. In diesem Sinne ist in der letzten Columne der vorigen Tabelle bei den verschiedenen Eisenproben zu dem beobachteten α das interpolirte beigefügt, wie es sich aus jener Curve zu dem jeweiligen s ergeben würde. Die Differenzen zwischen dem beobachteten und dem interpolirten Werthe sind nicht grösser, als man es bei der Combination von so verschiedenem Beobachtungsmaterial und so verschiedenen Fehlerquellen nur erwarten kann. Auch der Anschluss an den ausgeglühten Stahl ist ganz befriedigend.

Benoist[1]) findet für Eisen und Stahl, angelassen, folgende Beziehungen:

$$s_t = 0{,}1272\,(1 + 0{,}00452\,.\,t + 0{,}000\,005\,8\,t^2),$$

beziehungsweise:

$$s_t = 0{,}1149\,(1 + 0{,}00498\,.\,t + 0{,}000\,007\,4\,t^2),$$

$$\left(Hg = 1,\quad \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{qmm}}\right),$$

also in Mikrohms und auf cm/qcm umgerechnet:

$$s = 12{,}1\,,\qquad \alpha = 0{,}00452\,,$$

beziehungsweise:

$$s = 10{,}9,\qquad \alpha = 0{,}00498\,.$$

Beide Werthepaare stehen mit unserer graphischen Darstellung in gutem Einklang; denn aus derselben ergibt sich:

für $s = 12{,}1$ der Werth: $\alpha = 0{,}00457$
und für $s = 10{,}9$ $\alpha = 0{,}00485$.

§ 8. Gusseisen.

Von besonderem Interesse für die vorliegende Frage ist das Verhalten des kohlenstoffreichsten aller Eisenproducte, nämlich des Gusseisens. Beobachtungen über den behandelten Gegenstand liegen bei diesem Material keine vor. Wir haben ursprünglich zu anderen Zwecken, worüber in einer anderen Mittheilung berichtet werden wird, eine grössere Anzahl von Gusseisenstäben sowohl in Bezug auf ihr thermoelectrisches als auch galvanisches Verhalten untersucht, und es stellte sich heraus, dass der specifische Leitungswiderstand des Gusseisens noch beträchtlich grösser ist als derjenige des härtesten Stahles, den wir jemals bekommen haben. Falls in der That der hier besprochene Zusammenhang zwischen dem Leitungswiderstand s und dem Coëfficienten α besteht, so müsste der letztere noch niedriger ausfallen als der niedrigste beim Stahl beobachtete gewesen.

---

1) Benoist, Compt. rend. 76. p. 342. 1873. Wiedemann, Electricität. 1. p. 525. Auffallend ist der kleine Werth $s = 10{,}9$ für Stahl, angelassen.

Um dies zu prüfen, wurden aus dem Vorrathe unserer Stäbe drei gewählt (No. 13, 14, 15; ungefähre Länge = 25 cm) und der Widerstand derselben im ausgeglühten Zustande bei verschiedenen Temperaturen bestimmt. Da nun dieser Widerstand bei dem beträchtlichen Querschnitte (von etwa 0,4 qcm) der Stäbe höchstens nur 0,004 Ohm betrug, so mussten die Messungen mit noch grösserer Sorgfalt und Vorsicht vorgenommen werden, als dies schon beim Stahl nöthig gewesen.

Die Messungsmethode war im wesentlichen dieselbe wie beim Stahl. Die Zuleitungsdrähte, wo nöthig, behufs vollkommener Isolation in enge Glasröhren eingeschmolzen, waren an die zu untersuchenden Stäbe angelöthet, die Stäbe sammt den Zuleitungsdrähten und einem Thermometer in eine weite Glasröhre gesteckt, durch welche, bei passenden Korkverschlüssen, Dämpfe von bekannter Temperatur hindurchgeleitet wurden; es waren dies Dämpfe von Methylalkohol und Wasser. Die Röhre selbst wurde dann mit Filz und Tuch umwickelt, um eine möglichst constante Temperatur zu erzielen und festzuhalten. Alle diese Vorsichtsmaassregeln waren nöthig, theils auch deswegen, um die Thermoströme, welche sonst bei Temperaturdifferenzen beider Löthstellen das Element Kupfer-Eisen geliefert hatte, zu eliminiren.

Die Beobachtungen gelangen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt, vollkommen befriedigend. Darin sind a und b die Dimensionen des nahezu quadratischen Querschnittes der Stäbe, l die bei der Widerstandsbestimmung verwendete Länge derselben. Die lineare Formel der Widerstandszunahme lässt sich hier, wie die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung zeigen, bis zu 100° in befriedigender Weise anwenden. Der erhaltene Werth des Temperaturcoëfficienten schliesst sich den beim Stahl gewonnenen Werthen ganz befriedigend an.

Tabelle 5.

Temperaturcoëfficient des Gusseisens.

Stab Nr.	Constanten cm	t C.	w Ohm	t Mittel	w beob.	w ber.	Diff.	w_0 Ohm	α	s Mikr-ohm
			00,0		0,00	0,00		0,00	0,00	
13	a = 0,640	23,8	3749	23,5	3748	3743	0	3637	124	76,0
	b = 0,656	23,2	3738	—	—	—				
	l = 20,10									
		67,2	3938	67,3	3941	3941	0	—	—	—
		67,5	3943	—	—	—				
		99,4	4093	99,3	4085	4085	0	—	—	—
		99,3	4077	—	—	—				
14	a = 0,643	22,8	3839	22,8	3837	3829	8	3712	138	76,2
	b = 0,642	22,8	3835	—	—	—				
	l = 20,10									
		67,8	4041	69,5	4051	4068	−17	—	—	—
		71,2	4061	—	—	—				
		99,5	4235	99,5	4235	4224	11	—	—	—
		99,5	4235	—	—	—				
15	a = 0,646	20,0	4095	18,7	4099	4102	− 3	4008	126	83,3
	b = 0,647	17,8	4095	—	—	—				
	l = 20,10	18,3	4108	—	—	—				
		66,0	4347	66,0	4347	4341	6	—	—	—
		66,0	4347	—	—	—				
		100,0	4500	100,0	4509	4513	− 4	—	—	—
		100,0	4490	—	—	—				
		100,0	4536	—	—	—				

§ 4. Folgerungen.

Die hier mitgetheilten Beobachtungsreihen liefern einen beachtenswerthen Beitrag für die Analogie, welche der Stahl in seinem galvanischen Verhalten mit den Legirungen zeigt. Es ist sehr wahrscheinlich, dass man es hier mit einem allgemeinen Gesetze zu thun hat, und dass in allen Fällen, wo bei einem und demselben Grundmaterial Veränderungen des galvanischen Leitungswiderstandes auftreten, dieselben gleichzeitig auch den Temperaturcoëfficienten beeinflussen, so zwar, dass bei einer Zunahme des Lei-

tungswiderstandes der Temperaturcoëfficient in einer bestimmten, gesetzmässigen Weise abnimmt. Bei den Legirungen sind es kleine Mengen der dem Hauptmaterial zugefügten kleinen Metalle, welche den Leitungswiderstand erhöhen. Beim Stahl, als einem Eisenkohlenstoffproduct, ist es der Kohlenstoff, der durch den Härtungs- und Anlassprocess mit dem Hauptmaterial, dem Eisen, in verschiedenen relativen Mengen so zu sagen legirt wird, wodurch dann Veränderungen im galvanischen Widerstand auftreten. Wir wollen hier auf diese Analogie nicht weiter eingehen, da wir dieselbe demnächst ausführlicher darzulegen beabsichtigen.

Es ist ohne Zweifel, dass auch der magnetische Temperaturcoëfficient in gleicher Weise mit dem Härtegrad des Stahles zusammenhängt, wie der galvanische.

Die genaue Kenntniss des galvanischen Temperaturcoëfficienten kann bei thermischen Arbeiten über Stahl von Bedeutung sein. Ebenso, wie man bei gleicher Temperatur aus dem galvanischen Widerstand die Homogeneïtät eines Stahldrahtes an seinen verschiedenen Theilen in der von uns a. a. O. beschriebenen Weise prüfen kann, ebenso kann man umgekehrt bei einem vorher als homogen erkannten Draht aus dem galvanischen Widerstand auf gleiche oder ungleiche Temperaturvertheilung an verschiedenen Stellen des Drahtes schliessen und die mittlere Temperatur eines Drahtstückes, aus dem galvanischen Temperaturcoëfficienten berechnen. Man sieht, dass diese Methode die Wärmevertheilung, sofern sie für eine Zeit lang stationär ist, in einem beliebigen Leiter zu prüfen geeignet ist und an Einfachheit gewiss keiner anderen nachsteht. Wir beabsichtigen, die Anwendbarkeit dieser Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung bei verschiedenen Leitern, insbesondere bei Stahldrähten verschiedener Härte zu prüfen, worüber wir uns Mittheilungen für später vorbehalten.

XI. *Ueber die Beziehung zwischen dem Reibungs- und Leitungswiderstand der Lösungen von Salzen in verschiedenen Lösungsmitteln; von Eilhard Wiedemann.*

Man hat im Anschluss an eine Bemerkung von G. Wiedemann in neuerer Zeit vielfach versucht, strenge numerische Beziehungen zwischen Reibungscoëfficienten und galvanischem Leitungsvermögen aufzufinden, gegen deren Allgemeinheit er indess aus theoretischen Gründen Einwendungen erhebt.[1]) Dabei hat man entweder die Aenderung der obigen beiden Grössen mit der Temperatur bei derselben Lösung oder mit der Concentration bei verschiedenen Lösungen verfolgt, und in der That hat sich eine gewisse Analogie zwischen beiden Vorgängen ergeben. Sollte diese aber streng geprüft werden, so mussten Lösungen desselben Salzes untersucht werden, die möglichst verschiedene Reibungscoëfficienten besitzen. Ich habe deshalb mit Lösungen von Zinksulfat in Wasser und wasserhaltigem Glycerin einige Versuche angestellt. Das Glycerin war, wie eine besondere Prüfung zeigte, ganz frei von Säure und leitete den Strom äusserst schlecht.

Die Reibungswiderstände wurden mit dem von Sprung[2]) ausführlich beschriebenen Apparate bestimmt, die Leitungswiderstände mittelst der Wheatstone'schen Brücke. Gleich concentrirte Lösungen von Zinksulfat in Wasser und Glycerin wurden in zwei Tröge von gleichen Dimensionen gebracht und in dieselben zwei gleiche amalgamirte Zinkplatten getaucht. Die beiden Tröge waren gleichzeitig in die zwei Zweige der Brücke eingeschaltet.

Die Lösungen wurden bei einer ersten Versuchsreihe in der Weise hergestellt, dass man zuerst 10 Theile $ZnSO_4 + 7H_2O$ in 100 Theilen Wasser löste und dann von dieser Lösung 50 ccm, 100 ccm, 250 ccm durch Zusatz von Wasser

---

1) G. Wiedemann, Galvan. 2. Aufl. I. p. 631 u. flgde. 3. Aufl. I. p. 952.

2) Sprung, Pogg. Ann. 159. p. 1. 1876.

oder Glycerin auf 500 ccm brachte. Die Lösungen enthielten also stets in gleichen Volumen gleich viel Molecüle Salz.

Für die Lösungen in Wasser und Glycerin ergab sich das Verhältniss:

	der Reibungswiderstände	der Leitungswiderstände
50 $ZnSO_4$	1:68,7	1:12,1
100 $ZnSO_4$	1:29,8	1: 9,52
250 $ZnSO_4$	1: 6,15	1: 3,68

Stets zeigte die Glycerinlösung den grösseren Leitungs- uud Reibungswiderstand.

Der zweite Versuch wurde in der Weise angestellt, dass einmal 50 g $ZnSO_4 + 7H_2O$ in Wasser zu einer Lösung von 500 ccm gelöst wurden, und dass andererseits in wenig Wasser 50 g $ZnSO_4$ gelöst und durch Zusatz von Glycerin auf 500 ccm gebracht wurden.

Eine directe Lösung des Zinkvitrioles in Glycerin war deshalb nicht möglich, weil das Glycerin diesem Salze zunächst Wasser entzieht, und das gebildete Salz mit weniger Krystallwassergehalt sich sehr schwierig in dem Glycerin löst.

In diesem Falle war das Verhältniss

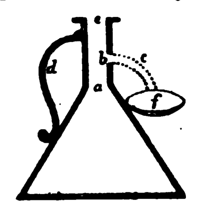
der Reibungswiderstände 1 : 86,2 | der Leitungswiderstände 1 : 109.

Die obigen Zahlen zeigen durchweg, dass keine Proportionalität zwischen Leitungs- und Reibungswiderständen besteht; sondern dass das Lösungsmittel bei den betreffenden Vorgängen eine grosse Rolle spielt. Ferner ergibt sich aber, dass, je concentrirter die Lösungen werden, um so mehr der Einfluss des Lösungsmittels zurücktritt.

Physik.-chem. Laborat. zu Leipzig, im August 1883.

XII. *Arabische specifische Gewichtsbestimmungen; von Eilhard Wiedemann.*

In einem türkischen Werke aus dem Jahre 1511 n. Chr. von Jahja Muhammed al Gaffârî[1]) findet sich eine Reihe von Angaben über die Gewichte verschiedener Körper, welche nöthig sind, um gleiche Mengen Wasser zu verdrängen, entsprechend den Beobachtungen von Abû al-Raihan al Birûnî. Letzterer hat seine Messungen mit einem uns in einer Zeichnung erhaltenen[2]) Apparate angestellt (s. d. Fig.). Die Methode der Beobachtung ist einfach die, dass man Wasser bis zum Ausfliessen aus *e* in das Gefäss giesst, dann eine gewogene Menge Substanz in das Wasser wirft und die ausgeflossene Menge Wassers ermittelt. Die Mittheilung der Zahlen dürfte bei dem wenigen, was bisher über arabische physikalische Bestimmungen bekannt ist, wohl gestattet sein. In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Zahlen zusammengestellt, und zwar enthält Columne 1 die Namen der Substanz deutsch und arabisch, resp. türkisch, was bei der oft nicht ganz sicheren Lexikographie nöthig ist, die Columne 2 die Gewichte der Substanzen, die nöthig sind, um gleiche Gewichte Wasser zu verdrängen, d. h. die Gewichte gleicher Volumina, denn diese Grössen geben die Zahlen des Codex. Die Columne 3 enthält dieselbe Grösse bei den Metallen in Tassû[2]), bei den Edelsteinen in Arpâ's[3]) ausgedrückt, die Columne 4_a die specifischen Gewichte der Metalle, welche unter Zugrundelegung des specifischen Gewichtes des Goldes, 4_b diejenigen, welche unter Zugrundelegung des specifischen



1) Cod. d. Leipz. Stadtbibl. 262. Dass diese Handschrift wahrscheinlich specifische Gewichtsangaben enthielte, liessen die von Hrn. Fleischer mitgetheilten Capitelüberschriften, sowie der vorkommende Name Abû al Rihâns vermuthen. Mein leider zu früh verstorbener Freund, Prof. Loth, war so gütig, mir den betreffenden Passus zu übersetzen.

2) Wage der Weisheit von Al Khazînî von Khanikoff. J. of the American Oriental Society 6. p. 54. 1860.

3) 1 Mitkal = 6 Danek = 24 Tassû = 96 Arpâ.

1. Namen der Substanzen		2. Mitkâl	Danek	Tassû	Arpà	3. Gewicht in Tassû	4a Codex Gold richtig	4b Hg richtig	5. 'Ain J Akberi	6. Al Khazini	7. Neuere Bestimmungen
Gold	التون	100	—	—	—	2400	19,26	19,05	19,05	19,05	19,26
Quecksilber .	زيبق	71	—	—	—	1712	13,74	13,19	13,50	13,56	13,59
Kupfer . . .	بقر	46	—	—	—	1112	8,92	8,83	8,58	8,66	8,85
Messing . . .	برنج	45	—	—	—	1080	8,67	8,58	8,57	8,57	8,4 ca.
Eisen	دمر	40	3	—	—	975	7,82	7,74	7,74	7,74	7,79
Zinn	قلعى	40	3	3	—	900	7,22	7,15	7,31	7,32	7,29
Blei	قرشون	59	1	3	—	1423	11,40	11,29	11,35	11,32	11,35
						Gewicht in Arpà	Smaragd richtig	Bergkrystall richtig			
Saphir	كوك ياقوت	1	—	—	—	96	3,91	3,76	3,85	3,96	3,90
Rubin	قزل ياقوت	—	5	3	—	92	3,75	3,60	3,58	3,58	} 3,52
Blassrother Rubin	لعل	—	5	1	2	—	—	—	2,75	2,75	
Smaragd . .	زمرّد	—	4	3	3	67	2,73	2,62	2,69	2,60	2,73
Perle	انجو	—	4	3	3	67	2,73	2,62	—	—	2,75
Carneol . . .	عقيق	—	4	—	—	64	2,60	2,50	2,56	2,56	—
Coralle . . .	مرجان	—	3	3	3	63	2,63	2,46	—	—	2,61
Onyx	جزع	—	—	—	—	—	—	—	2,50	2,50	2,6 ca.
Bergkrystall	بلور	—	3	3	2	62	2,53	2,58	—	—	2,58

Gewichtes des Quecksilbers aus den arabischen Angaben berechnet sind, während für die Edelsteine die Columne 4_a dieselben Grössen unter Zugrundelegung des specifischen Gewichtes des Smaragdes, 4_b unter Zugrundelegung derjenigen des Bergkrystalles gibt. Dabei ist die Angabe des Codex 4 Danek weniger 2 Arpâ, die zu ganz falschen Resultaten führt, emendirt zu 4 Daneck 2 Arpâ. Die Columnen 5, 6, 7 geben die aus den Angaben der 'Ain J Akberî, den Angaben von Al Khazînîs und aus den neueren Versuchen bestimmten specifischen Gewichte. (Siehe die Tabelle.)

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung eine recht befriedigende, die Abweichung der in den 'Ain J Akberî gegebenen Werthe von denen in unserem Codex sind nicht gross und nicht nothwendig auf Rechnung unseres späteren Gelehrten zu setzen, da er selbst angibt, dass die Ueberlieferungen über die Zahlen Abû al Raihân's etwas auseinander gingen.

Diese Zahlen ergeben ausserdem, dass das Gold, welches von den Arabern untersucht wurde, nicht rein war, da dasselbe gegenüber allen anderen Metallen ein zu kleines specifisches Gewicht besitzt.

Dass die uns vorliegende Mineralogie diese Zahlen enthält, zeigt, wie weit verbreitet ihre Kenntniss war, auch spricht der Verfasser nicht von ihnen als etwas besonders Unbekanntem.

Bei dem regen Verkehr zwischen Venedig und Constantinopel konnte es daher wohl auch nicht ausbleiben, dass die Venetianer und durch sie die Gelehrten Italiens von den betreffenden Untersuchungsmethoden Kunde erhielten. Wie sich dies z. B. bei Galilei zeigt, werde ich in einer späteren Notiz erörtern.

Interessant ist aus unserem Codex auch folgende Stelle über die Begründung der Methode Abû al Raiḥan's.

„Die theoretische Grundlage bildet nach Jaḥja al Bazî die Ansicht, dass es keinen leeren Raum gebe; da aber dieser Ansicht die streng gläubigen Sunniten widersprechen, soll man lieber die Versuche auf anderem, nicht den Glaubenssätzen widerstreitendem Wege erklären."

XIII. *Vereinfachungen beim Experimentiren mit der Luftpumpe; von K. L. Bauer in Karlsruhe.*

I. Bei den Versuchen mit der Luftpumpe hat das Befetten des Randes der Recipienten mancherlei Unannehmlichkeiten, welche sich durch ein einfaches Mittel verhüten lassen.

Man unterlässt die Befettung gänzlich und bewirkt den vollkommenen Schluss der Recipienten dadurch, dass man den Teller der Luftpumpe mit einer ebenso grossen, in der Mitte etwas ausgeschnittenen Weichgummiplatte bester Qualität bedeckt.

Es scheint, dass die rothen Sorten von Gummiplatten in der Regel vorzüglicher sind als die grauen; die letzteren sondern häufig feines Pulver (Schwefelpulver) ab und sind dann zu verwerfen, wenn man nicht absichtlich den Staubring zeigen will, welcher in diesem Fall beim Evacuiren durch den Druck des Recipientenrandes auf dem Teller entworfen wird. Lässt die Qualität der Weichgummiplatte zu wünschen übrig, so werden besser zwei Scheiben übereinander gelegt; auch kann man während des ersten Kolbenhubes den Recipienten etwas gegen die Gummiplatte andrücken. Ich benutze mit bestem Erfolg eine einzige, sehr weiche, schmiegsame, rothe Gummiplatte von geringer Dicke und brauche dabei weder die leichtesten, noch die grössten Recipienten anfangs noch besonders anzupressen.

Soll ein Apparat mit ebenem Fuss, etwa die Magdeburger Halbkugeln, auf den Teller gesetzt werden, so kann man, wenn es nöthig sein sollte, einen flachen, schmalen Weichgummiring unterlegen. Auch die Ränder der Halbkugeln fette man ja nicht; lieber presse man beim ersten Kolbenhub die obere Halbkugel etwas gegen die untere, und falls sich dies nicht genügend erweist, bewirke man den guten Verschluss durch eine dünne Gummiringeinlage. Wendet man Fett an, so erfordert die Trennung der Halbkugeln auch nach dem Wiedereintritt der Luft, wegen des festen Zusammenhaftens der Ränder, eine ziemliche Anstrengung;

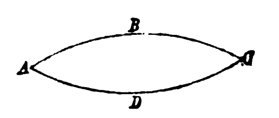
macht man den Versuch aber auf die empfohlene Weise, so erfolgt die Scheidung ganz mühelos, und der Contrast gegenüber dem Verhalten vor dem Lufteintritt ist daher weit auffälliger.

Die Weichgummiplatte lässt man am einfachsten immer auf dem Luftpumpenteller liegen, überdeckt sie aber nach gethaner Arbeit mit einem wenig breiteren cylindrischen Deckel aus Pappe, damit sie vor dem Hinabgleiten und vor Staub geschützt ist.

II. Als Material für eine zum Sprengen bestimmte Membran muss ich eine Thierblase (Kalbsblase) als durchaus unzweckmässig und nicht mehr zeitgemäss bezeichnen. Vortrefflich eignet sich hingegen das sogenannte Guttaperchapapier, welches auch in beträchtlicher Grösse leicht zu haben und unmittelbar zum Gebrauch geschickt ist. Man schneidet sich ein kreisförmiges (oder auch quadratisches) Stück solcher Membran, das rings über den Rand des zum Versuch dienenden Cylinders um etwa 4 cm oder mehr vorsteht, drückt dasselbe vorübergehend mit beiden Händen etwas gegen den Cylinder an und streift hierauf, statt mehrmals mit Bindfaden zu umwickeln, einen passenden Weichgummiring darüber. Man kann hierbei die Hände von oben nach unten in diesen Ring stecken und beim Auseinanderziehen die Finger derart spreizen, dass derselbe möglichst kreisförmig und von der richtigen Grösse wird; liegt das stark federnde Gummiband nach dem Zurückziehen der Finger hier oder da nicht gut an, oder ist die Membran stellenweise nicht hübsch eben gespannt, so kann man leicht, wenn nicht mit den Fingern, mit einer kleinen Flachzange das Gummiband an den verbesserungsbedürftigen Punkten ein wenig von der Cylinderwand abziehen und dort die Correctur besorgen. Ein völlig luftdichter Verschluss ist überhaupt zu diesem Versuch nicht erforderlich.

Stellt man den so vorbereiteten Cylinder auf den mit der oben erwähnten Weichgummiplatte bedeckten Luftpumpenteller, so wird die braune Membran beim Evacuiren für den Beschauer kugelförmig concav, und es bildet sich in derselben alsbald, meist durch den tiefsten Punkt gehend und bis zum Cylinderrand aufsteigend, eine kreisbogenförmige

weisse Meridianlinie — die infolge der Ausdehnung stärkst verdünnte Gegend — welche sich sodann, bei zunehmendem Ueberdruck der äusseren Luft, rasch und zwar in der tiefliegenden Mitte am meisten verbreitert, sodass auf der braunen Haut ein weisses Blatt von der Form eines sphärischen Zweieckes erscheint, welches die Gegend bezeichnet, wo die Elasticitätsgrenze überschritten ist; dann erfolgt der Riss mit lautem Knall, besonders wenn zuletzt der Kolben möglichst rasch gehoben wird. Die Bruchstelle fällt naturgemäss mit der Querlinie BD zusammen, wo das Material am weitesten auseinander gezogen und daher am stärksten verdünnt ist; oft geht jedoch der Riss noch weiter nach beiden Seiten über B und D hinaus in den braun gebliebenen Theil der Membran hinein; auch reisst nicht selten zugleich das weisse Häutchen eine Strecke weit längs eines Randes BA oder BC, in anderen Fällen längs beider Ränder BA und DA, oder BC und DC, von der angrenzenden braunen Membran ab, sodass es nur noch in der Gegend der Ecke A oder C hängen bleibt.



Der von mir benutzte Cylinder (mit vorspringendem oberen Rand) hat einen Durchmesser von beiläufig 14 cm, eine Höhe von 17 cm; es ist zweckmässig, die Luftverdünnung anfangs etwas langsam vorzunehmen.

Die in den obigen Mittheilungen erwähnten Materialien können nach meinen Mustern von Hrn. Hofmechaniker und Optiker Karl Sickler dahier bezogen werden.

Nekrolog.

Am 22. October starb in Berlin

Peter Theophil Riess.

Während vieler Jahre ist er ein treuer Mitarbeiter an diesen Annalen gewesen.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 12a.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XX.

I. *Ueber die Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen; von R. Bunsen.*

(Hierzu Taf. IV.)

Die Dicke der Kohlensäureschicht, welche sich an Glasoberflächen anlagert, ist bekanntlich eine so kleine Grösse, dass es einer sehr ausgedehnten Oberfläche bedarf, um eine exacte Maassbestimmung derselben zu ermöglichen. Als Material zur Herstellung solcher ausgedehnter, in einen möglichst kleinen Raum zusammengedrängter, messbarer Oberflächen dienen daher am besten die äusserst fein gesponnenen Glasfäden, welche in der Glasweberei Verwendung finden. Diese im Folgenden benutzten Fäden stammten aus einer Wiener Fabrik und waren von solcher Feinheit, dass 150 g derselben einen Raum von nur 100 ccm einnahmen, einer Fadenlänge von 62 geographischen Meilen entsprachen und eine Oberfläche von 23 qm darboten. Die Glasmasse dieser Fäden zeigte folgende Zusammensetzung:

Kieselerde	Natron	Kali	Kalkerde	Magnesia	Thonerde	Eisenoxyd
70,65	16,01	2,07	8,96	0,27	1,86	0,68

Die Bestimmung des specifischen Gewichtes der Fäden, welches in die Berechnung ihrer Oberfläche als Constante eingeht, geschah auf folgende Weise: Es wurden eine Anzahl Gramm der Fäden in einem Platintiegel abgewogen, der Tiegel mit ausgekochtem Wasser gefüllt, das letztere solange im Sieden erhalten, bis jede Spur von Luftblasen entfernt war, und darauf der erkaltete an einem Haar aufgehängte Tiegel mit seinem Inhalt unter ausgekochtem Wasser von constanter Temperatur gewogen; in ähnlicher Weise wurde dann der Gewichtsverlust, welchen der Platintiegel ohne Glasfäden beim Wiegen im Wasser von derselben con-

stanten Temperatur erlitt, ermittelt. Drei, bei einer zwischen 13,7° C. und 14,0° C. schwankenden Temperatur angestellte Versuche, ergaben für das gesuchte specifische Gewicht:

2,5063 2,5059 2,5057 Mittel 2,50563.

Die Fäden zeigten unter dem Mikroskop eine vollkommen glatte und blanke Oberfläche; ihre senkrecht zur Axe gerichteten Querschnitte waren Kreisflächen; ihre Durchmesser nahmen sehr allmählich erst auf weite Erstreckungen hin bemerkbar ab und variirten von 0,00589 bis 0,0295 mm.

Um die Mantelfläche von n solcher Fäden zu berechnen, hat man zunächst deren mittleren Durchmesser zu bestimmen. Bezeichnet man mit $d_1\, d_2 \ldots d_n$ die in Mikrometertheilen des Mikroskopes gemessenen Durchmesser und den Werth eines Mikrometertheiles in Millimetern mit a, so ist der gesuchte mittlere Durchmesser d, in Millimetern ausgedrückt:

$$(1) \qquad d = \frac{a}{n}(d_1 + d_2 + \cdots d_n).$$

Die mikrometrische Messung, bei der es sich um Tausende zu messender Durchmesser handelte, liess sich mit befriedigender Genauigkeit und in verhältnissmässig kurzer Zeit auf folgende Weise ausführen: Auf den Objectträger eines Chevalier'schen Mikroskopes war eine Platte von Spiegelglas festgekittet, auf welcher sich eine andere mit eingeätztem Coordinatennetz versehene Glasplatte sanft verschieben liess. Auf dieser verschiebbaren Glasplatte werden einige hundert Glasfäden möglichst einander parallel freiliegend ausgebreitet und der Reihe nach durch Verschieben der oberen Glasplatte in das Gesichtsfeld gebracht. Durch Drehung des das Mikrometer enthaltenden Oculareinsatzes wurde jeder zu messende Faden mit den Theilstrichen des Mikrometers parallel gestellt, durch gelindes Klopfen an die untere festgekittete Glasplatte mittelst eines Stäbchens der eine Rand des Glasfadens mit einem ganzen Theilstriche der Mikrometertheilung in Coincidenz gebracht und der andere Rand abgelesen. In solcher Weise wurden zunächst die Durchmesser von 1000 einzelnen Glasfäden gemessen, die elf verschiedenen Gebinden entnommen waren. Die Mittel von je zehn ge-

messenen Durchmessern sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle I.

6,31	5,04	5,82	5,13	4,76	4,86	4,71	5,59	5,03	4,50
6,10	5,70	5,35	6,82	5,79	5,05	5,11	5,38	4,90	5,35
6,36	5,87	6,00	5,42	5,20	4,80	3,34	6,43	5,09	4,91
5,93	5,74	5,50	5,04	5,33	5,06	4,62	5,69	4,32	4,58
5,39	5,58	6,22	6,49	5,12	5,41	4,81	6,25	4,58	5,06
5,95	5,76	5,67	5,83	5,20	6,02	5,09	5,90	4,44	6,36
6,30	5,93	5,69	6,17	5,21	5,44	4,72	6,01	5,35	5,01
6,43	5,99	5,19	5,32	5,49	5,95	4,70	5,94	4,58	4,97
6,15	5,75	5,13	5,04	5,99	5,43	5,53	4,52	4,55	5,06
5,66	5,17	4,86	5,83	6,10	4,89	3,92	5,18	5,26	5,27

Für den Werth von a ergab sich 0,002 945 mm. Der aus Tabelle I nach Gleichung (1) abgeleitete Werth von d ist:

$$d = 0{,}015\,907 \text{ mm}.$$

Um zu sehen, ob dieser für $n = 1000$ gefundene Werth bereits als constant betrachtet werden kann, wurden abermals 1000 Fäden, die aus funfzehn anderen Gebinden stammten, gemessen. Die folgende Tabelle enthält wieder die Mittelwerthe von je zehn dieser Messungen.

Tabelle II.

5,00	5,84	5,71	6,96	5,67	5,95	5,67	5,31	6,37	4,97
4,74	5,29	5,52	5,82	5,67	5,04	5,31	6,03	5,75	5,65
5,03	6,02	5,51	6,68	5,15	5,68	5,52	4,60	5,03	5,55
5,14	5,97	5,62	5,88	5,68	5,15	5,60	4,97	5,43	5,29
4,82	6,14	5,49	5,86	6,27	5,27	5,45	4,90	6,28	4,92
4,17	6,11	5,78	5,96	6,75	5,17	5,41	4,[illegible]3	4,88	5,19
5,09	7,12	5,44	5,43	6,25	5,32	5,40	5,07	4,99	5,15
4,89	5,58	5,80	5,49	5,87	4,87	4,99	5,53	5,91	4,78
4,80	6,45	5,59	5,27	5,69	4,97	4,48	5,14	5,40	5,09
4,83	6,47	5,23	5,47	5,14	5,83	5,15	4,93	5,42	5,98

Die Zahlen dieser Tabelle geben für d den Werth:

$$d = 0{,}016\,136 \text{ mm},$$

also einen Werth, der von dem aus Tabelle II berechneten nur wenig abweicht. Das Mittel aus beiden ist:

$$d = 0{,}016\,021\,7 \text{ mm}$$

und kann als dem wahren Werth sehr nahekommend betrachtet werden.

Für n Fäden vom Durchmesser d und der Länge h ist die Summe der Mantelflächen M:

$$M = nh\pi d.$$

Diese Formel gibt für 1000 Fäden von 1000 mm Länge eine Mantelfläche von

$$0{,}050\,335 \text{ qm}.$$

Wo es sich, wie bei den nachfolgenden Beobachtungen, um die Oberfläche von Hunderttausenden solcher Glasfäden handelt, ist eine Abzählung derselben nicht ausführbar. Man nimmt daher am zweckmässigsten statt der Anzahl das Gewicht derselbenen als Argument für ihre zu berechnende Mantelfläche. Um dieses zu ermöglichen, sind die Messungen, aus denen die mittleren Durchmesser der Tabellen I und II abgeleitet wurden, in der folgenden Tabelle zu Gruppen gleichen Durchmessers geordnet. Die Spalte *d* gibt die Durchmesser, die Spalte *n* die Anzahl der Fäden von diesem Durchmesser.

Tabelle III.

d	*n*	*d*	*n*	*d*	*n*	*d*	*n*	*d*	*n*	*d*	*n*
1,2	2	3,5	6	4,7	41	5,9	46	7,1	1	8,5	2
2,0	9	3,6	7	4,8	79	6,0	245	7,2	6	8,7	1
2,2	2	3,7	6	4,9	77	6,1	15	7,3	8	8,8	2
2,3	1	3,8	7	5,0	342	6,2	23	7,4	3	9,0	8
2,5	2	3,9	8	5,1	38	6,3	24	7,5	6	9,2	1
2,6	1	4,0	147	5,2	38	6,4	13	7,6	4	9,4	1
2,7	1	4,1	16	5,3	42	6,5	23	7,7	3	9,8	1
2,8	3	4,2	23	5,4	28	6,6	7	7,8	10	9,9	2
3,0	40	4,3	27	5,5	47	6,7	32	7,9	6	10,0	2
3,2	4	4,4	15	5,6	21	6,8	24	8,0	39	10,8	1
3,3	4	4,5	45	5,7	50	6,9	13	8,2	3	11,0	2
3,4	2	4,6	20	5,8	63	7,0	144	8,3	2	12,0	4

Nennt man

G das Gewicht sämmtlicher in Tab. III gruppirter Fäden,

h die bei allen gleiche Länge derselben,

Q die Summe ihrer Querschnitte,

d_i den in Mikrometereinheiten gemessenen Durchmesser der Fäden einer Gruppe,

n_i die Zahl der Fäden in dieser Gruppe und

s das specifische Gewicht der Fäden, so ist:

$$G = s h \tfrac{1}{4} \pi a^2 \sum_i n_i d_i^2 \qquad (2)$$

und:

$$Q = \tfrac{1}{4} \pi a^2 \sum_i n_i d_i^2 , \qquad (3)$$

wo das Summationszeichen sich auf die einzelnen Gruppen bezieht. Die Beobachtungen ergaben:

$$s = 2{,}5056\,, \quad a = 0{,}002\,945\,, \quad \sum_i n_i d_i^2 = 62415{,}4\,,$$

wobei $h = 1000$ mm angenommen ist.

Demnach folgt aus Gleichung (2), dass die in Tab. III aufgeführten zu 1 m Länge angenommenen 2000 Fäden 1,0653 g wiegen, und dass die Summe der beiden Endflächen sämmtlicher 2000 Fäden nur 0,000 000 850 32 qm beträgt. Fasst man das Vorhergehende zusammen, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Auf 1 g des gesponnenen Glases gehen 1877,4 ein Meter lange Fäden, welchen insgesammt zukommt:

eine Mantelfläche von 0,09450 qm,
ein Querschnitt von 0,000 000 798 2 qm,
ein Volumen von 0,39911 ccm.

Um für diese aus dem Durchmesser der Fäden berechneten Werthe eine Controle zu gewinnen, wurden einem Vorrathe von etwa 500 g des gesponnenen Glases fünf Strähnen an verschiedenen Stellen entnommen, diese auf 2 m Länge verkürzt, gewogen und die darin vorhandenen Fäden unter dem Mikroskope auf dem Coordinatennetz des Objectträgers ausgebreitet und gezählt. Diese mit abgeschnittenen Enden der Strähnen ausgeführte Zählung ergab, dass 2483 Fäden von je 2 m Länge 2,6529 g wiegen. Die folgende Vergleichung des aus dieser Zählung und des unabhängig davon aus den Durchmessern abgeleiteten Gewichtes einer gleichen Fädenzahl zeigt, welcher Grad von Genauigkeit sich auf dem eingeschlagenen Wege hat erreichen lassen:

Das Gewicht von 1877,4 Fäden von 1000 mm Länge beträgt

nach der directen Zählung 1,0025 g
aus den Durchmessern berechnet 1,0000 g

Bei den bisherigen Untersuchungen über die Verdichtung von Gasen an der Oberfläche des Glases ist man, wie meistens auch bei Versuchen mit anderen festen Körpern, von der Voraussetzung ausgegangen, dass diese Verdichtung schon nach wenigen Stunden oder Tagen stationär werde. Da, wenn

diese Voraussetzung eine irrige ist, der Werth aller aus solchen Untersuchungen gezogenen Schlüsse in Frage gestellt wird, so schien es mir vor allem geboten, die Abhängigkeit der Gasverdichtung von der Zeit genauer, als es bisher geschehen ist, festzustellen. Ich habe mich dazu des Fig. 1 abgebildeten Apparates bedient. Derselbe besteht aus einem seiner ganzen Länge nach mit eingeätzter Millimeterscala versehenen, an seinem oberen Ende durch den Hahn *b* luftdicht verschliessbaren weiten Messrohr, dass in ein weiteres zur Aufnahme der Glasfäden dienendes Gefäss *A* übergeht. In dem oberen Theile dieses Gefässes befindet sich der luftdicht eingeschliffene, mit der äusseren Luft durch den Glashahn *c* communicirende Stöpsel *C*. Sämmtliche mit sehr consistentem Wachsfett gedichteten Einschleifungen erweisen sich bei den drei Jahre lang fortgesetzten Beobachtungen als vollkommen luftdicht. Das Messrohr *B* war genau calibrirt und dessen Fehler des Quecksilbermeniscus bestimmt; der Hohlraum *V* des leeren Gefässes *A* vom geschlossenen Hahn *b* bis zum geschlossenen Hahn *c* wurde mit Quecksilber ausgemessen und ebenso der Hohlraum der Hahndurchbohrungen. Der Hohlraum *V* ist bei den Versuchen um das Volumen der in demselben eingeschlossenen Glasfäden verringert. Nennt man s_g das specifische Gewicht dieser im Gefäss *A* enthaltenen Fäden und *p* deren Gewicht, so ist der von den Glasfäden freigelassene Raum V_a:

$$V_a = V - \frac{p}{s_g}. \tag{4}$$

Um während des Versuches den Druck im Instrumente ändern zu können, war die Quecksilberwanne mit einer dem Messrohr entsprechenden Vertiefung versehen, in welche dasselbe seiner ganzen Länge nach eingesenkt werden konnte. Die Füllungen des Apparates und die Beobachtungen mit demselben geschahen auf folgende Weise:

Man leitet das für den Versuch bestimmte Gas in völlig getrocknetem Zustande längere Zeit von dem mit einem durchbohrtem Kautschukstöpsel verschlossenen Ende des Messrohres *B* aus durch den Apparat, bis das über dem Hahn *c* austretende Gas sich als völlig rein erweist. Sobald dies

der Fall ist, wird der durchbohrte Kautschukstöpsel, sowie der Hahn *b* und *c* geschlossen und das Instrument in einer für Niveauablesungen geeigneten Quecksilberwanne so aufgestellt, dass das untere Quecksilberniveau in der Röhre etwas höher steht, als das äussere in der Wanne. Man erreicht dies leicht dadurch, dass ein kurzer dicker, in der Röhre befindlicher, durch einen Faden mit dem Stöpsel verbundener Glasstab, der die nöthige Masse Gas verdrängt, zugleich mit dem Stöpsel aus der Röhre unter Quecksilber entfernt wird. Während der Hahn *b* geschlossen bleibt, wird nun das Gefäss *A* durch den Hahn *c* mit einer luftleer gemachten Quecksilberpumpe in Communication gesetzt, so weit als möglich ausgepumpt und, nachdem Druck und Temperatur des in *A* zurückgebliebenen Gasrestes bestimmt ist, der Hahn *c* geschlossen.

Das Gesammtgewicht des jetzt in dem Apparate vorhandenen Gases setzt sich aus drei gesonderten Theilen zusammen: aus dem Gewicht 1) des Theiles, welcher sich in dem abgeschlossenen Raume *A*, 2) desjenigen, welcher in der Durchbohrung des Hahnes *b* und endlich 3) desjenigen, welcher in dem abgeschlossenen Messrohr enthalten ist.

Es sei (in Cubikcentimetern, Millimetern und Centesimalgraden gemessen):

V_a der von den Glasfäden nicht eingenommene Hohlraum des Gefässes *A* (Fig. 1);

V_m der vom Gase in der Messröhre erfüllte Raum;

V_h der Hohlraum der Durchbohrung des Hahnes *b*;

P_a und t_a Druck und Temperatur des Gasrückstandes in V_a;

P_m und t_m Druck und Temperatur des Gases in V_m;

P_h und t_h Druck und Temperatur des Gases in V_h;

s das specifische Gewicht des Gases (Atmosph. Luft = 1);

α der Ausdehnungscoëfficient desselben, so ist das Gesammtgewicht $\mathfrak{G}$ des im Apparate eingeschlossenen Gases in Grammen ausgedrückt:

$$\mathfrak{G} = \frac{s}{0{,}76 \,.\, 773}\left(\frac{P_a V_a}{1+\alpha t_a} + \frac{P_m V_m}{1+\alpha t_m} + \frac{P_h V_h}{1+\alpha t_h}\right).$$

In dem Augenblicke, wo das Gas von diesem Gewichte $\mathfrak{G}$ durch Aufdrehen des Hahnes b mit der Oberfläche der im Gefässe A befindlichen Glasfäden in Berührung gebracht wird, beginnt die Gasverdichtung. Wird nach Ablauf der Zeit T (von dem Oeffnen des Hahnes b an gerechnet) der Druck P und die Temperatur t, unter denen sich das Gas im Instrumente befindet, bestimmt und das Gasvolumen V'_m abgelesen, so ergibt sich aus diesen drei Beobachtungen das Gewicht g oder Volumen v des bis zur Zeit T auf der Oberfläche des Glases verdichteten Gases, wie folgende Betrachtung zeigt: Das Gewicht des im Apparate befindlichen Gases setzt sich jetzt aus vier Theilen zusammen, nämlich aus dem Gewichte des Gases im Gefäss A, in der Messröhre B, in der Hahndurchbohrung b und dem Gewichte g, welches dem bis zur Zeit T auf den Glasfäden verdichteten Gase zukommt. Man hat daher:

$$\mathfrak{G} = \frac{s}{0{,}76\,.\,773}\left(\frac{P V_a}{1+\alpha t} + \frac{P V'_m}{1+\alpha t} + \frac{P V_h}{1+\alpha t}\right) + g$$

und also:

$$g = \frac{s}{0{,}76\,.\,773}\left(\frac{P_a V_a}{1+\alpha t_a} + \frac{P_m V_m}{1+\alpha t_m} + \frac{P_h V_h}{1+\alpha t_h}\right) - \frac{P}{1+\alpha t}(V_a + V_h + V'_m).$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit $773/s$ erhält man in Cubikcentimetern das auf 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck reducirte Gasvolumen v, welches von dem Zeitpunkte der Hahnöffnung bis zur Zeit T auf den Glasfäden verdichtet wurde. Setzt man:

$$(5)\qquad \frac{1}{0{,}76}\left(\frac{P_a V_a}{1+\alpha t_a} + \frac{P_m V_m}{1+\alpha t_m} + \frac{P_h V_h}{1+\alpha t_h}\right) = A,$$

da dieser Werth bei allen Beobachtungen ein und derselben Versuchsreihe derselbe bleibt, so ergibt sich:

$$v = A - \frac{P}{0{,}76\,(1+\alpha t)}(V_a + V_h + V'_m).$$

Nach dieser einfachen Formel sind sämmtliche im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen berechnet. Die numerischen Werthe zur Berechnung der Constante A waren:

$V = 169{,}974$ bei 15^0C.; $s_g = 2{,}5056$; $p = 144{,}265$
$V_a = 112{,}397$ ccm; $P_a = 0{,}00099$ m; $t_a = 15{,}0^0$ C.
$V_h = 0{,}0478$ ccm; $P_h = 0{,}7488$ m; $t_h = 15{,}0^0$ C.
$V_m = 86{,}252$ ccm; $P_m = 0{,}7435$ m; $t_m = 15{,}0^0$ C.

Aus denselben ergibt sich:

$$A = 80172; \quad v = 80{,}172 - \frac{P}{0{,}76\,(1 + 0{,}00366\,t)}\,(112{,}445 + V_m').$$

Die Oberfläche der im Instrument eingeschlossenen 1 m langen Glasfäden betrug:

$$0{,}09450\;p = 13{,}623 \text{ qm}.$$

Das Instrument befand sich in einem nicht zu anderen Versuchen benutzten, nur behufs der Ablesungen betretenen Gaszimmer, dessen Temperatur während eines ganzen Tages nur um wenige Zehntelgrade variirte.

Die Beobachtungen an dem mit Kohlensäure gefüllten Instrumente wurden am 20. April 1880 begonnen. Bereits am 8. August desselben Jahres war die Gascondensation so weit vorgeschritten, dass die 600 mm betragende Theilung der Messröhre zu weiteren Ablesungen nicht mehr auszureichen drohte. Um daher die Ablesungen fortsetzen zu können, musste neue Kohlensäure zu der noch vorhandenen hinzugefügt werden. Es lässt sich dies, ohne eine Störung in der begonnenen Beobachtungsreihe herbeizuführen, auf folgende Weise bewerkstelligen:

Nachdem das zur Zeit T auf den Fäden verdichtete Gasvolumen v_1 bestimmt ist, schliesst man unmittelbar darauf den Hahn b (Fig. 1). In dem abgeschlossenen Gefäss A herrscht jetzt der von der Bestimmung des v_1 her bekannte Druck P_a und die Temperatur t_a. Ist darauf das nöthige Volumen trockenen Gases durch directes Einleiten in die unter Quecksilber mündende Messröhre der noch vorhandenen Kohlensäure hinzugefügt, so wird, nachdem Druck- und Temperaturausgleichung stattgefunden hat, das im Messrohr befindliche neue Kohlensäurevolumen V_m, sowie dessen Druck P_m und dessen Temperatur t_m notirt. Aus diesen Beobachtungsgrössen, für welche sich die nachfolgenden numerischen Werthe ergaben, lässt sich die neue Constante A_1 mit Hülfe der Gleichung (5) berechnen:

$V_a = 112,397$ ccm; $t_a = 18,2^0$ C.; $P = 0,3091$
$V_h = 0,0478$ ccm; $t_h = 18,2^0$ C.; $P_h = 0,3091$
$V_m = 83,265$ ccm; $t_m = 17,3^0$ C.; $P_m = 0,7278$
$v_1 = 33,009$; $A_1 = 117,863$.

Die nach dem 8. August 1880 angestellten Beobachtungen sind mit dieser Constante mittelst der Gleichung:

$$v_2 = 117,863 - \frac{P}{0,76 \,.\, (1 + 0,00366\, t)} (112,445\; V'_m)$$

berechnet. v_2 gibt das Volumen Kohlensäure von 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck in Cubikcentimetern, welches von dem Augenblick an condensirt wurde, wo der Hahn *b* behufs Nachfüllen der Kohlensäure geschlossen wurde. Addirt man zu der Constante 117,863 die zur Zeit des Hahnschlusses bereits verdichtete Kohlensäure $v_1 = 33,009$, so gibt die Gleichung wieder das Volumen v, welches vom Beginn der Versuchsreihe an condensirt wurde.

In der folgenden Tabelle IV sind die mit trockener Kohlensäure erhaltenen Resultate zusammengestellt. Die ersten Zahlen sind Mittel aus mehreren stündlich, dann täglich angestellten Beobachtungen; die später aufgeführten Zahlen geben die in längeren Zeitintervallen erhaltenen Beobachtungen selbst. Die auf den Fäden verdichteten Gasvolumina sind in Cubikcentimetern von 0° C. und 0,76 m Quecksilberdruck, die Temperaturen in Centesimalgraden angegeben, als Einheit des Quecksilberdruckes 5 mm und als Zeiteinheit drei Tage (72 Stunden) angenommen.

Columne I der Tabelle enthält die Zeiten, Columne II die condensirten Gesammtvolumina des Gases, Columne III die Temperaturen und Columne IV die Drucke, welche zu den Zeiten der Columne I stattfanden.

Die Zahlen der folgenden Tabelle sind in Curve 1, 2, 3 Fig. 2 graphisch dargestellt: Curve 1 gibt die Temperaturen, Curve 2 die gesammte Gasverdichtung und Curve 3 die Drucke, sämmtlich bezogen auf die durch die Abscissenaxe gegebenen Beobachtungszeiten und auf die den Zahleneinheiten der Tabelle IV entsprechende Coordinatenaxe.

Tabelle IV.

Col. I	Col. II	Col. III	Col. IV	Col. I	Col. II	Col. III	Col. IV
0,000	0,000	—	—	103,9	42,07	5,7	105,50
0,331	3,351	14,3	85,96	114,7	42,44	9,1	105,90
1,053	6,654	13,5	83,28	127,8	43,33	13,2	106,60
2,464	10,247	13,5	80,00	139,4	45,16	20,7	107,28
4,173	12,407	10,3	78,28	149,0	48,32	21,7	105,58
5,689	13,977	12,3	77,21	162,9	52,53	18,1	101,50
7,342	15,552	13,6	76,30	172,0	54,02	14,5	100,14
9,162	17,488	15,8	75,30	180,7	54,66	9,1	98,36
11,14	19,268	16,8	74,14	192,5	55,42	10,2	98,36
13,36	21,268	16,8	72,64	204,6	56,20	5,5	97,02
15,22	22,095	15,2	71,08	215,4	56,68	4,6	96,80
17,07	23,247	16,6	70,54	225,7	56,84	10,0	97,14
19,87	24,823	19,2	69,56	235,1	57,37	9,9	96,22
23,29	26,815	19,8	68,10	245,7	58,10	14,4	96,98
26,65	28,56	19,8	66,30	256,5	59,63	17,8	96,84
29,81	30,08	23,00	65,70	269,3	61,85	19,5	95,46
32,42	31,46	20,8	64,10	281,1	64,25	18,6	93,62
35,54	32,65	18,4	70,42	292,0	65,96	14,9	91,64
39,03	33,96	18,7	113,92	302,6	66,92	12,3	90,32
42,64	35,47	21,1	113,44	314,5	67,58	6,5	88,20
46,31	36,85	20,4	112,70	322,9	67,83	7,8	88,64
51,41	38,45	15,7	110,64	332,3	68,25	4,7	87,74
56,63	39,36	13,5	109,34	340,5	68,64	5,1	87,44
59,21	39,51	11,3	109,00	348,8	69,01	7,6	88,36
60,88	39,98	11,2	143,42	356,8	69,34	14,0	88,92
62,85	40,17	9,6	142,88	363,4	69,87	18,9	89,94
65,94	40,53	8,5	143,30	369,1	70,26	22,3	89,96
72,06	40,77	9,9	142,40	371,1	70,99	21,8	89,42
74,29	41,10	8,7	143,36	373,1	71,44	20,2	88,72
76,63	41,34	8,4	143,36	375,4	71,96	18,7	88,46
78,70	41,21	9,1	107,10	377,7	72,26	22,6	88,88
83,16	41,37	7,5	106,22	379,7	72,84	25,0	88,62
87,57	41,66	2,6	105,20	381,7	73,52	23,3	104,96
91,68	41,77	−0,8	103,94	382,7	73,85	21,6	104,36
96,49	41,83	5,9	105,12	383,4	73,99	18,3	104,04

Diese Curven zeigen Folgendes:

1) Ein stationärer Zustand der Gasverdichtung wird keineswegs nach wenigen Stunden oder Tagen, sondern nicht einmal nach mehreren Jahren erreicht.

2) Während der dreijährigen Dauer des Versuches fand trotz der instantanen und allmählichen Druck- und Temperaturänderungen niemals eine bemerkbare Loslösung der an der Glasoberfläche verdichteten Kohlensäure statt.

3) Plötzliche Aenderungen des Quecksilberdruckes von 0,3521 auf 0,5696 m, von 0,5450 auf 0,7171 m, von 0,7168 auf

0,5355 m, von 0,4431 auf 0,5248 m lassen keine Veränderung im stetigen Verlaufe der Gasverdichtung erkennen.

4) Innerhalb eines Temperaturintervalles von + 23° C. bis − 0,8° C. erfolgt mit steigender Temperatur eine Beschleunigung, mit abnehmender eine Verzögerung der Gasverdichtung.

5) Die (mit Einschluss der 0,005 qm betragenden inneren Oberfläche des Beobachtungsinstrumentes) 13,628 qm grosse Glasoberfläche hatte an Kohlensäure aufgenommen nach Ablauf

des ersten Jahres 42,91 ccm von 0° und 0,76 m
des zweiten Jahres 57,94 ccm
des dritten Jahres 69,98 ccm,
also im ersten Jahre 42,91 ccm,
im zweiten Jahre 15,03 ccm,
im dritten Jahre 12,04 ccm.

Es wurden mithin in drei Jahren auf 1 qm Glasfläche verdichtet:

5,135 ccm[1]) von 0° und 0,76 m.

Man sieht, dass diese aus dreijährigen Beobachtungen abgeleiteten Resultate mit den Ergebnissen der bisherigen über denselben Gegenstand angestellten Versuche in völligem Widerspruche stehen. Dieser Widerspruch erklärt sich indessen leicht aus der Art, wie die früheren Beobachtungen ausgeführt sind. Man ist dabei von der Voraussetzung ausgegangen, dass schon nach wenigen Stunden oder Tagen ein Maximum der Gasverdichtung eintrete, ohne zuvor durch länger fortgesetzte Beobachtungen die Richtigkeit dieser Voraussetzung ausser Zweifel zu setzen. Ging man von dieser für Kohlensäure und Glas nachweislich unrichtigen Annahme aus, so mussten die auf verändertem Druck bezogenen Gasanhäufungen als Functionen des Druckes sich darstellen, während sie ganz oder zum Theil in Wirklichkeit Functionen der Zeit waren. Ebenso lassen sich aus solchen Versuchen, bei welchen die zwischen den einzelnen Beobachtungen liegenden Zeiträume nicht genauer berücksichtigt wur-

1) Auf die unter dem Quecksilberdruck von 0,99 mm an den Glasfäden noch anhaftenden Gase ist bei dieser Bestimmung nicht Rücksicht genommen.

den, keine richtigen Folgerungen ziehen über die Abhängigkeit der Gasverdichtung von der Temperatur oder der Grösse der verdichtenden Glasflächen.

Die Erscheinungen, welche die auf glatten Glasflächen vor sich gehende Verdichtung der Kohlensäure darbietet, legen die Vermuthung nahe, dass es sich dabei möglicherweise gar nicht um ein Adhäsionsphänomen, sondern lediglich um eine chemische Zersetzung des Glases handelt, und dass demzufolge Glas ein zu solchen Untersuchungen völlig unbrauchbares Material sein könnte. Allein eine solche Vermuthung verliert jeden Halt, wenn man Folgendes in Erwägung zieht: Das trockene Kohlensäureanhydrid ist eine so schwache Säure, dass es bei den hier in Betracht kommenden Temperaturen nicht einmal das im krystallwasserfreien Kaliumhydroxyd enthaltene Wasser auszutreiben und zu ersetzen im Stande ist, während umgekehrt die Kieselsäure eine so grosse Verwandtschaft zu den im Glase vorhandenen Basen besitzt, dass sie die Kohlensäure nicht nur in der Glühhitze aus Kalk- und Natroncarbonat vollständig austreibt, sondern auch selbst beim Kochen in niederen Temperaturen aus den wässerigen Lösungen dieser Salze die Säure frei macht.

Dass die chemische Verwandtschaft des Kohlensäureanhydrids gegen die wasserfreien Basen des Glases die der Kieselsäure zu denselben bei Abwesenheit von Wasser sollte überwinden können, ist um so weniger annehmbar, als sich einer solchen Zersetzung auch noch die Massenwirkung der Kieselsäure, die in dem angewandten Glase fast das Fünffache von der in einem neutralen Silicate enthaltenen Säure beträgt, entgegenstellt. Es bleibt daher nur die Annahme übrig, dass sich die Kohlensäure als solche, ohne in eine chemische Verbindung übergegangen zu sein, an der Oberfläche des Glases befunden hat.

Wie sich eine gravitirende feste oder flüssige Masse mit einer Gasatmosphäre von abnehmender Dichtigkeit umgeben, ebenso müssen sich auch infolge capillarer Anziehungen auf der Oberfläche fester oder flüssiger Körper Gasanhäufungen von abnehmender Dichtigkeit einstellen, und da sich diese von der Oberfläche ausgehenden Anziehungen nach Quincke's

Untersuchungen noch bis auf Entfernungen von 0,000 005 cm verfolgen lassen, so müssen sich die auf 10000 qcm Glasoberfläche im Verlaufe von drei Jahren verdichteten 5,135 ccm Kohlensäure von 0° und 0,76 m Quecksilberdruck in einem Raume von 0,05 ccm befunden, also zum mindesten eine Verdichtung von 5,135 auf 0,05 ccm erlitten haben. Einer solchen Verdichtung entspricht aber ein Druck von 102,7 Atmosphären. Da die Kohlensäure bei der Beobachtungstemperatur 19° C. schon unter einem Drucke von 57,5 Atmosphären flüssig wird, so kann es keinem Zweifel unterliegen, dass die Glasoberfläche mit einer Schicht flüssiger Kohlensäure bedeckt war. Wäre das ganze zu 5,135 ccm bestimmte Gasvolumen als Flüssigkeit vorhanden gewesen, so würde, da das specifische Gewicht der liquiden Kohlensäure bei 19° C. 1,137 ist, die Dicke dieser flüssigen Schicht unter einem Atmosphärendruck nur 0,000 008 88 mm betragen haben. Man begreift aber leicht, dass diese Schicht in Wirklichkeit niemals über diejenige Höhe hinaus anwachsen kann, in welcher der mit der Entfernung abnehmende capillare Druck der Dampftension der liquiden Kohlensäure gleich geworden ist, und dass oberhalb dieser Höhe noch eine gasförmige Kohlensäureatmosphäre von abnehmender Dichtigkeit vorhanden sein muss. Diese Erwägungen erklären zwar die beobachtete Verdichtung des Gases, aber nicht die auf jahrelange Zeiträume ausgedehnte Dauer derselben. In Uebereinstimmung mit der Erfahrung fordert vielmehr die Theorie ein instantanes Eintreten des Gleichgewichtszustandes in von Druckkräften beeinflussten Gasmassen. Die lange Dauer der Gasverdichtung wird daher kaum anders als durch die Annahme begreiflich, dass die Glasmasse für Gase nicht völlig undurchdringlich ist, und dass die Theilchen der liquiden Kohlensäure bei dem Eindringen in die molecularen Interstitien des Glases einen Widerstand zu überwinden haben, der sich, wie der beobachtete Verlauf der Gasverdichtung zeigt, in einem mit der Zeit wachsenden Verhältniss steigert. Nur noch weiter fortgesetzte Beobachtungen können darüber entscheiden, ob es einen Zeitpunkt gibt, wo das Eindringen der flüssigen Kohlensäure in die Glasmasse als verschwindend

klein betrachtet werden darf. Ist ein solcher Punkt erreichbar und erreicht, so müssen die Vorgänge der Gasverdichtung wesentlich andere werden: Die Dicke der flüssigen Kohlensäureschicht wird dann nicht mehr durch Eindringen derselben in das Innere der Glasmassen unter Höhenzunahme der überlagernden Kohlensäureatmosphäre stetig verringert. Mit der nun im Verlaufe der Verdichtung an Höhe zunehmenden Flüssigkeitsschicht wird vielmehr die überlagernde Kohlensäureatmosphäre an Höhe abnehmen und sich mithin auch der Druck, welcher von dieser Atmosphäre auf die Flüssigkeitsoberfläche ausgeübt wird, stetig verringeren, bis ein Druck an der Oberfläche der Flüssigkeit erreicht ist, welcher dem durch die Tension des Kohlensäuredampfes bei der herrschenden Temperatur ausgeübten Drucke gleichkommt. In dem Augenblick, wo dieser Punkt erreicht ist, wird unter übrigens gleichbleibenden Umständen weder Condensation noch Verdampfung an der flüssigen Kohlensäureschicht weiter erfolgen können, dagegen sogleich wieder eintreten müssen, wenn Druck und Temperatur sich ändern. Bei erfolgender Temperaturerhöhung wird jetzt Gas von der flüssigen Kohlensäureschicht entweichen und diese dadurch, sobald ein stationärer Zustand sich wieder hergestellt hat, um eine Höhe verringert sein, die aus dem messbaren losgelösten Gasvolumen berechenbar ist. Es erscheint daher, wenn auch nicht sehr wahrscheinlich, doch nicht unmöglich, für eine Reihe von Temperaturen eine Reihe von Höhendifferenzen der einzelnen stationär gewordenen Kohlensäureniveaus festzustellen und in der den zugehörigen Temperaturen entsprechenden Dampftension der Kohlensäure ein Maass für die capillaren Druckkräfte, welche in diesen Höhendifferenzen ausgeübt werden, zu gewinnen.

Inwieweit diese Schlussfolge zulässig ist, und inwiefern man auf dem angedeuteten Wege Aufschlüsse über capillare Fernwirkungen erwarten darf, wird indessen wesentlich noch von der Frage abhängen, ob dieselben Erscheinungen, von welchen die chemischen Anziehungen begleitet sind, auch bei den Capillarkräften eine Rolle spielen. Denn wenn dies der Fall ist, so wird man nicht berechtigt sein, an der Ober-

fläche der liquiden, das Glas bedeckenden Kohlensäureschicht dieselbe Spannkraft anzunehmen, welche sich für die solchen molecularen Anziehungen nicht ausgesetzte Kohlensäure ergeben hat; ebensowenig als es gestattet sein würde, für eine wässerige Salzlösung die Dampfspannungen des reinen Wassers gelten zu lassen.

Es sei hier noch erwähnt, dass sich atmosphärische Luft gegen glatte Glasflächen ähnlich wie Kohlensäure verhält, dass sich dagegen bei Kohle und ähnlichen von molecularen Interstitien durchsetzten Körpern schon nach verhältnissmässig kurzer Zeit stationäre Zustände der Gasanhäufung einstellen.

Heidelberg, im September 1883.

II. *Dichteregelmässigkeiten normaler Salzlösungen; von C. Bender.*

Durch die Untersuchungen der Dichte von Salzlösungen, welche neben 1 l Wasser ein Aequivalent des betreffenden wasserfreien Salzes in Grammen enthalten (Normallösungen), fand C. A. Valson[1]), dass die Salz- oder Säureradicale mit gewissen constanten Werthen in die Lösungen eintreten, dass also die Dichte einer Normallösung unter Zugrundelegung feststehender Zahlen (Module genannt), für die Aequivalente der Metalle und der Säureradicale berechnet werden kann. Die nachfolgende, von C. A. Valson[2]) entworfene Tabelle illustrirt das Gesagte:

	Cl	Br	J	Fl	SO_4	NO_6
K	1,0444	1,0800	1,1135	1,0468	1,0662	1,0591
NH_4	1,0157	1,0520	1,0847	1,0214	1,0378	1,0307
	0,0287	0,0280	0,0288	0,0254	0,0284	0,0284
	K	Na	NH_4	Ca	Sr	Ba
NO_6	1,0591	1,0540	1,0307	1,0578	1,0811	1,1038
Cl	1,0444	1,0396	1,0157	1,0439	1,0667	1,0887
	0,0147	0,0144	0,0150	0,0139	0,0144	0,0151

1) C. A. Valson, Compt. rend. **73.** p. 441. 1871; Jahresber. f. Chem. 1871. p. 58.

2) C. A. Valson, Compt. rend. **77.** p. 806. 1873.

Um die Werthe der Module einiger Metalle abzuleiten, vergleicht C. A. Valson die Normallösungen der betreffenden Chlormetalle mit der Normalsalmiaklösung, welche unter allen anderen Normalsalzlösungen die kleinste Dichte besitzt. Andere Metallsalze können zu diesem Zweck mit Ammoniaksalzen verglichen werden, welchen die gleiche Säure zu Grunde liegt. Durch Vergleichung einer Normalsalzlösung mit derjenigen, welche die gleiche Basis hat, und deren Säureradical Cl ist, erhält man die Module, mit welchen die Säureradicale in Lösung eintreten. Aus der angegebenen Art der Berechnung der Module folgt, dass hiernach der Gruppe NH_4 sowohl, wie dem Radical Cl der Modul Null zukommen. Die von C. A. Valson angegebenen Module, welche sich (der Dichte der Normalsalmiaklösung 1,015 nach zu schliessen) wohl auf eine Temperatur von 18° C. beziehen, sind folgende in tausendstel Einheiten angegeben:

Formel	NH_4	K	Na	Ca	Mg	Sr	Ba	Mn	Fe	Zn	Cu	Cd	Pb	Ag
Modul	0	30	25	26	20	55	73	37	37	41	42	61	103	105
Formel	Cl	Br	J	SO_4	NO_6	CO_3	C_2O_5(?)							
Modul	0	34	64	20	15	14	16							

Die hier angeführten Zeichen bedeuten Aequivalente. Um aus den Modulen die Dichte einer Normalsalzlösung zu berechnen, hat man zur Dichte der Normalsalmiaklösung = 1,015 den Modul des betreffenden Metalles und denjenigen des betreffenden Säureradicales zu addiren.

Bezeichnen wir die Dichte der Normalsalmiaklösung allgemein mit d_a, den Modul des Metalles mit m_b, denjenigen des Säureradicales mit m_s, so berechnet sich demgemäss die Dichte d einer beliebigen Normalsalzlösung aus der Formel:

$$d = d_a + m_b + m_s. \tag{1}$$

Später hat C. A. Valson[1]) für das Lichtbrechungsvermögen der Normalsalzlösungen, unter Zugrundelegung der Fouqué'schen Resultate[2]) analoge Modulareigenschaften nachgewiesen. Auch die volumchemischen und optisch-

1) Valson, Compt. rend. **76.** p. 224. 1873. — Jahresb. f. Chem 1873. p. 135.

2) Fouqué, Jahresb. f. Chem. 1867. p. 96.

chemischen Untersuchungen von W. Ostwald[1]) deuten auf solche Modulareigenschaften hin.

Die Module für das Lichtbrechungsvermögen sind, in tausendstel Einheiten angegeben:

K,	Na,	NH_4,	Li,	Ca,	Mg,	Al,	Ba,	Mn,	Zn,	Cu,	Cd,	Pb,	Pt
0,	4,	20,	14,	9,	10,	11,	−17,	3,	0,	1,	−13,	−27,	−67

SO_4,	NO_6,	Cl,	Br,	J,	CO_3,	C_2O_5 (?),	CrO_4,	Cr_2O_7
0,	3,	15,	0,	−5,	8,	11,	19,	15

Die chemischen Zeichen drücken auch hier äquivalente Mengen aus, und die zugehörigen Module wurden durch Vergleichung des Lichtbrechungsvermögens der betreffenden Normalsalzlösung von neutralem schwefelsauren Kali in gleicher Weise erhalten, wie dies für die Dichtemodule in dem Vorhergehenden angedeutet ist. Da das Lichtbrechungsvermögen der Normallösung von neutralem schwefelsauren Kali = 0,757 ist, so berechnet sich beispielsweise das Lichtbrechungsvermögen der Chlorbariumlösung (1 Aeq. des wasserfreien Salzes in Grammen in 1 l Wasser gelöst):

$$0,757 - 0,017 + 0,015 = 0,755.$$

Solche Modulareigenschaften deuten, wie schon oben bemerkt, darauf hin, dass bei der Vereinigung von Elementen oder Elementengruppen, diese unter Beibehaltung gewisser physikalischer Constanten in die Verbindung eintreten, welche in solchen Fällen durch die chemischen Eigenschaften der entstehenden Verbindungen nicht wesentlich alterirt werden.

Offenbar kann dieses Gesetz nur ein approximatives sein, was auch von C. Marignac[2]) schon hervorgehoben wurde. Das Gesetz würde für alle Salze gleiche Contractionsverhältnisse voraussetzen, was durch die Untersuchungen von C. A. Valson[3]) selber widerlegt sein dürfte.

C. A. Valson beschränkt die Untersuchung der Dichteregelmässigkeiten der Salzlösungen auf ziemlich verdünnte

1) Ostwald, Jahresb. f. Chem. 1878. p. 27. 1877. p. 28. 1876. p. 23. Journ. pr. Chem. (2) **18.** p. 328—371. 1878.

2) Marignac, Jahresb. f. Chem. 1871. — N. Arch. phys. nat. **42.** p. 74. 1871.

3) Valson, Compt. rend. **73.** p. 1376. 1871.

Lösungen und bemerkt, dass für concentrirtere Lösungen, als die angegebenen, die Regel nicht zutreffe. Ich werde nun in Nachfolgendem zeigen, dass die von Valson beobachtete Regelmässigkeit nur ein Specialfall eines allgemeinen (approximativen) Gesetzes ist, welches auch concentrirte Lösungen einschliesst.

Wie schon erwähnt, enthalten die von C. A. Valson der Betrachtung unterworfenen Normalsalzlösungen neben einem Liter Wasser ein Aequivalent des betreffenden wasserfreien Salzes in Grammen. Man hat hierdurch zwar stets gleiche Mengen des Lösungsmittels, aber wegen der sehr ungleichen Raumverhältnisse der dem Vergleich unterworfenen Lösungen doch keine absolut vergleichbare Grössen. Namentlich verdient dieser Umstand bei den stärker concentrirten Lösungen Beachtung. Eine bessere Vergleichung wird bei Lösungen ermöglicht, welche in einem gegebenen Volumen bei einer gegebenen Temperatur eine gegebene Anzahl Aequivalente (oder Molecüle) enthalten.

Die nachfolgend angegebenen, von mir bezüglich ihrer Dichte untersuchten Lösungen enthalten allgemein μ Grammmolecüle wasserfreien Salzes in 1000 ccm der Lösung bei 15° C. (Wasser von 4° C. = 1 gesetzt). Ihre Dichten werden mit d_{15^0} bezeichnet.

Tabelle 1.

d_{15^0}

μ	NH_4Cl	KCl	NaCl	LiCl	$\frac{1}{2}(BaCl_2)$
1	1,0157	1,0444	1,0401	1,0235	1,0895
2	1,0308	1,0887	1,0788	1,0464	1,1780
3	1,0451	1,1317	1,1164	—	1,2647
4	1,0587	—	1,1522	1,0902	—
5	1,0728	—	1,1888	1,1110	—

Diese Dichten wurden gelegentlich einer grösseren Untersuchung über die Ausdehnungscoëfficienten verschieden concentrirter Salzlösungen, welche nach ihrem Abschluss veröffentlicht werden wird, bestimmt. Hierzu diente ein Dilatometer nach Dr. Reischauer mit etwa 96 ccm Inhalt. Die Wägungen wurden auf den luftleeren Raum reducirt, und die verwendeten Lösungen waren unmittelbar vor dem Versuch

durch rasches und kurz andauerndes Kochen luftfrei gemacht worden. Die Zahlenangaben beziehen sich auf direct in der angegebenen Concentration und mit grosser Sorgfalt hergestellte Lösungen. Die Angaben sind auf $\pm 0{,}0002$ genau, wenn man alle möglichen Fehlerquellen in betracht zieht, welche ich hier nicht eingehend besprechen möchte.

Bildet man den Unterschied Δ zwischen einer beliebigen Lösung der Tabelle 1 und der in der nämlichen Tabelle enthaltenen Salmiaklösung gleicher Concentration, so sieht man alsbald, dass bei fortschreitender Concentration der Unterschied für jede Gruppe der Zahl μ proportional ist.

Tabelle 2.

μ	NH_4Cl	KCl	Δ KCl NH_4Cl	$\frac{\Delta}{\mu}$	Δ NaCl $-NH_4Cl$	$\frac{\Delta}{\mu}$	Δ LiCl $-NH_4Cl$	$\frac{\Delta}{\mu}$	Δ $\frac{1}{2}(BaCl_2)$ $-NH_4Cl$	$\frac{\Delta}{\mu}$
1	1,0157	1,0444	287	287	244	244	078	78	738	738
2	1,0308	1,0887	579	289	480	240	156	78	1472	736
3	1,0451	1,1317	866	289	713	238	—	—	2196	732
4	1,0587	—	—	—	935	234	315	79	—	—
5	1,0728	—	—	—	1160	232	382	76	—	—

Die Proportionalität ist in jeder Reihe durch die Constanz von Δ/μ erwiesen. Für Salze mit eng begrenzter Löslichkeit nimmt die Zahl Δ/μ mit der Concentration allmählich ab. Dies zeigt sich deutlich an den Chlorbariumlösungen. Die hier angeführten Chlorkaliumlösungen scheinen zwar das Gegentheil zu beweisen, doch ist die Leichtigkeit, mit welcher Chlorkalium übersättigte Lösungen eingeht, wohl nicht ohne Einfluss auf die Dichte dieser Lösungen. Auch bei Salzen mit ausgedehnterer Löslichkeit, wie das Chlornatrium, nimmt der Quotient Δ/μ mit der Concentration ab. Einen klaren Einblick gewährt hier die Aufstellung der Beziehungen zwischen Dichte und Concentration durch allgemeine Formeln. Bezeichnen wir wieder mit μ (Molecülzahl) die Anzahl der in 1 l Lösung bei 15° C. enthaltenen Molecüle (in Grammen) wasserfreien Salzes, so stehen die in Tabelle 1 angeführten Dichten (d_{15°) der Salzlösungen mit den Molecülzahlen in folgenden Beziehungen:

NH_4Cl;	$d_{15^0} = 1{,}000\,594 + 0{,}015\,407\,\mu - 0{,}000\,199\,\mu^2$	mittlerer wahrscheinlicher Fehler: ± 0,0002
$NaCl$;	$d_{15^0} = 1{,}001\,020 + 0{,}039\,651\,\mu - 0{,}000\,429\,\mu^2$	
KCl;	$d_{15^0} = 0{,}999\,963 + 0{,}045\,349\,\mu - 0{,}000\,418\,\mu^2$	
$LiCl$;	$d_{15^0} = 1{,}001\,492 + 0{,}022\,238\,\mu - 0{,}000\,060\,\mu^2$	
$\frac{1}{2}(BaCl_2)$;	$d_{15^0} = 0{,}999\,200 + 0{,}091\,200\,\mu - 0{,}000\,900\,\mu^2$	(μ bedeutet hier halbe Molecüle).

Hiervon sind die vier ersten Ausdrücke aus den Dichten einer grösseren Anzahl verschieden concentrirter Lösungen mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet, während der vierte Ausdruck den Angaben der Tabelle 1 sich direct anschliesst. Bemerkenswerth ist das negative Vorzeichen des dritten Gliedes eines jeden Ausdruckes. Die Curven, welche die Beziehungen zwischen Dichte und Concentration darstellen, kehren also ihre concave Seite der Axe der μ zu.

Ueber die mehr oder minder zutreffende Constanz der Rubrik Δ/μ geben diese Formeln genügende Auskunft. Bilden wir so: $NaCl - NH_4Cl$,

$$\frac{\Delta}{\mu} = \frac{0{,}000\,426}{\mu} + 0{,}024\,244 - 0{,}000\,230\,\mu,$$

so erhellt, dass der Ausdruck rechts mit der Vergrösserung der Molecülzahl fortwährend abnimmt. Innerhalb der Grenzen $\mu = 1$ und $\mu = 4$ kann man jedoch diesen Ausdruck als constant ansehen, wenn man auf keine grössere Genauigkeit der Dichte als $\pm\,0{,}001$ Anspruch macht.

Wir bilden noch

$$LiCl - NH_4Cl.$$

$$\frac{\Delta}{\mu} = \frac{0{,}000\,898}{\mu} + 0{,}006\,831 + 0{,}000\,139\,\mu.$$

Hier ist $0{,}000\,898/\mu + 0{,}000\,139\,\mu$ innerhalb weiter Grenzen $\mu = 1$ bis $\mu = 6$ constant anzunehmen, wenn die Genauigkeit der Dichte nicht über $\pm\,0{,}001$ verlangt wird.

Das approximative Gesetz der Constanz von Δ/μ gilt nicht nur für die Chlormetalllösungen allein, es ist evident für alle Metallsalzlösungen mit gleichem Säureradical, und für die verschiedenen Säuren existirt das gleiche Gesetz, wenn man die Salmiaklösungen mit anderen Ammoniaksalzlösungen vergleicht, in welchen das Chlor durch ein anderes Säureradical ersetzt ist. Statt der Ammoniaksalze können auch solche dienen, welche das nämliche Metall ge-

meinsam haben, aber verschiedene Säureradicale besitzen. Ich will dieses durch einige Beispiele erläutern.

Tabelle 3.

	K		d_{15}		Na			
μ	NH_4NO_3	KNO_3	Δ $KNO_3 - NH_4NO_3$	$\frac{\Delta}{\mu}$	$\frac{1}{2}(NH_4SO_4)$	$\frac{1}{2}(Na_2SO_4)$	Δ $\frac{1}{2}(Na_2SO_4) - \frac{1}{2}(NH_4SO_4)$	$\frac{\Delta}{\mu}$
1	1,0320	1,0612	292	292	1,0370	1,0607	237	237
2	1,0630	1,1209	579	289	1,0711	1,1182	471	236

NO_3

μ	NH_4Cl	NH_4NO_3	Δ $NH_4NO_3 - NH_4Cl$	$\frac{\Delta}{\mu}$	KCl	KNO_3	Δ $KNO_3 - KCl$	$\frac{\Delta}{\mu}$
1	1,0157	1,0320	163	163	1,0444	1,0612	168	168
2	1,0308	1,0630	322	161	1,0887	1,1209	322	161
3	1,0451	1,0933	482	161	—	—	—	—
4	1,0587	1,1235	648	162	—	—	—	—
5	1,0728	1,1523	795	159	—	—	—	—

Ich könnte die Tabelle noch beliebig vergrössern, ziehe es jedoch vor, die allgemeinen Resultate der Untersuchung, für deren Klarstellung das Vorliegende ausreicht, weiterem Beweismaterial voranzustellen.

Nachdem die Constanz von Δ / μ durch Tabelle 3 anschaulich gemacht ist, verbinden wir das Valson'sche approximative Gesetz über die Modulareigenschaften der Metallelemente und Säureradicale damit.

Bezeichnen wir mit μ die Molecülzahl einer beliebigen Salzlösung, d. h. die Anzahl der in 1 l Lösung enthaltenen Molecüle des wasserfreien Salzes in Grammen (Grammmolecüle), mit $d_{(\mu)a}$ die Dichte einer Salmiaklösung, welcher die gleiche Molecülzahl μ zukommt, mit m_b, wie in der Relation 1, den Modul des Metallradicale, mit m_s denjenigen des Säureradicales, so wird das allgemeine approximative Gesetz der Dichte (d_μ) der Salzlösungen dargestellt durch die Beziehung:

$$(2) \qquad d_\mu = d_{(\mu)a} + \mu \,.\, (m_b + m_s),$$

wobei sich sämmtliche Grössen auf beiden Seiten nur auf eine bestimmte Temperatur beziehen, von welcher ihr Zahlenwerth abhängig ist.

Für $\mu = 1$ geht Ausdruck (2) in (1) p. 561 über, durch welch letzteren das speciellere Gesetz von C. A. Valson dargestellt ist.

Die Anwendbarkeit des Gesetzes auf eine beliebige Salzlösung wollen wir an einigen Beispielen illustriren.

1. Es soll die Dichte einer Kupfernitratlösung bei 15° C. bestimmt werden, deren Molecülzahl $\mu = 3$ ist.

Aus der später folgenden Tabelle geht hervor, dass

der Modul des Kupfers . . . . $m_b = 0,0437$

„ „ „ Salpetersäureradic. $m_s = 0,0163$ ist

$\mu . (m_b + m_s) = 0,0600 . 3 = 0,1800$

Die Dichte der Salmiaklösung mit gleicher Molecülzahl $d_{\mu(a)}$ . . . . $= 1,0451$

Dichte der Kupfernitatlösung d_μ . . . $= 1,2251$ ber.

1,2250 gef.

0,0001

2. Es soll die Dichte einer Silbernitratlösung bei 18° C. bestimmt werden, deren Molecülzahl $\mu = 4$ ist.

Modul des Silbers . . . . . $m_b = 0,1069$

„ „ Salpetersäureradicales $m_s = 0,0160$

$\mu . (m_b + m_s) = 0,1229 . 4 = 0,4916$

Die Dichte der Salmiaklösung mit gleicher Molecülzahl $d_{\mu'(a)}$ . . . . $= 1,0577$

1,5493 ber.

1,5485 gef.

0,0008

3. Es soll die Dichte einer Lösung von Bromcadmium bei 18° C. bestimmt werden, deren Molecülzahl $\mu = 2$ ist.

Modul des Cadmiums . . . . $m_b = 0,0606$

„ „ Broms . . . . . $m_s = 0,0370$

$\mu . (m_b + m_s) = 0,0976 . 2 = 0,1952$

Dichte der Salmiaklösung mit gleicher Molecülzahl $d_{\mu(a)}$ . . . . $= 1,0299$

Dichte der Bromcadmiumlösung d_μ . . $= 1,2251$ ber.

1,2247 gef.

0,0004

Die Feststellung des genauen Werthes der Module ist mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Vergleicht man die specifischen Gewichte gleich concentrirter Lösungen miteinander, wie sie von verschiedenen Forschern angegeben werden, so gewahrt man nicht selten Differenzen, welche den Werth der einen oder anderen Angabe zweifelhaft erscheinen lassen. Ich habe mich in solch zweifelhaften Fällen wesentlich an diejenigen Dichteangaben gehalten, welche dem Gesetz der Constanz Δ / μ für dasselbe Radical in seinen verschiedenen Verbindungen entsprachen. Die meisten Dichtebestimmungen, welche den Arbeiten anderer Forscher entnommen wurden, gehörten nicht eigentlich zum Thema ihrer Untersuchungen, sondern waren mehr eine etwa wünschenswerthe Ausstattung derselben. In solchen Fällen fehlte in der Regel die Angabe der Zuverlässigkeit der Resultate, welche wohl kaum aus der Anzahl der angegebenen Decimalstellen erschlossen werden kann. Auch gab nur selten eine genauere Beschreibung der Methode der Dichtebestimmung die Möglichkeit einer Urtheilsbildung. An Stelle specieller Temperaturangaben, wie sie eine genaue Dichtebestimmung bedingen, tritt auch manchmal der dehnbare Begriff einer Zimmertemperatur. Aber auch bei speciellen Temperaturangaben wird die Vergleichung der Dichte der Salzlösungen unter einander durch den Umstand erschwert, dass die Beziehungen zwischen Volumen und Temperatur nur für wenige Salzlösungen und deren verschiedene Concentration ermittelt ist. Ueber die vollkommene Reinheit der den Untersuchungen unterworfenen Substanzen scheinen sich nicht alle Forscher hinreichend orientirt zu haben, und tragen in solchen Fällen die Fabrikanten der als puriss. etikettirten Präparate die Verantwortung. Man untersuche jedoch nur einmal beispielsweise das durch mehrfaches Umkrystallisiren gereinigte Kochsalz, und man wird in den meisten Fällen noch die Gegenwart schwefelsaurer Salze in demselben nachweisen können. Weit grössere Vorsicht ist also denjenigen Präparaten gegenüber zu beobachten, welche nicht oder nur sehr schwierig krystallisiren. Dass dieser Umstand bei der Vergleichung der Dichten die eingehendste Berücksichtigung erfuhr, ist selbstverständlich.

Grosses Vertrauen verdienen die Angaben von G. Th. Gerlach[1]). Die der Lösung unterworfenen Salze waren vollkommen rein, und die Correction der Wägungen auf den luftleeren Raum hinreichend genau, sodass die mittelst Auftrieb bestimmten specifischen Gewichte auf vier Decimalstellen genau angenommen werden können. Diese specifischen Gewichte beziehen sich sämmtlich auf Wasser von 15° C. = 1, da jedoch die Dichten sich auf Wasser von 4° C. = 1 beziehen, so müssen zur Berechnung derselben alle Werthe mit 0,99915[2]) multiplicirt werden.

Die Ausdehnungsverhältnisse mehrerer Salzlösungen verschiedener Concentrationen wurden von Gerlach mittelst eines eigens zu diesem Zwecke construirten Dilatometers bestimmt unter Anwendung eines in Fünftelgrade eingetheilten, in die Salzlösung hineinragenden Thermometers und mit Berücksichtigung des von Dulong und Petit angegebenen Werthes des Glasausdehnungscoëfficienten (0,002 586 von 0 — 100° C.). Das angeführte Thermometer reichte bis zu 52° C. Ob eine Vergleichung mit einem Luftthermometer vorlag, lässt sich aus der Abhandlung nicht entnehmen, und nicht einmal über die Empfindlichkeit des zwischen dem Temperaturintervall 52 — 100° C. angewendeten Thermometers spricht sich der Verfasser aus. Für diese Temperaturen geschah die Bestimmung der Ausdehnung in einem anderen Apparate, in welchem die Ausdehnung des Glases durch eine abgewogene, der Ausdehnung gleichzeitig mit unterworfene Menge Quecksilber compensirt wurde. Da jedoch bei diesen Versuchen über der dilatirenden Flüssigkeit eine drückende Quecksilbersäule von beiläufig einer Atmosphäre sich befand, so lässt sich vermuthen, dass durch diesen Druck die Capacität des Dilatometers erhöht wurde. Aus diesen Bemerkungen erhellt, dass den auf die Volumenverhältnisse bezogenen experimentellen Resultaten nicht derjenige Werth beizulegen ist, welchen das feinere Experiment beansprucht.

Eine grössere Anzahl der in vorliegender Abhandlung

1) G. Th. Gerlach, Spec. Gew. der gebräuchlichsten Salzlösungen. Freiberg 1859.

2) Kohlrausch, Leitfaden der prakt. Physik. p. 202.

zu Grunde gelegten specifischen Gewichte entnahm ich weiter den Angaben von Kremers[1]), welche sich auf Wasser von 19,5° C. = 1 beziehen. Diese specifischen Gewichte wurden in einem Dilatometergefäss[2]) durch Wägen bestimmt. Das angewandte und von Heinrich Geissler & Comp. in Bonn angefertigte Thermometer war in Zehntelgrade getheilt. Die anfangs vernachlässigte Correction auf den luftleeren Raum ist bei den Angaben l. c. ausgeglichen. Diese dürften noch in der dritten Decimale zuverlässig sein. Da ich diese Salzlösungen nur mit solchen verglichen habe, deren Dichten sich auf die Temperatur von 18° C. beziehen, so begnügte ich mich mit einer einfachen Umrechnung des specifischen Gewichtes auf Wasser von 4° C. = 1 und unterliess die Correction auf 18° C., welche nur die vierte Decimalstelle beeinflusst hätte. Die Ausdehnung einiger Salzlösungen bei Temperaturerhöhung hat Kremers[3]) mit Hülfe eines besonderen Dilatometers bestimmt, unter Anwendung eines in Zwanzigstelgrade getheilten zuverlässigen Thermometers für die Temperaturen von 0—19,5° C., welches mit dem Normalthermometer des Hrn. Geissler verglichen worden war. Für hohe Temperaturen wandte Kremers sowohl ein in Fünftelgrade eingetheiltes, als auch das in Zehntelgrade getheilte Normalthermometer des Hrn. Geissler an unter steter Rücksichtnahme auf den zeitlichen Nullpunkt. Da die Ausdehnungsversuche sich auf Lösungen bezogen, für welche directe Beobachtungen der Dichten entweder bei der Temperatur 15 oder 18° C. schon durch die Angaben anderer Forscher vorlagen, so machte ich keinen Gebrauch von diesem sonst werthvollen Beobachtungsmaterial.

In ausgiebigstem Maasse dienten mir die Angaben der Dichten in der grossen Arbeit von F. Kohlrausch[4]) über „das electrische Leitungsvermögen der wässerigen Lösungen von den Hydraten und Salzen der leichten Metalle etc.“, welche sich über vielfache Concentrationsunterschiede er-

1) Kremers, Pogg. Ann. **96.** p. 62. 1855.
2) Kremers, Pogg. Ann. **95.** p. 116. 1855.
3) Kremers, Pogg. Ann. **100.** p. 394. 1857.
4) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **6.** p. 1. 1879.

strecken. Diese theils von Kohlrausch selber, theils von Tollinger und Schleiermacher ausgeführten Bestimmungen geschahen bei kleinen Flüssigkeitsmengen unter Anwendung der Mohr'schen Wage und sind alsdann nur auf drei Decimalen angegeben. Die meisten beziehen sich auf die Temperatur 18° C., und nur bei solchen Lösungen, welche eine Controle mit schon vorhandenen bei 15° C. bestimmten Dichten nöthig erscheinen liessen, ist die Bestimmung in der Nähe dieser Temperatur vorgenommen worden. Zur Correction auf genau 18°, resp. 15° fanden die Ausdehnungsbeobachtungen der Salzlösungen von Gerlach Anwendung. Ebenso hat Kohlrausch die Ausdehnung als Function des specifischen Gewichtes nach den von Gerlach beobachteten Zahlen im Mittel dargestellt und hiernach corrigirt. Die Dichten beziehen sich auf Wasser von 4° C. = 1.

Ueber die Zuverlässigkeit der in der Arbeit „über das electrische Leitungsvermögen einiger Salzlösungen von J. H. Long[1])" für die Temperatur 15° C. angegebenen specifischen Gewichte, welche sich auf Wasser von 4° C. = 1 zu beziehen scheinen, gibt nur die Anzahl der angeführten Decimalstellen einige Andeutung.

Die specifischen Gewichte der Cadmiumsalzlösungen sind der Arbeit von O. Grotrian[2]) entlehnt. Sie wurden bei zwei Temperaturen mittelst des Pyknometers bestimmt und daraus durch Interpolation die Werthe für 18° berechnet. (Wasser von 4° = 1 gesetzt?) Eine Vergleichung derselben mit denjenigen von Franz und Kremers für Lösungen gleicher Concentration[3]) ergeben jedoch theilweise Differenzen, welche mehrere Einheiten der dritten Decimale betragen. Die Lösung von salpetersaurem Cadmiumoxyd mit 40 % Gehalt differirt um 0,08 mit dem von Franz gefundenen Werthe. O. Grotrian tritt, auf eine Analyse gestützt, für die Reinheit des letzteren Präparates ein und gibt seinen Resultaten den Vorzug. Ich habe dieselben auch als die wahrscheinlicheren acceptirt, wenn ich auch zugestehen muss,

1) J. H. Long, Wied. Ann. 11. p. 37. 1880.
2) O. Grotrian, Wied. Ann. 18. p. 177. 1883.
3) Franz und Kremers, Wied. Ann. 18. p. 187. 1883.

dass die Modulareigenschaften des Cadmiums bei diesen Salzen sehr maskirt sind.

Die von A. Sprung[1]) gelegentlich einer Untersuchung „über die Flüssigkeitsreibung bei Salzlösungen" bestimmten specifischen Gewichte beziehen sich auf die Zimmertemperatur. Da Wasser von der gleichen Temperatur, für welche ich die willkürliche Annahme = 18° C. mache, den Angaben über die specifischen Gewichte als Einheit voraussichtlich zu Grunde liegt, so wurden die angegebenen Werthe alle auf Wasser von 4° C. = 1 reducirt. Ueber die Zuverlässigkeit der Zahlen lässt sich aus der Abhandlung selber nichts entnehmen. A. Sprung gibt l. c. an, dass die grössten Abweichungen zwischen seinen und Hrn. Gerlach's, sowie Hrn. Kremer's Bestimmungen fünf Einheiten der dritten Decimale beim Bromkalium betragen. Dieser sehr beachtenswerthe Unterschied mag wohl auf Unreinheit der Präparate zurückzuführen sein, wenigstens gibt A. Sprung[2]) an, dass das mehrere mal umkrystallisirte Bromkalium immer noch Spuren von Chlor enthielt. Die Reinigungsmethode, welche Kremers[3]) bei seinen schon als rein bezogenen Salzen anwendete, bietet grössere Sicherheit. Stellt man die Dichten graphisch dar, und zwar als Abscissen die Concentration, als Ordinaten die zugehörige Dichte, so erscheint die nach den Angaben von Kremers construirte Curve schwächer gekrümmt, wie die andere, was auf die grössere Zuverlässigkeit der Kremers'schen Werthe hindeutet. Für die vorliegende Arbeit habe ich die von Kohlrausch l. c. angegebenen Dichten des Bromkaliums benutzt.

Da ich die Dichteangaben für Lösungen benöthigte, welche bei 15°, resp. 18° C. in einem Liter eine ganze Anzahl von Gramm-Molecülen enthielten, so hatte ich für jede angegebene Concentration die betreffende Molecülzahl abzuleiten, was mit Hülfe der Formel:

$$\mu = \frac{10 . pd}{A}$$

1) A. Sprung, Pogg. Ann. **159.** p. 1. 1876.
2) A. Sprung, l. c. p. 11.
3) Kremers, Pogg. Ann. **95.** p. 115. 1855.

geschah, in welcher *p* den Procentgehalt der Lösung, *d* ihre Dichte, *A* deren Moleculargewicht, resp. Aequivalent bedeutet. Bei den Salzen mit zweibasischen Säuren werden nämlich nur halbe Molecüle in Rechnung gezogen, da hierbei die physikalischen Beziehungen der Körper einfacher hervortreten.

Die Berechnung der Dichten der Lösungen mit einer ganzen Anzahl Molecüle geschah durch lineare Interpolation, was insofern erlaubt ist, als die Curven, welche die Beziehungen zwischen Dichte und Concentration ausdrücken, sehr schwach gekrümmt sind. In einzelnen Fällen, in welchen die gegebenen Concentrationen die gewünschte nicht nahe einschlossen, mochte dadurch die dritte Decimale um eine Einheit unsicher werden. Eine genauere Interpolation wäre aber bei der Unsicherheit, welche den meisten Dichteangaben anhaften, werthlos gewesen.

Die kritische Betrachtung des Gegenstandes lehrt uns also, dass die nach den Modularwerthen berechneten Dichten der Salzlösungen in den meisten Fällen nur in der zweiten Decimale zuverlässig sein können, während die dritte Decimale um eine, bei zweifelhaften Fällen sogar um mehrere Einheiten unsicher ist. Die anzuführenden Module sind daher nur angenäherte Werthe, welche in dem Maasse eine Correction erfahren werden, in welchem eine grössere Sorgfalt auf die Dichtebestimmungen verwendet wird, und in welchem namentlich solche Lösungen der Untersuchung unterworfen werden, welche ganze Molecülzahlen enthalten, diese bezogen auf einen gegebenen Raum bei gegebener Temperatur. Wissenschaftlich haben wir überhaupt den Schwerpunkt auf die Molecülzahl zu legen, denn der Begriff der Concentration knüpft sich allein an die Molecülzahl, durch welche sich die physikalischen Beziehungen in einfachster Weise ausdrücken lassen. Die Angabe des Procentgehaltes einer Lösung ist wissenschaftlich von untergeordneter Bedeutung, in der Praxis jedoch geläufig und auch bequem.

Ich will, um die vorliegende Abhandlung nicht zu sehr auszudehnen, die einzelnen interpolirten Lösungen nicht alle anführen und, mir dieses für später vorbehaltend, die aus ihnen abgeleiteten Module angeben.

Tabelle 4.

Module (in $\frac{1}{10000}$ Einheiten).

a. Metalle.

Chem. Zeichen	Module bei 15° C.	Abgel. aus d. Verbindungen mit	Atomgewicht	Modul bei 18° C.	Abgel. aus d. Verbindungen mit	Bemerkungen
NH_4	0		18,4	0		
K	289	Cl, NO_3, ½SO_4	39,13[1])	296	Cl, J	289 ist bis zur 3. Decimale genau
Na	238	Cl, ½SO_4	23,04	235	Cl	(237 aus Cl-, Br-, J-Verb. Zimmerm... 238 ist bis zur 3. Dec. genau.
Li	78	Cl	7,02	77	Cl	78 ist bis zur 3. Dec. genau.
½Ba	735	Cl	$\frac{137,0}{2}$	739	Cl	735 „ „ „ 3. „ „
½Sr	500	Cl	$\frac{87,5}{2}$	522	Cl	Der Werth 500 ist wenig zuverl...
½Ca	—	—	$\frac{40}{2}$	282	Cl	bis zur 3. Dec. genau.
½Mg	210	½SO_4	$\frac{24}{2}$	221	Cl	221 dürfte der zuverlässigere Werth
½Mn	356	Cl	—	—	—	bis zur 3. Dec. genau.
½Zn	410	Cl	$\frac{65,1}{2}$	410	½SO_4	nur bis zur 2. Dec. genau.
½Cd	—	—	—	606	Cl, Br, J, NO_3, ½SO_4	(614 aus Cl-Verbindungen) nur bi... 2. Dec. genau.
½Pb	1087	NO_3	—	—	—	nur aus zwei Lösungen abgeleite...
½Cu	437	NO_3	$\frac{63,5}{2}$	413	½SO_4	nur bis zur 2. Dec. genau.
Ag	—	—	107,9	1069	—	„ „ „ 2. „ „

b. Säureradicale.

Chem. Zeichen	Module bei 15° C.	Abgel. aus d. Verbindungen mit	Atomgewicht	Modul bei 18° C.	Abgel. aus d. Verbindungen mit	Bemerkungen
Cl	0	—	35,46	0		
Br	373	K	79,95	370	NH_4, K, ½Cd	genau bis zur 2. Decimale.
J	—	—	126,8	733	NH_4, K, Na, ½Cd	„ „ „ 3. „
NO_3	163	NH_4, K	62,04	160	Na, ½(Ca, Mg, Cd)	„ „ „ 3. „
½(SO_4)	206	NH_4, Li	$\frac{96,07}{2}$	200	Na, ½Cd	„ „ „ 2. „
$C_2H_3O_2$	−15	K	59			„ „ „ 3. „

1) Für die bei 15° untersuchten Lösungen der KCl-, NaCl-, NH_4Cl-, LiCl-Salze gelten folgende Molecular- und Atomgewichte KCl = 74,58, NaCl = 58,5, NH_4Cl = 53,5, LiCl = 42, Cl = 35,5.

Um den Werth der angeführten Module, die sich theilweise nicht unwesentlich von denjenigen unterscheiden, welche C. A. Valson aufgestellt hat, zu prüfen, berechne ich die Dichten sämmtlicher Lösungen mit der Molecülzahl 3 nach der Formel (2) und vergleiche die so berechneten Werthe mit denjenigen, welche durch Interpolation aus den Angaben verschiedener Forscher und aus meinen directen Messungen gefunden wurden.

G. Th. Gerlach[1]) durch (G.), die Dichten beziehen sich auf die Temp. 15° C., Wasser von 4° C. = 1 gesetzt.

Kremers[2]) durch (Kr.), die Dichten beziehen sich auf die Temp. 19,5° C., Wasser von 4° C. = 1 gesetzt.

F. Kohlrausch[3]) durch (K.), die Dichten beziehen sich auf die Temp. 15 und 18° C., Wasser von 4° C. = 1 gesetzt.

J. H. Long[4]) durch (L.), die Dichten beziehen sich auf die Temp. 15° C., Wasser von 4° C. = 1 (?) gesetzt.

A. Sprung[5]) durch (A. S.), die Dichten beziehen sich auf die Zimmertemperatur, Wasser von 4° C. = 1 gesetzt.

O. Grotrian[6]) durch (O. G.), die Dichten beziehen sich auf die Temp. 18° C., Wasser von 4° C. = 1 gesetzt.

Bender[7]) durch (B.), die Dichten beziehen sich auf die Temp. 15° C., Wasser von 4° C. = 1 gesetzt.

Lösungen mit der Molecülzahl $\mu = 3$.

(2) $$d_\mu = d_{(\mu)\sigma} + \mu . (m_b + m_s).$$

Chloride.

KCl 15° C.	1,1318 ber. 1,1317 gef. (B.)		NaCl 15° C.	1,1165 1,1164 (B.)		LiCl 15° C.	1,0685 1,0677 (B.)[8])
	0,0001 Untersch.			0,0001			0,0008
$\frac{1}{2}(BaCl_2)$ 15° C.	1,2656 1,2647 (B.)		$\frac{1}{2}(SrCl_2)$ 18° C.	1,2006 1,2000 (K.)		$\frac{1}{2}(CaCl_2)$ 18° C.	1,1286 1,1286 (K.)
	0,0009			0,0006			0,0000

1) G. Th. Gerlach, l. c.
2) Kremers, Pogg. Ann. **96**. p. 62. 1855.
3) F. Kohlrausch, l. c.
4) J. H. Long, l. c.
5) A. Sprung, l. c.
6) O. Grotrian, l. c.
7) Tabelle 1.
8) Wurde aus der allgemeinen Formel für LiCl (d_{15}) berechnet.

$\frac{1}{2}(MgCl_2)$ 18° C. 1,1103 / 1,1100 (K.) / 0,0003

$\frac{1}{2}(MnCl_2)$ 15° C. 1,1519 / 1,1520 (L.) / −0,0001

$\frac{1}{2}(ZnCl_2)$ 15° 1,1681 / 1,1647 (L.) / 0,0034

$\frac{1}{2}(CdCl_2)$ 18° C. 1,2258 / 1,2288 (O.G.) / −0,0030

Bromide.

KBr 18° C. 1,2438 / 1,2443 (A.S.) / −0,0005

NaBr 18° C. 1,2261 / 1,2301 (A.S.) / −0,0040

NH_4Br 18° C. 1,1550 / 1,1586 (A. / −0,0036

$\frac{1}{2}(BaBr_2)$ 18° C. 1,3767 / 1,3650 (Kr.) (?) / 0,0111

$\frac{1}{2}(SrBr_2)$ 18° C. 1,3116 / 1,3105 (Kr.) / 0,0011

$\frac{1}{2}(CaBr_2)$ 18° C. 1,2396 / 1,2395 (Kr / 0,0001

$\frac{1}{2}(CdBr_2)$ 18° C. 1,3368 / 1,3359 (O.G.) / 0,0009

Jodide.

KJ 18° C. 1,3527 / 1,3541 (K.) / −0,0014

NaJ 18° C. 1,3344 / 1,3382 (A.S.) / −0,0038

NH_4J 18° C. 1,2639 / 1,2663 (K / −0,0024

$\frac{1}{2}(CdJ_2)$ 18° C. 1,4457 / 1,4445 (O.G.) / 0,0012

Nitrate.

KNO_3 15° C. 1,1807 / 1,1774 (G.) / 0,0033

$NaNO_3$ 18° C. 1,1625 / 1,1594 (K.) / 0,0031

NH_4NO_3 15° C. 1,0940 / 1,0933 (/ 0,0007

$\frac{1}{2}(SrN_2O_6)$ 15° C. 1,2439 / 1,2422 (L.) / 0,0017

$\frac{1}{2}(CaN_2O_6)$ 18° C. 1,1766 / 1,1781 (K.) / −0,0015

$\frac{1}{2}(MgN_2O_6)$ 18° C. 1,1583 / 1,1567 (/ 0,0016

$\frac{1}{2}(CdN_2O_6)$ 18° C. 1,2739 / 1,2806 (O.G.) / −0,0067

$\frac{1}{2}(CuN_2O_6)$ 15° C. 1,2251 / 1,2350 (L.) / 0,0001

$\frac{1}{2}AgNO_3$ 15° C. 1,4127 / 1,4125 (/ 0,0002

Sulfate.

$\frac{1}{2}(NH_4)_2SO_4$ 15° C. 1,1069 / 1,1038 (K.) / 0,0031

$\frac{1}{2}(MgSO_4)$ 15° C. 1,1699 / 1,1665 (K.) / 0,0034

$\frac{1}{2}(ZnSO_4)$ 18° C. 1,2270 / 1,2281 (/ −0,0011

$\frac{1}{2}CdSO_4$ 18° C. 1,2858 / 1,2841 (O.G.) / 0,0017

$\frac{1}{2}(CuSO_4)$ 18° C. 1,2279 / 1,2279 (K.) / 0,000

Acetate.

Substanz	Temp.	Werthe	Differenz
$KC_2H_3O_2$	15° C.	1,1273 / 1,1270 (K.)	0,0003

Ich habe für die vorhergehenden Lösungen die Molecülzahl $\mu = 3$ gewählt, weil für viele derselben die maximale Concentration dieser Molecülzahl sehr nahe kommt. Verdünntere Lösungen schliessen sich dem allgemeinen Gesetz selbstverständlich weit näher an, doch mag es wünschenswerth erscheinen, auch mit Lösungen, welche eine noch grössere Molecülzahl besitzen, Vergleiche anzustellen.

Lösungen mit der Molecülzahl $\mu = 4$.

Chloride.

Substanz	Temp.	Werthe	Differenz
NaCl	15° C.	1,1539 her. / 1,1522 gef. (B.)	0,0017
LiCl	15° C.	1,0899 / 1,0902 (B.)	−0,0003
$\frac{1}{2}(MgCl_2)$	18° C.	1,1461 / 1,1440 (K.)	0,0021
$\frac{1}{2}(MnCl_2)$	15° C.	1,2011 / 1,2008 (L.)	0,0003
$\frac{1}{2}(ZnCl_2)$	15° C.	1,2227 / 1,2144 (L.)	0,0083
$\frac{1}{2}(CdCl_2)$	18° C.	1,3001 / 1,3024 (O.G.)	−0,0023

Bromide.

Substanz	Temp.	Werthe	Differenz
KBr	18° C.	1,3241 / 1,3250 (A.S.)	−0,0009
NH_4Br	18° C.	1,2057 / 1,2082 (A.S.)	−0,0025
$\frac{1}{2}(BaBr_2)$	18° C.	1,5013 / 1,4848 (Kr.)	0,0165 (?)
$\frac{1}{2}(SrBr_2)$	18° C.	1,4145 / 1,4130 (K.)	0,0015
$\frac{1}{2}(CaBr_2)$	18° C.	1,3185 / 1,3175 (Kr.)	0,0010
$\frac{1}{2}(CdBr_2)$	18° C.	1,4481 / 1,4464 (O.G.)	0,0017

Jodide.

Substanz	Temp.	Werthe	Differenz
KJ	18° C.	1,4693 / 1,4694 (K.)	−0,0001
NaJ	18° C.	1,4449 / 1,4493 (A.S.)	−0,0044
NH_4J	18° C.	1,3509 / 1,3558 (K.)	−0,0049

Nitrate.

Substanz	Temp.	Werthe	Differenz
$NaNO_3$	18° C.	1,2077 / 1,2101 (K.)	−0,0044
NH_4NO_3	15° C.	1,1239 / 1,1235 (K.)	0,0004
$\frac{1}{2}(SrN_2O_6)$	15° C.	1,3239 / 1,3178 (L.)	0,0061
$\frac{1}{2}(CaN_2O_6)$	18° C.	1,2345 / 1,2353 (K.)	0,0008
$\frac{1}{2}(CdN_2O_6)$	18° C.	1,3641 / 1,3719 (O.G.)	−0,0078
$\frac{1}{2}(CuN_2O_6)$	15° C.	1,2987 / 1,2958 (L.)	0,0029
$AgNO_3$	18° C.	1,5493 / 1,5485 (K.)	0,0008

Sulfate.

$\frac{1}{4}((NH_4)_2SO_4)$ 15° C.	1,1411 1,1342 (K.) 0,0069	$\frac{1}{2}(MgSO_4)$ 15° C.	1,2251 1,2173 (K.) 0,0078

Vorstehende Reihe von Salzlösungen wird genügen, um den Grad der Genauigkeit zu zeigen, welchen das durch Gleichung (2) ausgedrückte approximative Gesetz besitzt. Bei der Unsicherheit, welche den meisten Dichtebestimmungen anhaftet, lässt sich im Durchschnitt nur eine Genauigkeit bis zur zweiten Decimale erwarten, und dieser genügt das Gesetz in den meisten Fällen. Eine wesentliche Ausnahme findet sich nur bei den Lösungen des $\frac{1}{2}(BaBr_2)$, welche wohl später noch aufgeklärt werden wird.

Als interessant wäre noch zu erwähnen, dass die Alkalien in kaustischem Zustande mit doppelten Modularwerthen in Lösung zu treten scheinen.

Es genügt mir, in vorliegender Abhandlung auf die weitgehenden Dichteregelmässigkeiten der Salzlösungen einstweilen aufmerksam gemacht zu haben. Weitere interessante Betrachtungen, welche sich an dieselben anschliessen, behalte ich mir für später vor. Namentlich ist es mir von Wichtigkeit, ähnliche Resultate für anorganische Doppelsalze aufzuhellen und in die schwierigen Verhältnisse organischer Verbindungen einzudringen, von welchen zu erwarten steht, dass die Radicale derselben ebenfalls mit constanten Modularwerthen in irgend welches Lösungsmittel eintreten.

Speyer, im August 1883.

III. *Das Gesetz der Rotationsdispersion; von E. Lommel.*

Am Schlusse meiner Abhandlung: „Theorie der elliptischen Doppelbrechung“[1]) habe ich die Formel:

(A) $$\Delta = C \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n \lambda^2}$$

1) Lommel, Wied. Ann. 15. p. 378. 1882.

aufgestellt, welche die Drehung Δ der Polarisationsebene als Function der Wellenlänge λ und des Brechungscoëfficienten n der drehenden Substanz darstellt, und habe gezeigt, dass dieser Ausdruck mit der Erfahrung (nämlich mit den Beobachtungen Stefan's am Bergkrystall) in befriedigender Weise übereinstimmt.

Diese Formel ist aus den vollständigeren Gleichungen der Theorie durch eine Reihe von Approximationen abgeleitet worden und kann daher selbstverständlich nur auf eine angenäherte Gültigkeit Anspruch erheben.

Ich möchte nun zeigen, dass, wenn man in der Annäherung an die Forderungen der Theorie einen Schritt weiter geht, Formeln gewonnen werden, die sich den Beobachtungen noch besser anschliessen, als die obige Formel (A).

Für den Phasenunterschied D der beiden elliptisch polarisirten Wellen, deren Normale durch die Richtungscosinus u_3, v_3, w_3 bestimmt ist, wurde in der citirten Abhandlung der für farblos durchsichtige Mittel näherungsweise gültige Ausdruck gefunden:

$$(1)\quad D = qz \cdot \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{2}{s_1 s_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)} \sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2-N_1)^2 + T_3^2 + 4\delta^2 w_3^4 q^2},$$

worin s_1 und s_2 die beiden aus der Gleichung:

$$(2)\quad s = \tfrac{1}{2}(N_1 + N_2 - 2q^2) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\delta^2 w_3^4 q^2}$$

hervorgehenden Werthe bedeuten.

Pflanzen sich die beiden Wellen als entgegengesetzt kreisförmig polarisirte längs der optischen Axe eines einaxigen Krystalles oder nach einer beliebigen Richtung in einem isotropen activen Mittel fort, so hat man:

$$u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = 1, \quad N_1 = N_2 = p^2, \quad T_3 = 0$$

zu setzen, und die vorstehenden Ausdrücke gestalten sich einfacher wie folgt:

$$(3)\qquad D = z \cdot \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{4\delta q^2}{s_1 s_2\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)} \quad \text{und}$$

$$(4)\qquad s_1 = p^2 - q^2 + 2\delta q, \qquad s_2 = p^2 - q^2 - 2\delta q.$$

Darin bedeuten z die Dicke der durchlaufenen Schicht, c_1 und c_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden

entgegengesetzt circular polarisirten Wellen (die Geschwindigkeit im leeren Raume = 1 gesetzt), $q = 2\pi/\lambda$ ihre mit 2π multiplicirte Schwingungszahl, und $p = 2\pi/\lambda_0$ die mit 2π multiplicirte Schwingungszahl des Absorptionsstreifens, während $4m\nu^2/\mu$ und δ Constante sind.

Nun ist aber, wenn wir von einer bereits bei Herleitung des Ausdruckes D benutzten Annäherung abermals Gebrauch machen:

$$(5)\qquad \frac{1}{c_1^2} - 1 = \frac{4m\nu^2}{\mu}\cdot\frac{1}{s_1}, \qquad \frac{1}{c_2^2} - 1 = \frac{4m\nu^2}{\mu}\cdot\frac{1}{s^2}.$$

Bezeichnet man ferner mit n den Brechungscoëfficienten, den die Substanz bei Abwesenheit des Drehungsvermögens (d. i. wenn $\delta = 0$ wäre) besitzen würde, so hat man mit demselben Grade von Annäherung[1]):

$$(6)\qquad p^2 - q^2 = \frac{4m\nu^2}{\mu}\cdot\frac{1}{n^2-1};\ \text{folglich:}$$

$$(7)\qquad s_1 = \frac{4m\nu^2}{\mu}\cdot\frac{1}{n^2-1} + 2\delta q, \quad s_2 = \frac{4m\nu^2}{\mu}\cdot\frac{1}{n^2-1} - 2\delta q, \ \text{und:}$$

$$(8)\qquad \frac{1}{s_1 s_2} = \left(\frac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot\frac{(n^2-1)^2}{1-\left(\frac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2 4\delta^2 q^2 (n^2-1)^2}.$$

Ferner hat man:

$$\frac{1}{c_1^2} = 1 + \frac{n^2-1}{1+\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot 2\delta q\,(n^2-1)}, \quad \text{oder:}$$

$$(9)\qquad \frac{1}{c_1^2} = n^2\cdot\frac{1+\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot 2\delta q\cdot\frac{n^2-1}{n^2}}{1+\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot 2\delta q\,.\,(n^2-1)}.$$

Wird der Nenner des Ausdruckes zur Rechten in eine nach Potenzen seines zweiten Gliedes fortschreitende Reihe entwickelt, so ergibt sich:

$$(10)\qquad \frac{1}{c_1^2} = n^2\left(1+\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot 2\delta q\cdot\frac{n^2-1}{n^2}\right)\left(1-\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot 2\delta q\,(n^2-1) + \left(\frac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot 4\delta^2 q^2 (n^2-1)^2 - \ldots\right).$$

Vernachlässigt man bei weiterer Entwickelung dieses Ausdruckes diejenigen Glieder, welche mit höheren Potenzen

1) Lommel, Wied. Ann. 4. p. 65. 1878.

der kleinen Grösse δ als der zweiten behaftet sind, so kommt:

$$(11)\quad \frac{1}{c_1^2} = n^2\left(1 - \frac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\cdot 2\,\delta q\cdot\frac{(n^2-1)^2}{n^2} + \left(\frac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\right)^2\cdot 4\,\delta^2 q^2\cdot\frac{(n^2-1)^3}{n^2}\right),$$

und, wenn man unter derselben Voraussetzung die Quadratwurzel zieht:

$$(12)\quad \frac{1}{c_1} = n\left(1 - \frac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\cdot\delta q\cdot\frac{(n^2-1)^2}{n^2} + \left(\frac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\right)^2\cdot 2\,\delta^2 q^2\cdot\frac{(n^2-1)^3}{n^2}\right).$$

Ebenso findet man:

$$(13)\quad \frac{1}{c_2} = n\left(1 + \frac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\cdot\delta q\cdot\frac{(n^2-1)^2}{n^2} + \left(\frac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\right)^2\cdot 2\,\delta^2 q^2\cdot\frac{(n^2-1)^3}{n^2}\right).$$

Lässt man, in erster Annäherung, die Glieder mit der zweiten Potenz von δ vorerst ausser Acht, so hat man:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c_1} = n\left(1 - \dfrac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\cdot\delta q\cdot\dfrac{(n^2-1)^2}{n^2}\right), \\[2ex] \dfrac{1}{c_2} = n\left(1 + \dfrac{\mu}{4\,m\,\nu^2}\cdot\delta q\cdot\dfrac{(n^2-1)^2}{n^2}\right), \end{cases}$$

und es ergibt sich:

$$(15)\qquad \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) = n,$$

d. h. das arithmetische Mittel der reciproken Geschwindigkeiten der in einer circularpolarisirenden Substanz sich fortpflanzenden beiden kreisförmig polarisirten Strahlen ist sehr nahe gleich dem Brechungscoëfficienten, welchen die Substanz bei Abwesenheit des Drehungsvermögens zeigen würde; bei einaxigen circularpolarisirenden Krystallen also gleich dem Brechungscoëfficienten des senkrecht zur Axe sich fortpflanzenden linear polarisirten ordinären Strahles.

Da sich bei diesem Grade der Annäherung ebenso gut auch:

$$(16)\qquad \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{n}$$

ableiten lässt, so ist der vorstehende Satz (welcher übrigens unserer Theorie zufolge auch für die magnetische Circularpolarisation gilt) identisch mit dem von Cornu[1]) für den

1) Cornu, Compt. rend. 92. p. 1365. 1881, Beibl. 6. p. 236. 1882.

Bergkrystall ausgesprochenen Gesetz, wonach der Mittelwerth der beiden Geschwindigkeiten gleich der Geschwindigkeit des ordinären linear polarisirten Strahles senkrecht zur Axe ist.

Gehen wir jedoch, wie die gegenwärtige Untersuchung es erheischt, in der Annäherung eine Stufe weiter, so erhalten wir durch Addition der Gleichungen (12) und (13):

$$(17)\qquad \frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=2n\left(1+\left(\frac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot 2\delta^2 q^2\cdot\frac{(n^2-1)^2}{n^2}\right).$$

Die Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (8) ergibt nun:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{s_1 s_2\left(\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}\right)} \\ =\left(\dfrac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot\dfrac{(n^2-1)^2}{2n\left(1-\left(\dfrac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot 4\delta^2q^2(n^2-1)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2 2\delta^2q^2\cdot\dfrac{(n^2-1)^2}{n^2}\right)} \end{cases}$$

oder, wenn man im Nenner des Ausdruckes zur Rechten das Glied mit der vierten Potenz von δ unterdrückt:

$$(19)\qquad \frac{1}{s_1 s_2\left(\dfrac{1}{c_1}+\dfrac{1}{c_2}\right)}=\left(\frac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot\frac{(n^2-1)^2}{2n\left(1-\left(\dfrac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot 2\delta^2q^2\cdot\dfrac{(n^2-1)^2(n^2+1)}{n^2}\right)}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (3) ein, so erhält man den Phasenunterschied D der beiden circularen Strahlen in folgender Gestalt:

$$(20)\qquad D=z\cdot\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot\frac{2\delta q^2(n^2-1)^2}{n\left(1-\left(\dfrac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot 2\delta^2q^2\cdot\dfrac{(n^2-1)^2(n^2+1)}{n^2}\right)}.$$

Diesem Phasenunterschied ist aber die von einer Schicht der wirksamen Substanz hervorgebrachte Drehung $\varDelta$ der Polarisationsebene proportional, oder es ist, wenn C eine Constante bedeutet:
$$\varDelta = CD.$$
Schreiben wir daher statt q seinen Werth $2\pi/\lambda$ und setzen:

$$C\cdot z\cdot\frac{\mu}{4m\nu^2}\cdot 2\delta\,.\,4\pi^2=a,\qquad \left(\frac{\mu}{4m\nu^2}\right)^2\cdot 2\delta^2.\,4\pi^2=b,$$

sodass a und b constante Grössen sind, so erhalten wir die Drehung der Polarisationsebene in ihrer Abhängigkeit von

Wellenlänge und Brechungsindex ausgedrückt durch die Formel:

$$(\mathrm{I}) \qquad \varDelta = \frac{a(n^2-1)^2}{n\lambda^2\left(1 - b\,.\,\frac{(n^2-1)^2(n^2+1)}{n^2\lambda^2}\right)}.$$

Aus dieser Gleichung geht die frühere Formel (A) hervor, wenn man $b = 0$ setzt, d. h. wenn man bereits die zweite Potenz von δ ausser Acht lässt.

Bedenkt man nun, dass der Brechungscoëfficient n mit abnehmender Wellenlänge wächst, während der eingeklammerte Factor im Nenner des vorstehenden Ausdruckes gleichzeitig abnimmt, so kann man das Product:

$$n\left(1 - b\,.\,\frac{(n^2-1)^2(n^2+1)}{n^2\lambda^2}\right),$$

als annähernd constant betrachten und mit der Constanten a verschmelzen. Wir gelangen so zu der Formel:

$$(\mathrm{II}) \qquad \varDelta = \frac{a(n^2-1)^2}{\lambda^2},$$

welche, obgleich noch einfacher als die Formel (A), dennoch den Forderungen der Theorie besser als diese genügt, indem sie das Vorhandensein des mit b behafteten Gliedes wenigstens summarisch berücksichtigt.

Zur Vergleichung dieses Ergebnisses der Theorie mit der Erfahrung stehen vor allem die ausgedehnten und sorgfältigen Messungen von Soret und Sarasin[1]) am Bergkrystall zu Gebote, welche sich von der Fraunhofer'schen Linie A ($\lambda = 0{,}7604$ Tausendstel Millimeter) bis zur Cadmiumlinie 26 ($\lambda = 0{,}21431$) und von 12° bis 236° Drehung erstrecken. In der folgenden Tab. I sind die beobachteten Werthe mit den nach Formel (II) berechneten zusammengestellt. Die zweite Columne der Tabelle enthält die Wellenlängen in Luft, für die Fraunhofer'schen Linien nach Ångström, für die ultravioletten Cadmiumlinien nach Cornu; in der dritten Columne stehen die Brechungscoëfficienten, für die Sonnenlinien nach Mascart, für die Linien des Cadmiums nach Sarasin. Die mit (*) bezeichneten Werthe der

1) Soret und Sarasin, Arch. de Gen. 8. p. 5, 97, 201. 1882. — Beibl. 6. p. 942. 1882.

Brechungscoëfficienten sind interpolirt. Die folgenden beiden Columnen enthalten die an zwei Quarzexemplaren beobachteten Drehungswinkel, und zwar sind diejenigen Werthe, über deren Genauigkeit Zweifel bestehen, weil die Linien, auf welche sie sich beziehen, schwierig zu beobachten sind, in Klammern eingeschlossen. Die sechste Columne gibt die aus Formel (II) berechneten Drehungswinkel. Die Constante a wurde als Mittelwerth aus den nicht eingeklammerten und nicht besternten Beobachtungen am Quarz Nr. 2 berechnet.

Tabelle I.

Bergkrystall.

$$\varDelta = \frac{a\,(n^2-1)^2}{\lambda^2}. \qquad \log a = 0{,}595\,812\,5.$$

Spectral-linien	λ	n	$\varDelta$ beob. Quarz Nr. 2	$\varDelta$ beob. Quarz Nr. 4	$\varDelta$ ber.	D_2	D_4
A	0,760 4	1,539 02	[12,668]°	[12,628]°	12,772°	−0,104°	−0,144°
a	0,718 36	1,540 187	14,304	14,2984	14,386	−0,082	−0,088
B	0,686 71	1,540 99	15,746	—	15,800	−0,054	—
C	0,656 21	1,541 88	17,318	17,307	17,372	−0,054	−0,065
D_2	0,589 513	1,544 19	21,684	21,696	21,748	−0,064	−0,052
D_1	0,588 912	1,544 19	21,727	21,724	21,793	−0,066	−0,069
E	0,526 913	1,547 18	27,543	27,537	27,588	−0,045	−0,051
F	0,486 074	1,549 66	32,773	32,749	32,776	−0,003	−0,027
G	0,430 725	1,554 29	[42,604]	[42,568]	42,602	+0,002	−0,034
h	0,410 12	1,556 3 *	47,481	47,492	47,406	+0,075	+0,086
H	0,396 81	1,558 16	[51,193]	[51,182]	51,053	+0,140	+0,129
K	0,393 33	1,558 3 *	[52,155]	—	51,992	+0,163	—
L	0,381 96	1,560 19	[55,625]	—	55,589	+0,036	—
M	0,372 62	1,561 49	58,894	58,876	58,742	+0,152	+0,134
Cd 9	0,360 90	1,563 48	[63,268]	[63,229]	63,162	+0,106	+0,067
N	0,358 18	1,564 00	[64,459]	—	64,269	+0,190	—
Cd 10	0,346 55	1,566 17	69,454	—	69,302	+0,152	—
O	0,344 06	1,566 68	70,587	70,588	70,463	+0,124	+0,125
Cd 11	0,340 15	1,567 44	72,448	—	72,329	+0,119	—
P	0,336 00	1,568 42	74,571	74,592	74,440	+0,131	+0,152
Q	0,328 58	1,570 0	78,579	78,598	78,369	+0,210	+0,229
Cd 12	0,324 70	1,570 94	[80,459]	—	80,577	−0,118	—
R	0,317 98	1,572 90	[84,972]	[84,991]	84,726	+0,246	+0,265
Cd 17	0,274 67	1,587 50	121,052	121,063	120,772	+0,280	+0,291
„ 18	0,257 13	1,596 24	143,266	143,229	142,902	+0,364	+0,327
„ 23	0,231 25	1,614 02	[190,426]	—	189,947	+0,479	—
„ 24	0,226 45	1,618 16	201,824	201,770	201,401	+0,423	+0,369
„ 25	0,219 35	1,625 02	220,731	220,69145	220,592	+0,139	+0,099
„ 26	0,214 31	1,630 40	235,972	—	236,050	−0,078	—

In den beiden letzten Columnen endlich sind die Differenzen D_3 und D_4 zwischen Beobachtung und Rechnung verzeichnet, nämlich diejenigen Grössen, welche man zu den berechneten Werthen hinzufügen muss, um die beobachteten zu erhalten. (Siehe Tab. I p. 584.)

Wenn man bedenkt, dass sich die Rechnung auf zwei voneinander völlig unabhängige Beobachtungsreihen, die der Wellenlängen und die der Brechungscoëfficienten, gründet, während die Formel nur eine Constante enthält, so darf man die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen gewiss als eine sehr befriedigende bezeichnen. Die Boltzmann'sche Formel:

$$\Delta = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \cdots$$

(welche übrigens auch aus unserer Theorie durch Reihenentwickelung der obigen Ausdrücke hervorgeht) gibt mit zwei Constanten Abweichungen von mehr als 2,5° und erreicht erst mit vier Constanten einen Grad der Uebereinstimmung, welcher mit demjenigen unserer einconstantigen Formel (II) vergleichbar ist.

Wie ich früher mehrfach gezeigt habe[1]), lässt sich der Brechungscoëfficient farblos durchsichtiger Körper sehr nahe durch die einfache Dispersionsformel:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

darstellen. Setzt man diesen Werth von $n^2 - 1$ in die Formel (II) ein, so gelangt man zu folgendem neuen Ausdruck für die Rotationsdispersion:

$$\text{(III)} \qquad \Delta = \frac{a}{\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2},$$

welcher zwei Constante a und λ_0^2 enthält, dagegen von dem Brechungscoëfficienten unabhängig ist.

Die Berechnung der Beobachtungen von Soret und Sarasin nach dieser Formel (III) führt zu folgender Tabelle:

---

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 347. 1878; 8. p. 628. 1879; 13. p. 354. 1881.

Tabelle II.

Bergkrystall.

$$\Delta = \frac{a}{\lambda^2\left(1-\frac{\lambda_0^{\,2}}{\lambda^2}\right)^2}. \quad \log a = 0{,}855\,591\,2. \quad \log \lambda_0^{\,2} = 7{,}935\,125\,7-10.$$

Spectral-linien	Δ beob. Quarz Nr. 2	Δ beob. Quarz Nr. 4	Δ berechnet	D_2	D_4
A	[12,668]°	[12,628]°	12,780°	−0,112°	−0,152°
a	14,304	14,2984	14,372	−0,068	−0,074
B	15,746	—	15,778	−0,032	—
C	17,318	17,307	17,340	−0,022	−0,033
D_2	21,684	21,696	21,697	−0,013	−0,001
D_1	21,727	21,724	21,744	−0,017	−0,020
E	27,543	27,537	27,510	+0,033	+0,027
F	32,773	32,749	32,692	+0,081	+0,057
G	[42,604]	[42,568]	42,509	+0,095	+0,059
h	47,481	47,492	47,361	+0,120	+0,131
H	[51,193]	[51,182]	50,966	+0,227	+0,216
K	[52,155]	—	51,979	+0,176	—
L	[55,625]	—	55,514	+0,111	—
M	58,894	58,876	58,706	+0,188	+0,170
Cd 9	[63,268]	[63,229]	63,130	+0,138	+0,099
N	64,459	—	64,231	+0,228	—
Cd 10	69,454	—	69,294	+0,160	—
O	70,587	70,588	70,442	+0,145	+0,146
Cd 11	72,448	—	72,350	+0,098	—
P	74,571	74,592	74,445	+0,126	+0,147
Q	78,579	78,598	78,436	+0,113	+0,162
Cd 12	[80,459]	—	80,658	−0,199	—
R	[84,972]	[84,991]	84,746	+0,226	+0,245
Cd 17	121,052	121,063	121,131	−0,079	−0,068
„ 18	143,266	143,229	143,387	−0,121	−0,158
„ 23	[190,426]	—	190,527	−0,101	—
„ 24	201,824	201,770	201,999	−0,175	−0,229
„ 25	220,731	220,69145	221,120	−0,389	−0,429
„ 26	235,972	—	236,526	−0,554	—

Die Constanten a und λ_0^2 sind aus denselben Daten welche der Berechnung der Tab. I zu Grunde liegen, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen ist im ganzen sogar noch etwas besser, als bei Formel (II). Es ist indess zu bemerken, dass das Gültigkeitsgebiet der Formel (III) nothwendig ein beschränkteres ist. Denn da der eingeklammerte Factor des Nenners gegen Null rückt, wenn λ sich dem Werthe λ_0 nähert, so muss sich die Curve der nach (III) berechneten Δ bei abnehmendem λ schliess-

lich über die Curve der beobachteten Δ erheben und ins Unendliche ansteigen. Dies wird um so früher eintreten, je grösser der Werth von λ_0 ist. Bei der vorliegenden Beobachtungsreihe macht sich dieser Umstand erst bei den Linien Cd 25 und Cd 26 und auch hier nur in sehr geringem Maasse geltend.

Dagegen bietet die Formel (III) den Vortheil, dass ihre Anwendung die Kenntniss des Brechungscoëfficienten nicht erfordert. Wir können sie daher auch auf solche Beobachtungsreihen anwenden, bei welchen eine Bestimmung der Brechungscoëfficienten für das nämliche Versuchsmaterial nicht vorliegt.

Tabelle III.

Terpentinöl, rectificirt.

Formel (III). $\log a = 0{,}593\,291\,6$. $\log \lambda_0^2 = 8{,}560\,811\,7 - 10$.

Spectral-linien	Δ beob.	Δ ber.	D
C	10,9°	10,86°	+0,04
D	14,05	14,07	−0,02
E	18,7	18,70	0,00
b	19,6	19,71	−0,11
F	23,2	23,18	+0,02
G	32,75	32,69	+0,06

Tabelle IV.

Terpentinöl, nicht rectificirt.

Formel (III). $\log a = 0{,}997\,177\,6$. $\log \lambda_0^2 = 7{,}603\,137\,0 - 10$.

Spectral-linien	Δ beob.	Δ ber.	D
B	−21,5°	−21,43°	−0,07
C	23,4	23,51	+0,11
D	29,3	29,26	−0,04
E	36,8	36,84	+0,04
b	38,3	38,38	−0,08
F	43,6	43,52	+0,04
G	55,9	55,94	+0,08

Tabelle V.

Citronenöl.

Formel (III). $\log a = 1{,}154\,132\,2$. $\log \lambda_0^2 = 8{,}441\,253\,6 - 10$.

Spectral-linien	Δ beob.	Δ ber.	D
B	34,0°	34,12°	−0,12
C	37,9	37,81	+0,09
D	48,5	48,43	+0,07
E	63,3	63,34	−0,04
b	66,4	66,50	−0,10
F	77,5	77,40	+0,10
G	106,0	106,11	−0,11

Tabelle VI.

Zuckerlösung.

Formel (III). $\log a = 1{,}333\,896\,8$. $\log \lambda_0^2 = 8{,}042\,091\,9 - 10$.

Spectral-linien	Δ beob.	Δ ber.	D
A	38,47°	38,77°	−0,30
a	43,32	43,65	−0,33
B	47,56	47,96	−0,40
C	52,70	52,76	−0,06
D	66,41	66,21	+0,20
E	84,56	84,25	+0,31
b	87,88	87,96	−0,08
F	101,18	100,45	+0,73
G	131,96	131,42	+0,54
H	157,06	158,39	−1,33

In den vorstehenden Tabellen (III bis VI) sind die Beobachtungen von G. Wiedemann[1]) an Terpentinöl und Citronenöl, sowie diejenigen Stefan's[2]) an Zuckerlösung nach Formel (III) berechnet.

Die Uebereinstimmung ist eine vollkommene, da die Abweichungen nirgends die Grenze der Beobachtungsfehler übersteigen.

Den Formeln (I—III) liegt übrigens die Voraussetzung zu Grunde, dass die wirksame Substanz durchaus aus gleichartigen Molecülen bestehe. Sie gelten daher nicht ohne weiteres auch für circularpolarisirende Lösungen activer Körper, sondern in diesem Falle führt die Theorie zu verwickelteren Gleichungen, welche auch den Einfluss des Lösungsmittels und des Concentrationsgrades berücksichtigen. Hiermit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass jene einfachen Formeln in geeigneten Einzelfällen auch auf Lösungen, insbesondere concentrirtere, mit Erfolg anwendbar seien, wie ja in der That das obige Beispiel der Zuckerlösung darthut. In anderen Fällen dagegen, wie bei den Lösungen der Glykocholsäure[3]), der Cholalsäure[4]) und des Cholesterins[5]) ist die Uebereinstimmung wenig befriedigend. Die Beobachtungen von R. Nasini[6]) an Substanzen mit ausnehmend hohem Dispersionsvermögen werden zum Theil recht gut durch die Formel (III) dargestellt, wie die folgende Tabelle VII (p. 589) zeigt.[7]) Bei jedem Stoff enthält die erste

---

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **82.** p. 215. 1851.

2) Stefan, Wien. Ber. **52.** p. 486. 1866.

3) Hoppe-Seyler, Erdmann's Journ. (1). **89.** p. 157. 1863.

4) Hoppe-Seyler, l. c.

5) Lindenmeyer, Erdmann's Journ. (1). **90.** p. 323. 1863.

6) R. Nasini, Atti della R. Acc. dei Lincei (3) **13.** 1882. Beibl. **7.** p. 392. 1883.

7) Die als beobachtet aufgeführten, auf die Drehung für die Linie B als Einheit reducirten Werthe sind aus den p. 393 der Beibl. für das specifische Drehungsvermögen angegebenen Zahlen abgeleitet; sie weichen von den daselbst p. 394 mitgetheilten Werthen zum Theil etwas ab. Die Originalabhandlung stand mir nicht zu Gebote.

Tabelle VII.

Formel (III).

Namen	log a	log λ_0^2	B	C	D	E	b_1	F	λ_{4883}	λ_{4226}
Santonin in Chloroform (c = 35,258)	9,57726 − 10	8,66110 − 10	1	1,10	1,44	1,93	2,02	2,41	3,34	—
			0,98	1,10	1,44	1,95	2,06	2,46	3,39	—
			+0,02	0,00	0,00	−0,02	−0,04	−0,05	−0,05	—
Parasantonid in Chloroform	9,53444 − 10	8,83743 − 10	1	1,13	1,54	2,18	2,30	2,87	4,32	5,10
			1,00	1,13	1,53	2,18	2,33	2,88	4,32	5,07
			0,00	0,00	+0,01	0,00	−0,03	−0,01	0,00	+0,03
Santonid in Chloroform	9,52823 − 10	8,86208 − 10	1	1,13	1,55	2,25	2,37	2,98	4,55	5,39
			1,00	1,13	1,55	2,23	2,39	2,98	4,55	5,38
			0,00	0,00	0,00	+0,02	−0,02	0,00	0,00	+0,01
Metasantonin in Chloroform	9,62791 − 10	8,38877 − 10	1	1,12	1,34	1,81	1,97	2,35	2,79	—
			1,00	1,11	1,38	1,84	1,93	2,24	2,90	—
			0,00	+0,01	−0,04	−0,03	+0,04	+0,11	−0,11	—
Aethylparasantonat in Chloroform	9,56023 − 10	8,85185 − 10	1	1,23	1,73	2,40	2,53	3,16	4,72	5,56
			1,07	1,21	1,65	2,36	2,53	3,15	4,77	5,61
			−0,07	+0,02	+0,08	+0,04	0,00	+0,01	−0,05	−0,05
Normalpropylparasantonat in Chloroform	9,54834 − 10	8,82386 − 10	1	1,17	1,57	2,21	2,33	2,88	4,34	—
			1,02	1,15	1,56	2,20	2,35	2,90	4,31	—
			−0,02	+0,02	+0,01	+0,01	−0,02	−0,02	+0,03	—
Allylparasantonat in Chloroform	9,58630 − 10	8,81068 − 10	1	1,30	1,70	2,35	2,48	3,07	4,59	5,57
			1,09	1,24	1,68	2,36	2,52	3,09	4,56	5,31
			−0,09	+0,06	+0,02	−0,01	−0,04	−0,02	+0,03	+0,26
Santonsäure in Chloroform	9,55788 − 10	8,78645 − 10	1	1,16	1,51	2,14	2,28	2,79	4,02	4,69
			1,01	1,14	1,53	2,14	2,28	2,78	4,05	4,68
			−0,01	+0,02	−0,02	0,00	0,00	+0,01	−0,03	+0,01
Normalpropylsantonat in Chloroform	9,52423 − 10	8,74547 − 10	1	1,02	1,26	1,89	1,92	2,42	3,55	—
			0,91	1,02	1,36	1,88	2,00	2,42	3,45	—
			+0,09	0,00	−0,10	+0,01	−0,08	0,00	+0,10	—

Zeile die beobachteten, die zweite die berechneten Werthe, die dritte die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung.

Nach unserer Theorie müssen dieselben Gesetze der Rotationsdispersion auch für die magnetische Drehung der Polarisationsebene gelten. Wir wollen daher die obigen Formeln auch noch mit den diesbezüglichen Messungen Verdet's[1]) am Schwefelkohlenstoff und Kreosot vergleichen. Für ersteren wurden die Brechungscoëfficienten von Verdet, für letztereres von Gernez an demselben Material bestimmt. Die folgenden Tabellen VIII und IX enthalten die nach Formel (II) berechneten Resultate.

Tabelle VIII.

Schwefelkohlenstoff.

Formel (II). $\log a = 8{,}994\,083\,5 - 10$.

Spectrallinien	n	$\varDelta$ beob.	$\varDelta$ ber.	D
C	1,6147	0,592	0,592	+0,000
D	1,6240	0,768	0,761	+0,007
E	1,6368	1,000	1,002	−0,002
F	1,6487	1,234	1,233	+0,001
G	1,6728	1,704	1,720	−0,016

Tabelle IX.

Kreosot.

Formel (II). $\log a = 9{,}152\,086\,4 - 10$.

Spectrallinien	n	$\varDelta$ beob.	$\varDelta$ ber.	D
C	1,5369	0,573	0,612	−0,039
D	1,5420	0,758	0,775	−0,017
E	1,5488	1,000	1,000	0,000
F	1,5553	1,241	1,210	+0,031
G	1,5678	1,723	1,626	+0,097

Für den Schwefelkohlenstoff ist die Uebereinstimmung ziemlich befriedigend. Beim Kreosot jedoch überschreitet die Differenz für die Linie G die von Verdet äusserstenfalls zugegebene Fehlergrenze von $\pm 0{,}054$ beträchtlich. Die Formel (II) ist also in diesem Falle zur Darstellung der beobachteten Drehungen nicht ausreichend.

Gehen wir daher auf die vollständigere Formel:

$$\text{(I)} \qquad \varDelta = \frac{a(n^2-1)^2}{n\lambda^2\left(1 - b \cdot \dfrac{(n^2-1)^2(n^2+1)}{n^2\lambda^2}\right)}$$

1) Verdet, Ann. de chim. et de phys. (3) **69.** p. 415. 1863. Oeuvres. **1.** p. 214.

zurück, so ergeben sich für Schwefelkohlenstoff und Kreosot die in den Tab. X und XI verzeichneten, durchaus befriedigenden Resultate.

Tabelle X.

Schwefelkohlenstoff.

Formel (I). $\log a = 9{,}199\,276\,8-10$. $\log b = 7{,}163\,984\,8-10$.

Spectral-linien	n	Δ beob.	Δ ber.	D
C	1,6147	0,592	0,595	−0,003
D	1,6240	0,768	0,763	+0,005
E	1,6368	1,000	1,002	−0,002
F	1,6487	1,234	1,230	+0,004
G	1,6728	1,704	1,708	−0,004

Tabelle XI.

Kreosot.

Formel (I). $\log a = 9{,}284\,656\,6-10$. $\log b = 8{,}072\,199\,3-10$.

Spectral-linien	n	Δ beob.	Δ ber.	D
C	1,5369	0,573	0,582	−0,009
D	1,5420	0,758	0,751	+0,007
E	1,5488	1,000	0,994	+0,006
F	1,5553	1,241	1,230	+0,011
G	1,5678	1,723	1,739	−0,016

Noch besser als die Formel (I) schliesst sich die Formel (III) den Beobachtungen an, wie aus den folgenden beiden Tabellen XII und XIII erhellt.

Tabelle XII.

Schwefelkohlenstoff.

Formel (III). $\log a = 9{,}343\,962\,4-10$. $\log \lambda_0^2 = 8{,}484\,524\,4-10$.

Spectral-linien	Δ beob.	Δ ber.	D
C	0,592	0,594	−0,002
D	0,768	0,763	+0,005
E	1,000	1,004	−0,004
F	1,234	1,232	+0,002
G	1,704	1,705	−0,001

Tabelle XIII.

Kreosot.

Formel (III). $\log a = 9{,}322\,839\,6-10$. $\log \lambda_0^2 = 8{,}550\,894\,8-10$.

Spectral-linien	Δ beob.	Δ ber.	D
C	0,573	0,580	−0,007
D	0,758	0,751	+0,007
E	1,000	0,996	+0,004
F	1,241	1,233	+0,008
G	1,723	1,735	−0,012

Aus der vorliegenden Untersuchung ergibt sich also, dass das Gesetz der Rotationsdispersion, der natürlichen sowohl wie der magnetischen, in allen hier in Betracht gezogenen Fällen durch die Formel:

$$\Delta = \frac{a\,(n^2-1)^2}{\lambda^2}$$

oder durch die nach unserer Lichttheorie mit ihr äquivalente Formel:

$$\Delta = \frac{a}{\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2}$$

mit grosser Annäherung dargestellt wird.

Erlangen, im August 1883.

IV. *Ueber eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-, Actino- und Piëzoelectricität der Krystalle*[1]; *von A. Kundt.*

(Hierzu Taf. V Fig. 1—14.)

Die genaue Untersuchung der thermo-electrischen Eigenschaften der Krystalle ist, wie insbesondere die umfassenden Arbeiten Hankel's zeigen, eine sehr mühsame und schwierige Arbeit. Die Ermittelung der Electricität jedes einzelnen Punktes der Oberfläche mit Hülfe des Electrometers erfordert nicht nur viel Zeit, sondern auch eine Reihe von Vorsichtsmaassregeln. Von der Thermoelectricität der Krystalle unterscheidet Hr. Hankel noch eine Electricitätserregung, welche durch Strahlen, und zwar hauptsächlich solche geringer Brechbarkeit, hervorgebracht wird, von ihm Actinoelectricität genannt. Endlich bedingt nach der Entdeckung der Herren J. und P. Curie bei hemimorphen Krystallen der Druck eine Electricitätserregung, die Piëzoelectricität.[2] Die genaue electrometrische Untersuchung der Actino- und der Piëzoelectricität bietet im wesentlichen die gleichen Schwierigkeiten wie die der Thermoelectricität.

Für eine möglichst allseitige Erforschung der Krystalle wäre es sehr erwünscht, eine Methode zu besitzen, welche auf einmal die electrische Vertheilung auf der ganzen Ober-

---

1) Im Auszug mitgetheilt in den Sitzungsber. d. k. Acad. der Wiss. zu Berlin. 1883. **16.** p. 421—425.

2) Die betreffende Literatur findet sich citirt bei Hankel, Wied. Ann. **19.** p. 818—844. 1883.

fläche eines Krystalles zur Anschauung brächte, selbst dann, wenn die Methode quantitative Messungen nicht zuliesse. Ich habe eine solche gefunden, die an Einfachheit und Bequemlichkeit der Handhabung nichts zu wünschen übrig lässt. Die Methode ist die gleiche, welche schon Lichtenberg anwandte, um die Anordnung der positiven und negativen Electricität auf einem Isolator, auf welchen Electricität übergeströmt ist, sichtbar zu machen.

In dem Moment, in welchem die durch Temperaturänderung oder durch Druck auf einem Krystall hervorgerufene electrische Vertheilung bestimmt werden soll, bestäubt man denselben mit einem Gemenge von Schwefel und Mennige, welches durch ein engmaschiges Sieb von Baumwolle hindurchgesiebt wird. Bekanntlich wird bei diesem Vorgange das Schwefelpulver negativ, die Mennige positiv electrisch, und ebenso wie bei den Lichtenberg'schen Figuren setzt sich nun der negative Schwefel auf diejenigen Theile der Krystalloberfläche, welche positiv sind, die Mennige auf die negativen. Die Anordnung der beiden Pulver gibt dann ein sehr anschauliches Bild von der electrischen Anordnung auf der Oberfläche.

Das angegebene Verfahren ist so einfach und eigentlich so nahe liegend, dass es mir unwahrscheinlich war, dass dasselbe nicht schon angewendet sein sollte. Ich konnte indess in der einschlägigen Literatur keine Andeutung desselben finden. Ich habe zunächst die Methode nur auf eine kleine Zahl von Substanzen, welche stärkere electrische Erregung zeigen, angewandt. Ob auch die Thermoelectricität von Krystallen, welche diese nur in sehr geringem Grade zeigen, mit derselben untersucht werden kann, muss ich dahin gestellt sein lassen.

Ich gebe zunächst einige allgemeine Bemerkungen bezüglich der Methoden.

Die zu benutzenden Pulver.

Bekanntlich wird nicht nur ein Gemenge von Schwefel und Mennige beim Durchsieben durch ein engmaschiges Netz von Baumwollenstoff in der Weise electrisch, dass der eine

Bestandtheil des Gemisches die eine, der andere die andere Electricität annimmt, sondern noch eine Anzahl anderer Pulvergemische verhalten sich ebenso. An Stelle der Mennige kann das Oxyd eines anderen schweren Metalles, z. B. Eisenoxyd, genommen werden, und der Schwefel lässt sich, wie ich gefunden habe, durch sehr fein vertheilte Kieselsäure, welche aus Wasserglas niedergeschlagen ist, ersetzen. Es scheint indess als ob gerade Mennige und Schwefel durch Reibung aneinander sehr stark electrisch werden, und das Gemisch aus beiden functionirt daher, soweit meine Erfahrung reicht, am besten. Nicht mehr verwendbar ist das Pulvergemisch bei Temperaturen, bei denen der Schwefel schmilzt (117° C.). An Stelle desselben nimmt man dann am besten sehr fein zertheilte Kieselsäure.

Handelt es sich um lang andauernde Untersuchungen, bei denen fortwährend grosse Pulvermengen durchsiebt werden müssen, so ist mit einiger Vorsicht zu verfahren. Der dabei unvermeidlich in grösserer Menge in Mund und Nase gelangende Mennigstaub kann der Gesundheit nachtheilige Folgen haben. Es ist daher gut, die zu bestäubenden Krystalle unter einen gut ziehenden seitlich geschlossenen Abzug zu bringen und in diesen hinein das Gemisch zu stäuben.

Nöthigenfalls kann an Stelle der Mennige auch Eisenoxyd treten. Die Pulver müssen vor dem Mischen möglichst fein gerieben werden. Nachdem sie gut durcheinander gerührt sind, muss das Gemisch vor der Benutzung erst noch einige mal durch ein Sieb geschüttet werden. Selbstverständlich sind die Pulver getrocknet anzuwenden. Man nimmt etwa gleiche Volumentheile Mennige und Schwefelblumen oder Eisenoxyd und Kieselsäure. Bei den Versuchen sieht man übrigens bald, ob man von dem einen oder anderen Gemengtheil zu wenig hat.

Der Bestäubungsapparat.

Zum Bestäuben der Krystalle mit dem Pulvergemisch bediene ich mich eines kleinen Apparates, dessen man sich in den Vorlesungen zur Erzeugung der Lichtenberg'schen Figuren zu bedienen pflegt. Eine Art Blasebalg aus Leder

(Fig. 1) ist am breiteren Ende mit einem abschraubbaren Deckel versehen, um das Pulvergemisch einzufüllen. Am anderen Ende ist über die Oeffnung ein Stück Mousselin gelegt, durch dessen Maschen das Pulver geblasen wird. Das Stückchen wird durch einen aufgeschraubten Deckel, der in der Mitte ein Loch von ca. 6 mm Durchmesser hat, festgehalten.[1]) Beim Bestäuben mit dem Apparate muss derselbe in einiger Entfernung von den Krystallen gehalten werden, sodass der Luftstrom letztere nicht direct trifft, vielmehr nur die langsam niederfallenden Pulvertheilchen in die Nähe des Krystalles kommen.

Die im Nachstehenden angegebenen Versuche sollen nur dazu dienen, die Verwendbarkeit der Methode zu zeigen; dieselben machen keinen Anspruch darauf, nach irgend einer Richtung erschöpfend zu sein. Eine ausgedehntere Untersuchung des Boracits, welche Hr. Mack auf meine Veranlassung unternommen hat, wird demnächst in Groth's Zeitschrift für Krystallographie erscheinen. Die Untersuchung einer grösseren Anzahl von Quarzen mit der beschriebenen Methode ist bereits von anderer Seite begonnen.

Electricität durch Druck. (Piëzoelectricität.)

Die Electricitätserregung durch Druck kann am Turmalin und noch leichter am Quarz beobachtet werden. Prismatische Stücke von Turmalin oder Quarz, in einem Schraubstocke in geeigneter Weise gepresst und nach dem Pressen mit dem Pulvergemenge bestäubt, zeigen deutlich die Vertheilung der Electricität. Als Beispiel diene eine sechseckige Quarzplatte, die, wie die thermoelectrische Untersuchung ergab, aus einem durchaus einfachen Quarz senkrecht zur Axe geschnitten ist. Die Verbindungslinien der Ecken fallen sehr nahe mit den drei Nebenaxen des Quarzes zusammen. Presst man die Platte im Schraubstocke in der Richtung der Verbindungslinie zweier Ecken und bestäubt, so erhält man die Anordnung des Pulvers, wie sie in Fig. 2 ge-

1) Der Apparat ist von Hrn. Mechaniker F. Majer, Strassburg i. E., Krämergasse 10 zum Preise von 7 M. zu beziehen.

zeichnet ist. Die Pfeile bei *a* und *b* in der Figur geben die Druckrichtung. Die gleiche Figur erhält man selbstverständlich, wenn in Richtung einer der beiden anderen Nebenaxen gepresst wird. Presst man dagegen zwei gegenüberliegende Seitenflächen, also in Richtung der Mittellinie zwischen zwei Nebenaxen, so erhält man Fig. 3.

Vor dem Pressen ist den Platten durch Ueberfahren mit einer Alkoholflamme die auf der Oberfläche vorhandene Electricität zu nehmen.

Benutzt man statt einer sechseckigen eine kreisrunde, zur Hauptaxe senkrecht geschnittene Platte, sodass man in allen möglichen zur Hauptaxe senkrechten Richtungen pressen kann, so bekommt man Pulveranordnungen, die Uebergänge zwischen den in Fig. 2 und 3 gezeichneten darstellen. Platten aus nicht einfachen, sondern verwachsenen Quarzen geben nicht die beschriebenen regelmässigen Figuren, sondern unregelmässig verzerrte. Bei solchen verwachsenen Krystallen sind dann auch fast immer die Figuren verschieden, je nachdem man in der einen, der anderen oder der dritten Nebenaxe presst.

Thermo- oder Pyroelectricität.

1. Quarz. — Bezüglich der Thermoelectricität des Quarzes bedarf es einer Vorbemerkung. Hr. Hankel unterscheidet, wie schon bemerkt, von der thermoelectrischen Erregung des Quarzes die actinoelectrische. Letztere soll hervorgebracht werden durch Strahlen geringer Brechbarkeit (Wärmestrahlen), welche den Quarz treffen. Die Unterscheidung ist nach Hankel nöthig, da eine Stelle des Quarzes, welche beim Erwärmen positiv wird, dann, wenn sie von Strahlen getroffen wird, negative Electricität zeigt. Da meine Erfahrung in dem fraglichen Gebiete nicht ausreicht, um in jedem Falle zu entscheiden, welcher Theil der Electricitätserregung, die ein Krystall zeigt, durch Temperaturänderung, welche durch Bestrahlung (nach Hankel) bedingt ist, so will ich einfach die Versuche beschreiben und dabei ganz unentschieden lassen, ob die Electricität, welche die Pulver geben, als Thermo- oder Actinoelectricität zu bezeichnen ist.

In meiner ersten Mittheilung[1]) habe ich angegeben, dass wenn es sich darum handelte, einen ganzen Quarzkrystall zu untersuchen, derselbe, nachdem er bis etwa 100° C. erwärmt war, in möglichst niederer Temperatur (Kältemischung) abgekühlt wurde. Es wurde hernach gefunden, dass die Versuche sehr gut in folgender einfachen Weise gelingen. Der zu untersuchende Quarz wird möglichst gut gereinigt, dann in ein Luftbad gebracht; als solches eignet sich ganz gut ein gewöhnlicher Trockenkasten, wie er in chemischen Laboratorien gebraucht wird. Um den Krystall im Trockenkasten bequem stellen zu können, setze ich das untere, meist verbrochene Ende in einen Kork. Es wird bis etwa 70° erhitzt, dann lässt man die Temperatur des Bades bis auf 55—45° sinken, nimmt den Quarz heraus, zieht ihn durch eine Alkoholflamme, um alle auf seiner Oberfläche etwa befindliche Electricität wegzunehmen, und bestäubt nun von allen Seiten. Hat man einen völlig einfachen, durchaus nicht verwachsenen Quarz, so setzt sich Mennige und Schwefel an die abwechselnden Prismenkanten scharf getrennt nieder; zuweilen erstrecken sich diese Pulverstreifen auch noch auf die den Prismen aufsitzenden Pyramidenflächen.

Fig. 4 zeigt die Anordnung auf den sechs Prismenflächen eines einfachen Quarzes, die in eine Ebene abgewickelt gezeichnet sind. Die Figur ist nach einer Anzahl von Versuchen an verschiedenen einfachen Krystallen gezeichnet. Ist der benutzte Krystall aber zusammengesetzt, indem entweder lauter optisch gleich drehende oder optisch entgegengesetzt drehende Partien durch einander gewachsen sind, so wird die Pulvertheilung auf der Oberfläche verändert und zuweilen sehr complicirt.

Fig. 5 und 6 geben die Pulveranordnung auf den Prismenflächen zweier stark verwachsenen Krystalle. Die unter die Pulverfiguren gezeichneten Strichelchen bezeichnen die Grenzen der sechs Prismenflächen. In Fig. 6 sind nicht alle sechs Prismenflächen wiedergegeben.

---

1) A. Kundt, Sitzungsberichte der königl. Academie zu Berlin. 16. p. 421. 1883.

Es dürfte wohl kaum ein bequemeres Mittel geben, zu entscheiden, ob ein Quarz verwachsen, eventuell wie er verwachsen ist, als die Untersuchung der Thermoelectricität desselben mit Hülfe der beschriebenen Bestäubungsmethode.

Um die Vertheilung der Electricität bei möglichst einfacher äusserer Gestalt des Krystalles zu haben, wurden auch drei Quarzkugeln untersucht. Dieselben, von Hrn. Stern in Oberstein bezogen, waren zufällig alle drei aus völlig unverwachsenen Krystallen geschliffen. Die Durchmesser betrugen 16—12 mm. Alle drei gaben die einfache in Fig. 7 dargestellte Pulveranordnung. Sechs Sectoren, die abwechselnd roth und gelb sind, zeigen sich auf den Kugeln. Die Verbindungslinie der Pole, an denen die sechs Sectoren zusammenstossen, ist die Richtung der optischen Axe; diese liegt in der Zeichnung senkrecht zur Ebene des Papiers.

Sehr gut lassen sich endlich Quarzplatten mit der neuen Methode untersuchen.

Erwärmt man eine Platte, welche senkrecht zur Hauptaxe aus einem einfachen, nicht verwachsenen Quarz geschnitten ist, im Luftbad und bestäubt sie bei der Abkühlung, so werden, wie zu erwarten, drei um je 120° voneinander abstehende Ecken roth und die dazwischen liegenden gelb. Soll starke Electricitätserregung auftreten, so muss die die Temperaturerhöhung oder -erniedrigung bedingende Wärmebewegung möglichst senkrecht zur Hauptaxe, also in Richtung der Axen der Hemimorphie, des Quarzes stattfinden.

Ich erreichte dies in folgender Weise. Ein Messing- oder Kupfercylinder von etwa 25 mm Höhe und etwa 8 mm Durchmesser wird in der Flamme eines Bunsen'schen Brenners recht heiss gemacht, vertical aufgestellt und dann wird auf ihn die gut gereinigte und von Electricität befreite Quarzplatte gelegt. Es tritt jetzt ein intensiver radialer Wärmestrom in der Platte auf. Bestäubt man während der Erwärmung, und zwar möglichst schnell nach dem Auflegen der Platte, so erhält man fast immer sofort sehr scharfe Pulverfiguren. Es ist vortheilhaft, die Platte nicht zu dick zu nehmen.

Fig. 8 zeigt die Anordnung des Pulvers bei einer senk-

recht zur Hauptaxe geschnittenen, nicht verwachsenen Quarzplatte; die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken der sechsseitigen Platte sind die Richtungen der Nebenaxen.

Fig. 9 und 10 gehören zwei verwachsenen Quarzplatten zu. Jede der beiden senkrecht zur Axe geschnittenen Platten zeigt zwischen Nicol'schen Prismen eine völlig gleichmässige Färbung. Es sind also in jeder Platte nur Stücke von gleicher Drehung der Polarisationsebene durcheinander gewachsen. In meiner ersten, oben citirten Mittheilung ist noch eine andere verwachsene Quarzplatte abgebildet.

In Fig. 11 gebe ich noch die Pulveranordnung auf einer Platte aus einem einfachen Zwilling. *ab* bezeichnet die Zwillingsebene; die eine Seite der Platte ist rechtsdrehend, die andere linksdrehend.

Es liegt nahe, die Pulverfiguren, welche man erhält beim Pressen, beim Akühlen oder Erwärmen in freier Luft, und beim Erwärmen und Abkühlen durch Aufsetzen auf heisse oder kalte Messingcylinder eines und desselben Krystalles oder einer und derselben Krystallplatte zusammenzustellen und zu vergleichen. Eine solche Vergleichung würde von Interesse sein, erstens in Anbetracht der Differenz, welche zwischen Hrn. Hankel und den Herren Friedel und Curie über die Existenz einer Actinoelectricität beim Quarz besteht, andererseits bezüglich der von Hrn. Röntgen neuerdings ausgesprochenen Anschauung, dass die Thermoelectricität aller Krystalle lediglich durch Spannungsänderungen in den Krystallen entsteht, also als Druckelectricität aufzufassen sei.

Ich gehe indess auf eine vergleichende Zusammenstellung der Pulverfiguren hier nicht ein, da das mir zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial nicht ausreichte, um die einschlägigen Fragen mit voller Sicherheit zu beantworten.

Turmalin.

Die Turmaline, die ich untersuchte, hatten meistens nur ein ausgebildetes Ende. Diejenigen von Snarum in Norwegen zeigten sich wenig electrisch beim Abkühlen; Krystalle von Mursinsk in Sibirien gaben beim Bestäuben in geringem Maasse an einem Ende Anhäufung der Mennige,

an anderen des Schwefels; zwei dunkle Turmaline aus Brasilien zeigten beim Bestäuben während des Abkühlens in Luft sehr schön den analogen und antilogen Pol. Ausserdem setzten sich die Pulver auch zuweilen auf den Prismenflächen in mehr oder minder regelmässiger Weise ab.

Das verschiedene Verhalten der Turmaline führte mich dazu, einige Krystalle senkrecht zur Axe zu durchschneiden und die Schnittflächen zu untersuchen.

Zwei Krystalle von Snarum gaben auf den Schnittflächen keine bestimmte Anordnung des Pulvers. Krystalle von Mursinsk zeigten aber auf den Schnittflächen senkrecht zur Axe ein sehr complicirtes Verhalten. Ein Stück eines solchen Krystalles mit einer Schnittfläche einen kurzen Moment in der Flamme erwärmt, gab die in Fig. 12 gezeichnete Anordnung des Pulvers. Man sieht, dass in die im allgemeinen negativ rothe Fläche ein feines Geäder positiver Stellen eingefügt ist. Man muss daraus wohl auf eine sehr complicirte Verwachsung des Krystalles schliessen, indem eine sehr grosse Zahl einzelner Krystalle mit entgegengesetzt gerichteten Polen durcheinander gewachsen sind.

Andere Schnitte senkrecht zur Axe von anderen Krystallen verhielten sich ähnlich. Fig. 13 zeigt die Pulveranordnung auf der Basisfläche eines Turmalins von Elba. Einfacher erwies sich ein brasilianischer Turmalin, der beim Abkühlen sehr starke Electricität an den Enden gab. Senkrecht zur Axe durchschnitten zeigten die beiden Schnittflächen die in Fig. 14 gezeichneten Pulveranordnungen. Man sieht, dass in dem homogenen Krystall nur einige kleine Stellen mit umgekehrten Polen eingesprengt sind.

Die beschriebenen Versuche legen die Vermuthung nahe, dass nur solche Turmaline an den Enden starke Thermoelectricität zeigen, welche möglichst wenig durchwachsen sind; doch bedarf es zum Beweise hierfür eines grösseren Beobachtungsmateriales.

Topas. Zucker. Weinsäure. Boracit.

Die durch das Pulvergemisch an einigen Krystallen von brasilianischem Topas gefundene Electricitätsanordnung

stimmte im wesentlichen gut mit der von Hrn. Hankel für dies Mineral gefundenen überein.

Auch Zucker und Weinsäure liessen sich mit dem Pulvergemisch gut auf ihre Electricitätserregung untersuchen.

Auf eine bereits ausgeführte ausführliche Untersuchung des Boracits habe ich bereits oben hingewiesen.

Ich glaube, die mitgetheilten Resultate zeigen zur Genüge, dass die neue Methode bei weiterer Benutzung und eventueller Verbesserung in den Händen des Physikers, wie des Mineralogen und Krystallographen noch manche Aufschlüsse über das electrische Verhalten der Krystalle geben kann.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die Pulverfiguren, selbst wenn sie ziemlich complicirt sind, sich leicht auf Papier übertragen lassen, sodass man sie aufbewahren kann.

Man bestreicht zu diesem Zweck schwarzes Seidenpapier mit ziemlich zähflüssigem Gummi arabicum und lässt denselben soweit eintrocknen, dass er noch eben klebt. Ist die Gummischicht schon zu hart geworden, so genügt es, sie mit einem etwas feuchten Schwamm zu überstreichen. Dann legt man das Papier auf eine weiche Unterlage, drückt den bestäubten Krystall auf dasselbe und hebt ihn nach kurzer Zeit vorsichtig ab. Gewöhnlich haftet dann das sämmtliche Pulver auf dem Papier. Die mitgetheilten Figuren sind nach solchen Abklatschen angefertigt.

Physik. Inst. d. Univ. Strassburg, September 1883.

V. *Ueber die Messung electrischer Kräfte mittelst des electrischen Flugrades; von D. Kaempfer.*

(Auszug aus der Inauguraldissertation. Marburg 1883, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

In dieser Arbeit wurden die an den Spitzen des electrischen Flugrade von der ausströmenden Electricität entwickelten Reactionskräfte experimentell bestimmt, alsdann

auf theoretischem Wege eine Beziehung zwischen den Reactionskräften und den betreffenden Electricitätsmengen aufgestellt, zuletzt diese Beziehung auf einige Aufgaben der Electrostatik angewendet.

1) Zu ersterem Zwecke wurde dem Apparat eine von der gewöhnlichen abweichende Gestalt gegeben. An einem starken Messingdraht wurden die Enden zu möglichst feinen gleichen conischen Spitzen abgefeilt. Letztere wurden dann rechtwinklig zu der Länge in entgegengesetzter Richtung in eine Ebene umgebogen. Die Aufhängung dieses Flugrades geschah so, dass durch ein feines Loch in der Mitte desselben ein 270 mm langer und 0,114 mm dicker Platindraht gesteckt wurde, welcher unten mit einem Knoten versehen war, sodass das Flugrad fest auf demselben sass und den Draht bei jeder Ausweichung tordirte. Alsdann wurde der Draht geglüht und in einer Messingklemme befestigt, an welcher alle Kanten und Ecken möglichst vermieden waren. Dieselbe war in einem hölzernen Gestell festgemacht und setzte sich durch den Balken in einem Metallstäbchen fort, auf welches eine kleine Messingkugel lose aufgeschraubt werden konnte. Der Zuleitungsdraht wurde immer an das Stäbchen gelegt und die Kugel darüber geschraubt, sodass die Electricität durch den Metallstab, die Klemme und den Platindraht in das Flugrad ging, ohne auf diesem Wege Ecken und Kanten zum vorherigen Ausströmen zu finden. Der Platindraht hing natürlich vertical, sodass sich das Flugrad nur in einer Horizontalebene drehen konnte. Zur Bestimmung der Ablenkungswinkel wurde mit dem Flugrad ein Index aus Hartgummi verbunden, welcher auf einer horizontal gelegenen Kreistheilung spielte.

Das Flugrad wurde nun mit dem positiven Conductor einer kleinen Influenzmaschine verbunden, indem der zuleitende dünne Kupferdraht in die lose Schraube oberhalb der Klemme umgelegt und die Messingkugel fest darüber geschraubt wurde. Das andere Ende des Kupferdrahtes wurde mit der Conductorstange in deren Hartgummilager eingeschoben; der negative Conductor aber zur Erde abgeleitet. Setzte man darauf die Maschine in Thätigkeit und entfernte

bei möglichst gleichmässiger Drehung den einen Conductor von dem anderen, so bewegte sich das Flugrad sehr heftig nach rückwärts, indem es den Platindraht tordirte, und schwankte um eine neue Gleichgewichtslage, die es zuletzt fest einnahm, wenn man fortgesetzt gleichmässig drehte.

Um die Schwankungen um die Gleichgewichtslagen zu vermindern, wurde in der Mitte des Index ein durch Blei beschwertes Glasstäbchen angekittet, an letzterem aber ein vertical hängendes Glimmerblatt angebracht, welches ganz in eine beliebige ölige Flüssigkeit eintauchte. Das Glimmerblatt konnte, solange nur Gleichgewichtslagen beobachtet wurden, keinerlei Einwirkung ausüben, da es im Gleichgewicht von der Flüssigkeit keine Kräfte erfährt. Die an den Spitzen des Flugrades ausströmenden Electricitäten haben also vermöge ihrer Reactionskraft nur dem Drahte in einer gewissen Torsion das Gleichgewicht zu halten und können aus den Torsionskräften des Platindrahtes berechnet werden.

Mit dem so veränderten Apparat wurden unter, im übrigen gleichen Umständen, fünf Versuche angestellt. Sie ergaben die Gleichgewichtslagen:

$$150^{\circ},\ 142^{\circ},\ 145^{\circ},\ 147^{\circ},\ 153^{\circ},$$

also im Mittel $147{,}4^{\circ}$.

Um die zugehörige Reactionskraft zu berechnen, muss vorerst der Torsionscoëfficient des Platindrahtes bestimmt werden. Er wurde nach der Schwingungsmethode als:

$$n = 452{,}19 \text{ mg gefunden.}$$

Diese Zahl drückt diejenige Masse in Milligrammen aus, welche am Ende des Drahtes rechtwinklig zu seiner Längenausdehnung an einem Hebelarm von 1 mm Länge durch ihr Gewicht, also durch die Anziehungskraft der Erde wirken müsste, um dem Drahte bei einer Torsion vom Winkel Eins das Gleichgewicht zu halten.

Bei obigen Versuchen war der Hebelarm, an welchem die Reactionskraft der Electricität wirkt, nicht gleich 1 mm, sondern = 48,15 mm, der halben Länge des Flugrades, sodass für einen Abweichungswinkel von einem Grad die Reactionskraft der Electricität:

$$\frac{n}{48{,}15} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}1639 \text{ mg ist.}$$

Eine Electricitätsquelle also, die einer Torsion von einem Grad des angewandten Drahtes das Gleichgewicht hält, bringt dieselbe mechanische Wirkung hervor, wie eine Masse von 0,1639 mg infolge der Erdschwere durch den Druck auf ihre Unterlage hervorbringen würde.

Eine solche Electricitätsquelle repräsentirt in absolutem Maasse die Kraft:

$$P = g \,.\, 0{,}1639 \text{ mm} \,.\, \text{mg} \,.\, \text{sec}^{-2}$$
$$= 1607{,}9 \text{ mm} \,.\, \text{mg} \,.\, \text{sec}^{-2}.$$

Ist die Electricität im Stande, einer Torsion von α^0 das Gleichgewicht zu halten, so entspricht sie der Kraft $P \,.\, \alpha$.

Für die oben gebrauchte Holtz'sche Influenzmaschine war $\alpha = 147{,}4^0$. Die Reactionskraft der von ihr gelieferten positiven Electricität ist demnach:

$$P \,.\, 147{,}4 = 237\,020 \text{ mm} \,.\, \text{mg} \,.\, \text{sec}^{-2}.$$

Diese Kraft ist eine potentielle Energie, analog dem Drucke, den eine in einer Erhebung über der Erde ruhende Masse auf ihre Unterlage ausübt. Könnte sie, wie ein solches Gewicht durch den Fall, sich in kinetische Energie verwandeln, so würde sie eine Arbeit verrichten. In einer Secunde würden dann leisten:

Die Kraft P mm . mg . sec^{-2} die Arbeit P mm^2 . mg . sec^{-2}, die Kraft $P \,.\, \alpha$ mm.mg. sec^{-2} die Arbeit $P \,.\, \alpha$ mm^2 . mg . sec^{-2}; sodass auch die mechanischen Arbeiten, die die einzelnen Reactionskräfte leisten könnten, den Ausschlagswinkeln α proportional sind, wenn die zu bewegende Masse dieselbe bleibt.

Auf obige Weise kann man für jede constante Electricitätsquelle das entsprechende Aequivalent an Energie, welche sich an den Spitzen eines mit derselben verbundenen Flugrades bethätigt, finden. Naturgemäss schliesst sich daran die Frage, ob man nicht daraus auf die Electricitätsmengen, resp. ihre Potentiale schliessen kann.

2) Die vorhergehenden Erörterungen haben immanente Gültigkeit und sind von der Theorie der Spitzenwirkung

sowie von der Erklärung der Reaction der Electricität unabhängig. Will man aber ein Urtheil über die wirksamen Quantitäten der Electricität gewinnen, so muss man eine Theorie über das Ausströmen der Electricität aus Spitzen zu Grunde legen.

Nach der Lehre vom electrostatischen Potential ist die Dichtigkeit der Electricität an Spitzen electrisirter Leiter, wie z. B. des Flugrades, unendlich gross, wenn die Leiter vollkommen leiten, und die Spitzen vollkommene Spitzen sind. Da diese Voraussetzungen aber nie ganz zutreffen, so stellt diese Theorie wie jede Theorie nur eine Annäherung an die Wahrheit dar. Als Näherung wird man aber an den Metallspitzen des Flugrades die electrische Dichtigkeit als überwiegend gross annehmen können, und zwar als so gross, dass eine schnelle Ausströmung der Electricität stattfinden muss. Je strenger das Flugrad die zwei angeführten Bedingungen erfüllt, um so schneller und gleichmässiger findet die Ausströmung statt. Wären jene Bedingungen absolut erfüllbar, so würde die Ausströmung momentan geschehen; in unserem Falle kann man nur annehmen, dass sie in immer sehr kleiner Zeit stattfindet, und zwar nehmen wir noch an, dass die ganze Electricität ausströmt, keine zurückbleibt oder sich in Wärme umsetzt.

Unter diesen Voraussetzungen kann man die gewünschte Beziehung zwischen den Quantitäten der Electricität und ihren Reactionskräften aufstellen.

Zwei Electricitätsquellen E_1 und E_2 mögen in derselben Zeit unter gleichen Umständen die Electricitätsmengen Q_1, resp. Q_2 liefern. Hat nun E_1 am Flugrad die Gleichgewichtsstellung bei einer Torsion von α Grad, E_2 eine solche bei β Grad bewirkt, so sind die mechanischen Arbeiten, welche Q_1 und Q_2 von den jedesmaligen Gleichgewichtslagen aus durch ihr Verschwinden aus den Spitzen des Flugrades leisten, nach dem Gesagten $P.\alpha$, resp. $P.\beta$.

Ferner mögen W_1 und W_2 die Potentiale der Electricitätsmengen Q_1 und Q_2 auf sich selbst bezeichnen, und zwar zu den Zeiten, wenn diese Electricitätsmengen einzeln auf

denselben Körpern, dem Conductor, dem Leitungsdraht und dem Flugrad ausgebreitet sind.

Nun ist aber „die Summe aller durch eine electrische Entladung hervorgebrachten Wirkungen gleich der dabei eingetretenen Abnahme des Potentials der gesammten Electricitätsmengen auf sich selbst“ oder auch: das Potential einer Electricitätsmenge auf sich selbst ist gleich der Arbeit, welche die Electricitätsmenge beim Verschwinden leisten kann. Q_1 und Q_2 leisten durch ihr Verschwinden die Arbeiten $P.\alpha$, resp. $P.\beta$. Folglich sind die Potentiale von Q_1 und Q_2 auf sich selbst gleich diesen Arbeiten, also:

$$W_1 = P.\alpha, \quad W_2 = P.\beta,$$

oder auch:

$$(1) \qquad W_1 : W_2 = \alpha : \beta.$$

Bedeuten ferner V_1 und V_2 die Potentiale von Q_1 und Q_2 in den angegebenen Lagen, so bestehen die Gleichungen:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} V_1 . Q_1, \quad W_2 = \tfrac{1}{2} V_2 . Q_2.$$

Nun sind aber die Potentiale V_1 und V_2 von Electricitätsmengen, die nacheinander auf demselben Körper im Gleichgewicht sind, diesen Electricitätsmengen (Q_1 und Q_2) proportional, also $V_1 = A . Q_1$, $V_2 = A . Q_2$. Demnach ist:

$$W_1 = \tfrac{1}{2} A . Q_1^2, \quad W_2 = \tfrac{1}{2} A . Q_2^2,$$

woraus die Proportion folgt:

$$(2) \qquad W_1 : W_2 = Q_1^2 : Q_2^2.$$

Durch Verbindung von (1) und (2) erhält man schliesslich:

$$Q_1 : Q_2 = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta}.$$

Die in gleichen Zeiten von zwei constanten Electricitätsquellen erzeugten Electricitätsmengen sind demnach den Quadratwurzeln aus den Abweichungswinkeln der neuen Gleichgewichtslagen von den alten proportional.

Im allgemeinen kann man sagen, dass dieser Satz eine mit der Feinheit der Spitzen und der Leitungsfähigkeit der angewandten Metalle wachsende Annäherung an die Wirklichkeit darstellt. Er wurde abgeleitet, ohne eine Annahme über die Art und Weise zu machen, wie die Electricität beim Ausströmen die Reaction bewirkt. Darüber existiren hauptsächlich zwei Ansichten von gleichem Ansehen. Wir

wollen sehen, ob obiger Satz sich mit denselben in Uebereinstimmung bringen lässt.

Nehmen wir zuerst mit Riess an, dass die Ausströmung in der Weise stattfindet, dass die nächstgelegenen Luftpartikelchen gleichnamig electrisirt und abgestossen werden, wodurch immer neue neutrale Lufttheilchen an die Spitzen des Flugrades kommen, so ist ersichtlich, dass eine doppelt so grosse Dichtigkeit eine viermal so grosse Abstossung hervorrufen wird. Denn sei h die Dichtigkeit an der Spitze, a die Electricitätsmenge, die in einem unendlich kleinen Zeittheilchen dt ausströmen kann, so ist die Abstossungskraft zwischen a und einem ihm gleichen electrischen Theilchen auf der Spitze in der Entfernung r:

$$\frac{aa}{r^2}.$$

Ist die Dichtigkeit aber $2h$, so strömt in der Zeit dt die Electricitätsmenge $2a$ aus. Dieselbe wird von $2a$ auf der Spitze abgestossen, und zwar in der Entfernung r mit der Kraft:

$$4\frac{aa}{r^2}.$$

Da nun im ersten Falle sovielmal a auf der Spitze sich befinden und ausströmen müssen als im zweiten Falle $2a$, so ist die ganze von der Electricität beim Ausströmen entwickelte Abstossungskraft im zweiten Falle $4K$, wenn sie im ersten Falle mit K bezeichnet ist.

Dies gilt immer nur für dieselbe Spitze, bei welcher die Dichtigkeit h an der Spitze proportional mit der ganzen Electricitätsmenge wächst. Ist die ganze Electricitätsmenge dreimal so gross, also die Dichtigkeit an der Spitze $3h$, so ist dem Vorigen analog die Abstossungskraft $9K$, für $4h$ ... $16K$ etc. Die ganzen Electricitätsmengen oder die Dichtigkeiten auf derselben Spitze verhalten sich demnach auch nach der Riess'schen Hypothese wie die Quadratwurzeln der an den Spitzen wirkenden Reactionskräfte, also auch wie die Quadratwurzeln der Ablenkungswinkel.

Nach der zweiten Hypothese von Mascart vermindert sich durch das Ausströmen der Electricität die Oberflächenspannung auf der Spitze; auf der entgegengesetzten Seite

bekommt dieselbe das Uebergewicht, also muss sich die Spitze rückwärts drehen. Nun ist für jeden beliebigen Leiter, bei welchem sich die statische Electricität nur an der Oberfläche befinden kann, die ganze Electricitätsmenge:

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n} ds,$$

das Integral über die ganze Oberfläche ausgedehnt; $-\partial V/\partial n$ bedeutet hierin die erste Ableitung des electrischen Potentials nach der nach aussen gerichteten Normale der Oberfläche. Ist aber h die Flächendichtigkeit der Electricität, so ist:

$$Q = \int h ds = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n} ds.$$

Demnach ist die nach aussen, normal zur Oberfläche gerichtete Kraftcomponente, welche auf die Einheit der Electricität im Punkte P wirkt:

$$-\frac{\partial V_P}{\partial n} = 4\pi h_P.$$

In dem Oberflächenelement ds, in welchem P liegt, befindet sich die Electricitätsmenge $h_P ds$, wenn man die Dichtigkeit ds constant $= h_P$ annimmt; also ist die auf einem Oberflächenelement wirksame Spannung im ganzen:

$$-h ds . \frac{\partial V}{\partial n} = 4\pi h^2 ds.$$

Die Oberflächenspannung ist also dem Quadrat der electrischen Dichtigkeit proportional.

Bringt also die Aufhebung der Oberflächenspannung an den Spitzen ihr Zurückweichen hervor, so ist die entwickelte Reactionskraft, da sie der Spannung proportional sein muss, dem Quadrat der Dichtigkeit proportional oder umgekehrt. Die Dichtigkeiten der Electricität oder die betr. Electricitätsmengen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Reactionskräften oder aus den Abweichungswinkeln der alten Gleichgewichtslage von den neuen.

Dieser Satz stimmt also mit beiden Hypothesen über die Spitzenwirkung überein.

3. Der im Vorhergehenden abgeleitete Satz kann nun Anwendung auf mehrere praktische Aufgaben finden. Zu-

nächst eignet er sich zur Vergleichung der Wirksamkeit constanter Electricitätsquellen.

Verbindet man das Flugrad in der unter 1. beschriebenen Form mit einer Electricitätsquelle, welche beständig und gleichmässig functionirt, so wird durch die an den Spitzen wirkenden Reactionskräfte der Electricität der Platindraht tordirt und das Flugrad in einer neuen Gleichgewichtslage festgehalten. Für verschiedene Electricitätsquellen, bei welchen in gleichen Zeiten verschiedene Electricitätsmengen erzeugt werden, sind die Ablenkungswinkel der neuen Gleichgewichtslagen von der alten verschieden. Da sich aber die Electricitätsmengen, die unter gleichen Umständen zugeführt werden, wie die Quadratwurzeln aus den Reactionskräften oder aus den Ablenkungswinkeln verhalten, so sind die Intensitäten verschiedener Electricitätsquellen oder die von ihnen in gleichen Zeiten erzeugten Electricitätsmengen den Quadratwurzeln aus den Abweichungswinkeln der betreffenden Gleichgewichtslagen vom Ruhepunkt proportional.

Man hat bei dieser Methode nicht nöthig, durch eine Torsionsvorrichtung auf denselben Winkel zu reduciren und dann die Intensitäten den Quadratwurzeln aus den angewandten Torsionen proportional zu setzen; denn bei den hier allein beobachteten Gleichgewichtslagen wirken die abstossenden Kräfte der Electricität stets in derselben Entfernung auf die Spitzen. Um die Anwendbarkeit der Methode zu zeigen, mussten verschiedene constante Electricitätsquellen zur Vergleichung hergestellt werden. Dies geschah an einer Holtz'schen Influenzmaschine, indem beide Conductorkugeln möglichst weit auseinander geschoben und mit je einer Kugel eines Riess'schen Funkenmessers verbunden wurden. Die mit der negativen Electrode verbundene Kugel des Funkenmessers wurde ausserdem mit der Erde, die andere bewegliche Kugel mit dem Flugrade in der oben angegebenen Weise verbunden.

Die verschiedenen constanten Electricitätsquellen wurden nun in der Weise hergestellt, dass bei derselben gleichmässigen Drehung der Maschine die bewegliche Kugel des Funkenmessers von der festen Kugel verschieden weit ver-

schoben wurde. Die Abweichung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage war um so grösser, je weiter die Kugeln des Funkenmessers voneinander gerückt waren; denn in dem Maasse wurde in gleichen Zeiten den Spitzen des Flugrades mehr Electricität zugeführt. Fünf Beobachtungsreihen ergaben für verschiedene Stellungen des Funkenmessers die Ausschlagswinkel:

Funkenmesser mm	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel
0	0°	0°	0°	0°	0°	0°
1	1	1	1	1	1	1
2	1,5	1,5	1,5	2	1,5	1,6
3	2	2	2	2	1,5	1,9
4	2	2	2,5	3	2,5	2,4
5	3	3	3	4	3,5	3,3
6	12,5	14	13	13	14	13,3
7	20	20	19,5	20	20	19,9
8	24	28	25	25	25	25,4
10	38	40	42	46	44	42,0
20	70	79	84	78	89	80,0
∞	150	142	145	147	153	147,4

sodass sich also die bei den einzelnen Fällen in gleichen Zeiten übergeführten Electricitätsmengen oder die Intensitäten verhalten wie die Quadratwurzeln:

Funkenmesser mm	1.	2.	3.	4.	5.	Mittel
0	0°	0°	0°	0°	0°	0°
1	1	1	1	1	1	1
2	1.22	1,22	1,22	1,41	1,22	1,26
3	1,41	1,41	1,41	1,41	1,22	1,37
4	1,41	1,41	1,58	1,73	1,58	1,54
5	1,73	1,73	1,73	2,00	1,87	1,81
6	3,50	3,74	3,60	3,60	3,74	3,64
7	4,47	4,47	4,42	4,47	4,47	4,46
8	4,90	5,29	5,00	5,00	5,50	5,04
10	6,16	6,32	6,48	6,78	6,63	6,47
20	8,37	8,89	9,16	8,88	9,43	8,95
∞	12,25	11,91	12,04	12,12	12,37	12,14

Z. B. verhalten sich die in gleichen Zeiten bei der Stellung von 6, 8, 20 mm des Funkenmessers in das Flugrad abgeleiteten Electricitätsmengen wie:

$$3,64 : 5,04 : 8,95 = 1 : 1,38 : 2,46.$$

Die Beobachtungen weichen nicht so sehr von dem Mittel ab, dass man nicht hoffen dürfte, die Fehler durch genaue

Construction des Apparates unwesentlich zu machen. Diese Methode wäre somit geeignet, constante Quellen statischer Electricität miteinander zu vergleichen. Will man die Reactionskräfte messen, so hat man nur die in der ersten Tabelle erhaltenen Zahlen mit dem in (1) erhaltenen Ausdruck:

$P = 1607{,}9\ \mathrm{mm\,.\,mg\,.\,sec}^{-2}$ zu multipliciren.

4) Das electrische Flugrad kann noch eine andere Verwendung für das Studium der Electricitätserscheinungen finden. Man kann nämlich mit seiner Hülfe Electricitätsmengen im Gleichgewicht oder ihre Potentiale miteinander vergleichen. Leitet man einem Flugrad, das wie das obige eingerichtet ist, Electricität durch den Platindraht zu, oder verbindet man es leitend mit einem electrisirten Körper (natürlich vermittelst einer isolirenden Handhabe), so dreht sich dasselbe rückwärts, und zwar um einen um so grösseren Winkel, je mehr Electricität jener Körper besass.

Es liegt nun der Gedanke nahe, an einem wie oben construirten Apparate durch Hinzufügung bekannter Electricitätsmengen eine Tabelle der Ausschläge herzustellen, sodass für einen Ausschlag, den eine unbekannte Electricitätsmenge gäbe, der zugehörige Werth der Electricitätsmenge nach der Einheit, nach welcher die Tabelle angefertigt ist, aus dieser durch Interpolation erhalten würde. Man kann dabei die Empfindlichkeit des Instrumentes bedeutend steigern, wenn man einen sehr dünnen Platindraht und ein kleines Glimmerblatt anwendet.

Dieser Weg ist aber weitläufig. Er war auch nicht der einzige, der zum Ziele führte; denn es stellte sich heraus, dass sich die Electricitätsmengen hierbei ebenso wie in dem oben behandelten ähnlichen Fall als einfache Function der Ausschlagswinkel ausdrücken lassen.

Um dieses möglich zu machen, mussten das Glimmerblatt und die Flüssigkeit natürlich fortfallen, weil hier keine Gleichgewichtslagen beobachtet werden, also die Widerstände in der Flüssigkeit mit in Rechnung gezogen werden müssten. Alsdann schien es erlaubt, gerade so wie oben die Electricitätsmengen den Quadratwurzeln aus den Ausschlagswinkeln proportional zu setzen. Die ausströmende Electri-

cität ertheilt nämlich dem Flugrade ein Drehungsmoment. Dasselbe ist $= D$, der Directionskraft für eine Drehung von einem Grad; dann ist es für eine Drehung von α Grad: $P = \alpha . D$.

Das Potential W der Electricität Q auf sich selbst ist demnach $= \alpha . D$; denn es ist gleich der Arbeit, welche die Electricität Q beim Verschwinden leisten kann. W ist aber dem Quadrat der Electricitätsmenge proportional; es ist nämlich $W = \frac{1}{2} A . Q^2$. Folglich sind die verschiedenen Electricitätsmengen Q_1, Q_2, ... den Quadratwurzeln aus den Directionskräften $\sqrt{\alpha_1 D}$, $\sqrt{\alpha_2 D}$, ... oder den Quadratwurzeln aus den Ausschlagswinkeln $\sqrt{\alpha_1}$, $\sqrt{\alpha_2}$..., proportional.

Da auch das Potential der Electricitätsmenge Q:

$V = A . Q$ ist, worin A eine Constante,

nämlich den reciproken Werth der Capacität des betreffenden Leiters bezeichnet, also das Potential der Electricitätsmenge proportional ist, so erhalten wir den Satz:

Die Potentiale von Electricitätsmengen, die auf demselben Leiter nacheinander im Gleichgewicht sind, sind den Quadratwurzeln aus den Ausschlagswinkeln proportional, welche jene Electricitätsmengen am Flugrad hervorbringen, wenn der Körper jedesmal mit demselben leitend verbunden wird.

Von der Anwendbarkeit dieses Satzes konnte ich mich mehrfach überzeugen. Ich lud eine Leydener Flasche vermittelst der Maassflasche mehrere mal in möglichst gleicher Stärke (bei derselben Stellung der Kugeln der Maassflasche sprangen jedesmal drei Funken über), ergriff sie hierauf und brachte ihren Knopf einen Augenblick an die Klemmschraube des Apparates. Der Platindraht war für diese Versuche 310 mm lang. Sechsmal wiederholt, erhielt ich, nachdem ich behufs Aufhebung der Wirkung des Residuums vorher mehrere mal geladen und entladen hatte, die Ausschläge:

$4{,}2^0$; 4^0; $4{,}5^0$; $4{,}4^0$; 5^0; $4{,}8^0$.

Die durch Berührung ins Flugrad übergeführten inneren Ueberschüsse der Leydener Flasche an Electricität oder ihre Potentiale verhalten sich demnach wie die Quadratwurzeln jener Zahlen:

$2{,}05 : 2 : 2{,}12 : 2{,}10 : 2{,}24 : 2{,}19$.

Auch durch Influenzwirkung der Flasche auf die Metallklemmen des Flugrades wurden stets Ausschläge erzielt, aber nicht in befriedigender Regelmässigkeit.

Ferner lud ich eine viel grössere, sehr genau gearbeitete Leydener Flasche durch die Lane'sche Maassflasche bis zum Maximum; bei jeder Ladung ergaben sich fünf Funken der letzteren.

Dann aber wurde dieselbe Flasche geladen, indem sie wieder auf einen isolirten Teller gestellt, und der Knopf mit dem Conductor der Maschine, jedoch die äussere Belegung mit dem Flugrad in leitende Verbindung gesetzt wurde. Die Maschine wurde immer so lange gedreht, bis das Flugrad umkehrte. Dies wurde als Zeichen angenommen, dass die Maximalladung eingetreten war. Bei sieben Wiederholungen erhielt ich die Ausschläge:

140°, 420°, 424°, 415°, 445°, 410°, 412°.

Demnach verhalten sich die Influenzelectricitäten zweiter Art aus dem äusseren Beleg der Leydener Flasche in den einzelnen Versuchen wie die Quadratwurzeln jener Zahlen:

20,98 : 20,49 : 20,59 : 20,37 : 21,09 : 20,25 : 20,30;

im Mittel 20,58. Die Umkehrung dieses Experimentes, nämlich die Verbindung des äusseren Beleges mit dem Conductor, des inneren mit dem Flugrade, ergab die Ausschläge:

476°, 480°, 465°, 480°, 499°, 486°, 470°;

sodass sich also die Influenzelectricitäten zweiter Art aus dem inneren Beleg verhalten wie:

21,82 : 21,91 : 21,56 : 21,91 : 22,34 : 22,05 : 21,68; im Mittel 21,90

Diese Versuche waren mühsam und zeitraubend, denn es musste immer die Annahme des Ruhepunktes abgewartet werden, was aber lange Zeit erforderte, da die unifilare Aufhängung keine stabile Gleichgewichtslage bewirken konnte. Für diese Versuche wird also jedenfalls die bifilare Aufhängung gewählt werden müssen, welche die gewünschte Stabilität sichert, ohne die Empfindlichkeit und Einfachheit der Operation zu beeinträchtigen.

Zuvörderst wird sich dann der Apparat dazu eignen,

die Leydener Flasche gleichmässig zu laden, resp. ihre Ladungen zu vergleichen.

Dazu stelle man die Flasche isolirt auf, verbinde die innere Belegung mit der Electrisirmaschine, die äussere mit dem Flugrad. Man hat dann die Maschine immer so lange zu drehen, bis das Flugrad um einen beliebigen, aber constanten Winkel abgewichen ist. Die Maximalladung würde für den grösstmöglichen Winkel anzunehmen sein. Da nämlich in diesem Falle das Flugrad die Influenzelectricitäten zweiter Art misst, diese aber den Potentialen der Flasche proportional sind, so kann man durch das Flugrad die Ladungen gleich machen, resp. vergleichen,

Die Anregung zu dieser Arbeit und das Modell zu dem hierbei benutzten Apparate verdanke ich der Güte des Hrn. Prof. Dr. Melde; diese Arbeit erscheint somit als eine Folge zu der Originalmittheilung des Hrn. Prof. Melde in den Beibl. 6. p. 800. 1882.

VI. *Ueber die Frage, ob bei der Condensation von Wasserdampf eine Electricitätserregung stattfindet; von S. Kalischer.*

Die Frage, welche den Gegenstand dieser Untersuchung bildet, ist bekanntlich von grösstem Interesse für das Problem des Ursprunges der Wolken- oder Gewitterelectricität, und die Arbeit ist auch unternommen worden in der Absicht und Hoffnung, einen Beitrag zur Lösung desselben liefern zu können. So nahe es, seitdem die electrische Natur des Gewitters erkannt war, auch lag, einen ursächlichen Zusammenhang zwischen diesem und der Condensation des Wasserdampfes zu suchen, so bildete doch der Act der Verdampfung in dieser Beziehung weit häufiger einen Gegenstand von Versuchen, als der Act der Condensation. Allen Physikern jedoch, welche in letzterem Falle das Auftreten von Electricität nachgewiesen zu haben behaupten, ist der Vorwurf

zu machen, dass die Art der Erzeugung des Wasserdampfes selbst die Quelle der Electricität sein konnte, welche sie bei seiner Condensation gefunden haben. So entwickelte Bennet[1]), (1787) der erste, welcher hierüber Versuche angestellt hat, den Dampf, indem er glühende Kohlen mit Wasser besprengte; Volta[2]) erhielt ein Jahr darauf das beste Resultat, wenn er das Gasgemenge untersuchte, welches aus glühenden Kohlen, die mit nicht glühenden bedeckt waren, aufstieg, während das Resultat ihn weniger befriedigte, wenn er die Dämpfe aus siedendem Wasser gewann, und er nur schwache Anzeichen von Electricität erhielt, wenn er den Dampf sich condensiren liess, welcher aus Wasser von 65° R. sich entwickelte.[3]) Grotthus erzeugte den Dampf, indem er Wasser auf im Feuer erhitzte Gefässe von Metall oder Porcellan fallen liess.[4])

In neuerer Zeit hat Palmieri Versuche mitgetheilt, welche eine Electricitätserregung bei der Condensation nachweisen sollen, aber auch er erhielt die Dämpfe aus siedendem Wasser[5]), sodass eine Reibung von möglicherweise durch den Dampf mitgerissenen Wasser- und Staubtheilchen an den Gefässwänden nicht ausgeschlossen war. Saussure[6]) und Reich[7]) haben zwar selbst bei der Condensation von Wasserdämpfen, die aus erhitztem Wasser aufgestiegen waren, keine Electricität nachweisen können, aber nichtsdestoweniger schien es mir wohl der Mühe werth, die Frage, unter Ausschluss der Fehlerquellen, welche den genannten Physikern zum Vorwurf gemacht werden können, mit unseren verfeinerten Hülfsmitteln einer erneuten Untersuchung zu unterwerfen. Auch sollten reichlichere Mengen des Condensationsproductes zur Wir-

1) S. Volta, Meteorologische Beobachtungen, besonders über die atmosphärische Electricität. 1799. 4. Brief. p. 141.

2) l. c. p. 144.

3) l. c. 6. Brief. p. 206.

4) Grotthus, Gehler's Journ. 9. p. 225. 1810.

5) Palmieri, Il nuovo Cim. 13. p. 236. 1861; 14. p. 9. 1862.

6) Saussure, Voyage dans les Alpes. 2. p. 251. § 823. 1786.

7) Reich, Abhandl. bei Begründ. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1846. p. 203.

kung gelangen, als in den früheren Versuchen angewandt worden zu sein scheinen.[1])

Vor allem kam es darauf an, jede Möglichkeit einer Reibung auszuschliessen, und hiermit war der Gang meiner Untersuchung vorgeschrieben, nämlich den Wasserdampf der Atmosphäre selbst durch künstliche Abkühlung sich condensiren zu lassen. Merkwürdigerweise ist dieser am nächsten liegende Weg bisher nicht eingeschlagen worden. Zu einem etwaigen Nachweis einer Electricitätserregung benutzte ich ein Quadrantenelectrometer Kirchhoff'scher Construction, bei welchem die Nadel über den Quadranten schwebte und an einem feinen Glasfaden hing. Die Zuleitung erfolgte zu dem einen Quadrantenpaare, während das andere, sowie die äussere metallische Hülle durch die Gas- oder Wasserleitung mit der Erde verbunden war. Dem Electrometer war eine solche Empfindlichkeit gegeben, dass 1 Daniell, dessen einer Pol zur Erde abgeleitet war, einen Ausschlag von 70—80, in einigen Fällen auch noch mehr Scalentheilen hervorrief, wenn die Entfernung des Spiegels von der Scala $1^1/_2$ m betrug.

Zwölf grosse, aussen mit Stanniol bekleidete Bechergläser wurden mit Eis gefüllt und auf eine Platte von verzinntem Eisenblech gestellt, welche auf einer dicken Glasplatte ruhte, während diese selbst mit ihren vier oder nur mit zwei diagonal gegenüberliegenden Ecken auf Paraffinstücken auflag. Das Ganze stand in einem zur Erde abgeleiteten Metallkasten, dessen Deckel aus einem ziemlich feinmaschigen Drahtnetz oder einem Geflecht aus Stanniolstreifen bestand, um der Luft Zutritt zu gestatten. Natürlich schlug sich allmählich Wasserdampf aus der Atmosphäre an den Aussenflächen der Bechergläser nieder. Von der Platte ging ein Draht, von einem zur Erde abgeleiteten Messingrohr umgeben, zu dem einen Quadrantenpaare des Electrometers. Die Iso-

1) Von den Versuchen des Hrn. Blake, welcher ebenfalls bei der Condensation von künstlich erzeugtem Wasserdampf keine Electricitätsentwickelung fand (Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1882. p. 636; Wied. Ann. 18. p. 525. 1883) erhielt ich erst Kenntniss, als ich die meinigen begonnen hatte.

lirung war so gut als möglich; war das Electrometer mit Zwischenschaltung der Platte mit dem einen Pol eines Daniells verbunden, dessen anderer Pol zur Erde abgeleitet war, so zeigte sich nach einer Viertelstunde kein Verlust durch mangelhafte Isolirung. Zugleich schützte die Glasplatte und die zwischen dieser und den Paraffinstücken zwischengeschalteten Gummischeiben die Isolatoren vor Abkühlung durch Leitung, welche einen feuchten Niederschlag auf ihnen hätte herbeiführen können. In der That erwies sich die Isolirung nach Beendigung eines Versuches umgeändert. Das Electrometer hielt die Ladung gut, es verlor in 24 Stunden durchschnittlich kaum einen Scalentheil.[1])

Die Bechergläser wurden ausserhalb des Kastens möglichst schnell mit Eis gefüllt und vorsichtig eingestellt, währenddess auch das Quadrantenpaar, welches mit der Metallplatte in Verbindung stand, zur Erde abgeleitet war. Nachdem der Deckel auf den Kasten aufgelegt worden, wurde die Verbindung der Platte mit der Erde unterbrochen und nun der Gang der Electrometernadel beobachtet.

Die Natur dieses Versuches erforderte oder machte es wenigstens sehr wünschenswerth, da der Zutritt der Luft nur ein beschränkter sein und die Condensation demgemäss nur sehr langsam erfolgen konnte, dass die Electrometernadel, wenn die Bechergläser leer waren, viele Stunden ruhig bliebe. Allein dies war, trotz aller Vorsichtsmaassregeln, niemals der Fall. Die längste Dauer, während welcher das Electrometer zuweilen völlig ruhig blieb, betrug eine Stunde. Im übrigen traten fast immer Schwankungen, Ablenkungen ein[2]), welche um so störender waren, als sie häufig längere Zeit hindurch

1) Ich benutzte auch ein dem beschriebenen ganz gleich construirtes Electrometer mit bifilarer Aufhängung (Coconfäden), welches, wie zu erwarten war, die Ladung weit weniger gut hielt.

2) Diese meine Erfahrungen mit dem Electrometer werden sicherlich von allen gemacht worden sein, welche ihre Beobachtungen continuirlich über einen längeren Zeitraum ausdehnten. Freeman konnte bei seiner Arbeit über die Frage einer Electricitätserregung bei der Verdampfung trotz aller Schutzmaassregeln das Electrometer nicht fünf Minuten in Ruhe erhalten. Cf. Phil. Mag. (5) **18.** p. 400. 1882.

langsam in einem und demselben Sinne erfolgten. Die Ablenkungen waren zu verschiedenen Zeiten verschieden, und es blieb daher nichts anderes übrig, als die Beobachtung derselben über einen langen Zeitraum auszudehnen, während die Bechergläser leer oder aussen mit Wasser befeuchtet waren, und damit die Ablenkungen zu vergleichen, welche erhalten wurden, wenn die Bechergläser mit Eis gefüllt waren. Auf diese Weise habe ich eine grosse Menge von Zahlenreihen erhalten, in denen sich zwar keine Regelmässigkeit erkennen lässt, aber sie zwingen zu dem Schluss, dass eine Electricitätserregung bei der Condensation von Wasserdampf aus der Atmosphäre nicht nachweisbar ist, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Die Ablenkungen waren von derselben Art und Grössenordnung, gleichviel ob die Bechergläser mit Eis gefüllt waren oder nicht;

2. Die Ablenkungen erfolgten in beiden Fällen bald in dem einen, bald in dem anderen Sinne;

3. Die Ablenkungen waren zuweilen grösser, wenn die Bechergläser leer, als wenn sie mit Eis gefüllt waren.

Die Ursache dieser Ablenkungen ist vielleicht nicht ausschliesslich electrischer, sondern theilweise elastischer Natur, aber immerhin können diese Erfahrungen mit dem Electrometer den Wunsch nicht nachdrücklich genug laut werden lassen, dass auf den meteorologischen Stationen oder sonst geeigneten Observatorien regelmässige Beobachtungen des electrischen Zustandes der Luft angestellt und allgemein zugänglich gemacht werden mögen.

In Anbetracht der allgemeinen Erfahrung, dass stets beide Electricitäten zugleich auftreten, schien es mir wünschenswerth, das Condensationswasser getrennt von den Flächen, an denen es entstanden war, zu untersuchen. Zu diesem Ende wurden die Bechergläser in einen Holzrahmen, welcher, mit Füssen versehen, auf Paraffinstücken stand, gehängt, sodass die Bechergläser ein wenig über der Metallplatte sich befanden. Das Condensationswasser floss allmählich in Tropfen herab und sammelte sich auf der Platte. Aber auch hier war das Resultat ein negatives.

Faraday, dem wir so viele Versuche verdanken, welche Aufschluss über die sogenannte Dampfelectricität geben und damit zugleich zeigen, dass der Act der Verdampfung selbst keine Quelle der Electricität sei, hat keinen Versuch mitgetheilt, aus welchem sich ein gleicher Schluss für die Condensation von Wasserdampf ergäbe, aber er spricht die Ueberzeugung aus, dass letztere an und für sich ebensowenig wie die Verdampfung die unmittelbare Ursache einer Electricitätsentwickelung sei.[1]) Als Faraday comprimirte Luft plötzlich gegen ein konisches Metall- oder Holzstück ausströmen liess, zeigten sich letztere negativ electrisch, gerade so wie durch Dampf, welcher Wassertheilchen mit sich fortreisst. Die Ursache dieser Electricitätserregung findet Faraday in der Reibung der Wassertheilchen, welche sich infolge der die Ausdehnung der Luft begleitenden Abkühlung condensirt hatten, gegen das Metall oder Holz.[2]) Obwohl die Vermuthung nahe liegt, dass die hier nachgewiesene Electricität schon bei der Ausströmung durch Reibung condensirter Wassertröpfchen an der Ausströmungsöffnung entwickelt worden sei, so scheint doch die Faraday'sche Erklärung die allein richtige zu sein. Ich comprimirte Luft vermittelst einer Pumpe, die isolirt aufgestellt war, in Glassgefässen, wie das electrische Ei, und verband den in das Innere führenden Metallstift oder die Ausströmungsöffnung mit dem einen Quadrantenpaare des Electrometers. Durch Oeffnung des Hahnes wurde die Luft plötzlich entspannt, und man sah das atmosphärische Wasser in feinen Tröpfchen herabfallen, ohne dass während der Dauer der Ausströmung auch nur der geringste Ausschlag am Electrometer wahrzunehmen gewesen wäre. Letzteres war auch nicht der Fall, als ich weit stärkere Compressionen in einer Metallbirne, in einem Falle bis zu 25 Atmosphären, anwandte, das mit dem Electrometer in Verbindung gesetzte Gefäss vermittelst Siegel-

1) Faraday, Exper. researches. (18.) 2. p. 108. § 2083.

2) l. c. p. 108 § 2130: This I attributed to the particles of water suddenly condensed from the expanding and cooled air rubbing against the metal or wood: such particles were very visible in the mist that appeared, and also by their effect of moistening the surface of the wood and metal.

lack isolirte und den Hahn mit einer isolirenden Handhabe öffnete, sodass die Luft mit nicht geringer Gewalt ausströmte. Ebensowenig erhielt ich unter den bisher erwähnten Versuchsbedingungen eine Wirkung, als ich statt des Quadrantenelectrometers ein sehr empfindliches Capillarelectrometer benutzte, dessen einer Pol zur Erde abgeleitet war, und welches den Vorzug bietet, keine Schwankungen zu machen.

Ich glaube berechtigt zu sein, meine Versuche für entscheidend zu halten und die Behauptung aussprechen zu dürfen, dass mit unseren Hülfsmitteln eine Electricitätserregung durch den Act der Condensation nicht nachweisbar sei. Es geht hiernach ferner nicht an, wie es noch vor kurzem Hr. Landerer that, zu behaupten, dass die Condensation Electricität hervorrufe. Derselbe hatte einen Telephondraht über dem Dache eines Hauses ausgespannt und hörte ein Knistern im Telephon, welches er zum Theil der Condensation von Wasserdampf zuschreibt.[1]) Ich habe wiederholt Wasserdampf auf der Platte eines Siemens'schen Telephons oder auf dem Drahte sich condensiren lassen, ohne die geringste Wirkung wahrzunehmen.

Endlich war das Resultat gleichfalls negativ, als ich unter den oben erwähnten, sonst unveränderten Umständen die Bechergläser, anstatt mit Eis, mit einer Kältemischung füllte, sodass sich alsbald eine Eisschicht an der Aussenfläche der Bechergläser bildete, — ein Resultat, welches der Hypothese des Hrn. Spring, dass der Ursprung der Gewitterelectricität eine Folge der Hagelbildung und Vernichtung der freien Oberfläche sei[2]), keineswegs günstig ist.

Das Facit dieser Versuche ist wenig tröstlich, da wir der Lösung des Problems von dem Ursprunge der Wolken- und Gewitterelectricität heute nicht näher stehen als vor hundert Jahren.

Physikal. Inst. d. Univ. Berlin, im August 1883.

---

1) Landerer, Compt. rend. **93.** p. 588. 1881.

2) Spring. Bull. de l'Acad. roy. de Belg. (3.) **4.** p. 13, 23. 1882.

VII. *Ueber den Einfluss der Härte des Stahles auf dessen Magnetisirbarkeit; von V. Strouhal und C. Barus.*

(Hierzu Taf. III.)

Inhalt[1]: I. Zweck und Plan der Arbeit II. Material. III. Magnetisirungsverfahren. IV. Bestimmung des magnetischen Momentes. V. Bestimmung des Härtegrades. VI. Verlauf des Anlassens der Magnete. VII. Versuchsreihen; Magnete von grösserem Dimensionsverhältniss. VIII. Versuchsreihen; Magnete von kleinerem Dimensionsverhältniss. IX. Folgerungen. X. Schluss.

I. Zweck und Plan der Arbeit.

Die Frage über den Zusammenhang zwischen den magnetischen Eigenschaften des Stahles und dessen Härtezustande ist bereits Gegenstand zahlreicher Untersuchungen[2] geworden.

Nachdem die einander scheinbar widersprechenden Resultate von J. Müller, Plücker und G. Wiedemann einerseits und Hansteen und Lamont andererseits durch die Arbeiten von Ch. Ruths und später C. Fromme in

1) Die ersten Mittheilungen über diese sowie die folgende Arbeit sind in den Verhandl. der phys.-med. Ges. zu Würzburg, N. F. **17.** p. 19. 1882 enthalten. Die vorliegende Neubearbeitung des Gegenstandes unterscheidet sich von den früheren Mittheilungen theils in der Form, indem die Beobachtungen auf neue Maasse umgerechnet und Reductionen angebracht sind, die erst durch später vorgenommene Arbeiten möglich geworden, theils aber auch in der Sache, indem das Beobachtungsmaterial bedeutend vergrössert und dadurch wesentlich vervollständigt worden ist.

2) Literaturangaben über diesen Gegenstand, sowie eine Zusammenstellung der Resultate früherer Untersuchungen enthält u. a. J. Lamont, Handbuch des Magnetismus, 1867, p. 249. G. Wiedemann, Galv. 2a. p. 340. 1874. — Von den neueren Arbeiten (seit 1876) sind ferner zu nennen: Ch. Ruths, Ueber den Magnetismus weicher Eisencylinder und verschieden harter Stahlsorten. Dortmund 1876. — C. Fromme, Gött. Nachr. **8.** p. 157. 1876. — J. M. Gaugain, Compt. rend. **82.** p. 144. 1876. — Trève und Durassier, Compt. rend. **82.** p. 27. 1876. — Thomas Gray, Phil. Mag. **6.** p. 321. 1878; Beibl. **3.** p. 37. 1879. — A. v. Waltenhofen, Dingler's Journ. **232.** p. 141. 1879; Beibl. **3.** p. 642. 1879. — A. Righi, Beibl. **5.** p. 62. 1881. — W. Metcalf, Beibl. **5.** p. 895. 1881. — A. Pictet, Arch. de Gen. (3) **6.** p. 113—125. 1881. Beibl. **6.** p. 253. 1882.

Uebereinstimmung und gegenseitige Ergänzung gebracht worden sind, war die obige Frage insofern als gelöst zu betrachten, als der Einfluss eines wichtigen Factors, des „Dimensionsverhältnisses“ richtig erkannt und berücksichtigt worden ist. Es wurde dadurch constatirt, dass der Einfluss des Härtezustandes des Stahles sowohl auf dessen temporären als auch permanenten[1]) Magnetismus bei kurzen und dicken Stahlmagneten sich in anderer Weise äussert, als bei langen und dünnen. Was ferner den für die Praxis wichtigsten permanenten Magnetismus des Stahles betrifft, und zwar insbesondere den erreichbar grössten, wo also der Magnet sich im Zustande der magnetischen Sättigung befindet, so lässt sich der bisherige Stand unserer Kenntnisse darüber, soweit es cylindrische Stäbe betrifft, in folgender Weise präcisiren:

Die glasharten Stahlmagnete nehmen mehr permanenten Magnetismus an, als die angelassenen, solange das Dimensionsverhältniss unterhalb eines bestimmten, für die Stahlsorte charakteristischen Uebergangswerthes liegt; oberhalb dieses Werthes werden dagegen die glasharten Magnete von den angelassenen überholt und da wieder die gelb angelassenen von den blau angelassenen.

Es lässt sich jedoch nicht in Abrede stellen, dass, trotz diesen, die Frage principiell in ihren Hauptzügen lösenden Resultaten der Gegenstand keineswegs erledigt ist. In der That sieht man, dass das Problem höchstens qualitativ, keineswegs aber quantitativ gelöst ist. Mit anderen Worten: Ueber den Verlauf des specifischen Magnetismus gesättigter Stahlmagnete mit deren Härtegrad bei continuirlicher Aenderung des letzteren geben uns die bisherigen Arbeiten keinen Aufschluss. Und doch ist es gerade dieser Verlauf und dessen Aenderung mit der einen arbiträren Constante, dem Dimensionsverhältniss, was einen tieferen Einblick in das Wesen der hier in Frage kommenden Function liefern könnte.

---

1) Bezüglich der Nomenclatur: temporär, permanent u. s. w. halten wir uns (entgegen Ch. Ruths) an die von G. Wiedemann in den Beibl. 1. p. 67. 1877 enthaltene Bemerkung.

Der Grund, warum die bisherigen Beobachtungen diesen Verlauf nur andeuten, liegt einmal und hauptsächlich in dem Umstande, dass der Härtegrad nur durch die Anlassfarben, also nur ungefähr charakterisirt wird. Seitdem es sich aus unseren Untersuchungen ergeben hatte, wie vortheilhaft man den galvanischen Leitungswiderstand des Stahles und dessen thermoelectrisches Verhalten als Maass des Härtegrades verwenden, und wie man mit Hülfe desselben die Anlasserscheinungen verfolgen und quantitativ präcisiren kann, waren wir der festen Ueberzeugung, dass sich in ähnlicher Weise auch die magnetischen Eigenschaften des Stahles, insbesondere also deren Aenderungen mit seinem Härtegrade würden studiren lassen. Zweitens möge hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass das Verhalten verschieden dicker Stahlstäbe keineswegs miteinander ohne weiteres vergleichbar ist. Die meisten Beobachter variiren das Dimensionsverhältniss dadurch, dass sie die Länge festhalten und den Durchmesser der Stäbe verschieden wählen. Es ist aber von vornherein zu erwarten, dass insbesondere das Härten, aber auch das Anlassen bei bestimmter Einwirkungsdauer einer hohen Temperatur je nach der Dicke des Stabes verschiedenen Erfolg bezüglich dessen Structur bringen wird — um so mehr, wenn, wie es unseres Wissens bei allen Beobachtungen bis jetzt gewesen, verschiedene Stäbe aus verschiedenem Material (nicht aus demselben Stück) gewählt und dabei beträchtlich (0,2 bis 0,7 cm) dick waren. Wie sehr aber, selbst bei gleicher Stahlsorte, verschiedene Exemplare des Stahles glashart gehärtet verschieden sich verhalten können, wird später (im nächsten Abschnitt) aus einigen Beispielen deutlich hervortreten. Der Thomson'sche Satz, nach welchem bei geometrisch ähnlichen Stäben, gleichen magnetisirenden Kräften gleiche Momente der Gewichtseinheit entsprechen, ist wohl für Eisenstäbe richtig, lässt sich jedoch keineswegs ohne weiteres auf Stahlstäbe übertragen, vielleicht wohl auf ausgeglühte, weniger auf angelassene, ganz sicher aber nicht auf glasharte Stahlstäbe, da hier die durch Härten bedingte Structur auch bei geometrisch ähn-

lichen Stäben je nach der Dicke durchaus eigenartig sich äussert.[1])

Alle die angeführten Gründe sprachen wohl dafür, dass eine neue Untersuchung dieses Gegenstandes wünschenswerth und lohnend zugleich sein dürfte, wenn wir sie mit Berücksichtigung aller der mit Stahl gemachten Erfahrungen durchführen würden. Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich zunächst auf gestreckte Magnete. Bei den 30 untersuchten Magneten variirt das Dimensionsverhältniss $\alpha = 120$ bis $\alpha = 10$. Aber auch für Magnete von noch kleinerem Dimensionsverhältniss ergeben sich aus dem vorhandenen Beobachtungsmaterial ziemlich sichere Schlüsse, welche in der Hauptsache die Frage, um die es sich handelt, vollkommen lösen. Bei der grossen Wichtigkeit aber, welche gerade kurze Magnete für die Praxis besitzen, insbesondere auch Ringmagnete und Spiegelmagnete, die mit Vorliebe für Galvanometer und Magnetometer angewandt werden, und wobei stets ein möglichst hoher Grad der Magnetisirbarkeit gefordert wird, bleibt es doch wünschenswerth, das Verhalten derselben noch einer besonderen und eingehenden Untersuchung zu unterziehen.

II. Material.

Als Material wählten wir diejenige Stahlsorte, die wir bereits auf ihr Verhalten beim Anlassen ausführlich studirt hatten, nämlich den von der Fabrik M. Cooks Brothers in Sheffield bezogenen „englischen Silberstahl", und zwar in zwei Drahtsorten, von der Dicke 0,084 cm und 0,15 cm. Die Drähte wurden mittelst eines starken galvanischen Stromes gehärtet; aus dem Vorrath glasharter Drähte wurden dann nur diejenigen gewählt, die, auf ihre Homogeneïtät durch galvanischen Widerstand (Abschnitt 5) untersucht, die besten Resultate geliefert haben.

---

1) Diese unsere, bereits im Jahre 1882 mit denselben Worten ausgesprochene Behauptung hat auch Hr. Hugo Meyer bestätigt gefunden, indem er in seiner Arbeit: Ueber die Magnetisirungsfunction von Stahl und Nickel, Wied. Ann. 18. p. 248. 1883, zu der Folgerung gelangt, dass der Thomson'sche Satz weder für harten, noch für weichen Stahl richtig ist.

Man hätte nun erwarten können, dass bei angeblich gleicher Stahlsorte, bei gleicher Dicke der Drähte und bei gleicher Art der Härtung — soweit man diese überhaupt beherrschen kann — glasharte Magnete aus verschiedenen Drähten hergestellt miteinander in Bezug auf ihren grösstmöglichen permanenten Magnetismus vergleichbar wären. In dieser Erwartung wurden aus verschiedenen Drähten — von nahe gleichem Härtegrad — verschieden lange Magnete hergestellt. Bei gleicher Art der Magnetisirung hätte dann das Moment der Masseneinheit — nach dem Thomson'schen Satze — eine Function des Dimensionsverhältnisses, — oder, weil die Dicke der Magnete sehr nahe gleich gewesen, eine Function der Länge der Magnete sein müssen, in der Art, dass der specifische Magnetismus mit der Länge bis zu einem gewissen Grenzwerthe hätte zunehmen müssen.

Diese Erwartung hat sich jedoch keineswegs bestätigt. Es zeigte sich vielmehr, dass jeder Draht ein ganz selbstständiges Verhalten, eine so zu sagen individuelle Magnetisirbarkeit zeigt, infolge deren die aus ihm hergestellten Magnete wohl unter sich, jedoch keineswegs mit anderen, aus einem zweiten Draht hergestellten vergleichbar sind. Dass die Art der Härtung dabei eine Hauptrolle spielt, ist ohne Zweifel. Bei einem und demselben Magnet, den wir nach einander wiederholt gehärtet und bis zur Sättigung magnetisirt haben, fanden wir oft ganz bedeutende Unterschiede. Auch das specifische Gewicht ist dabei maassgebend, dürfte jedoch auch wieder mit der Art der Härtung in inniger Beziehung stehen. Wir unterlassen es, Beispiele über das Gesagte anzuführen, da sich solche auch aus dem weiter unten folgenden Beobachtungsmaterial entnehmen lassen.

Will man also das Problem, in welcher Weise die Magnetisirbarkeit des Stahles mit dessen Härtegrad sich ändert, bei Magneten verschiedener Dimensionsverhältnisse studiren, so müssen dieselben aus einem und demselben, vorher gehärteten und möglichst homogenen Draht hergestellt werden, da man sonst vergleichbare Resultate nie oder nur durch Zufall erhalten kann.

Für die Homogeneïtät der Drähte ist der galvanische Leitungswiderstand, wie aus den weiter unten folgenden Beispielen hervorgeht, ein sehr bequemes, dabei auch recht empfindliches Kriterium. In noch empfindlicherer Weise würde man diese Homogeneïtät auf magnetischem[1]) Wege constatiren, indem man aus dem ganzen Draht eine Anzahl kurzer, gleich langer Magnete herstellt, dieselben bis zur Sättigung magnetisirt und deren magnetisches Moment vergleicht, — eine Methode, die natürlich da nicht anwendbar ist, wo man den Draht als Ganzes behalten oder zu Magneten verschiedener Länge verwenden will.

Bei der dünneren (Durchmesser $2\varrho = 0{,}084$ cm) Drahtsorte, die wir angewandt haben, waren homogene Drähte sehr selten. Es hängt dies damit zusammen, dass bei der Härtung durch galvanischen Strom ein gleichmässiges Glühen bei dünnen Drähten schwer zu erzielen ist. Besser waren die Drähte der anderen dickeren Drahtsorte (Durchmesser $2\varrho = 0{,}15$ cm); einzelne Exemplare, die wir aus einem grösseren Vorrath ausgesucht haben, zeigten in dem grössten Theil ihrer Länge Differenzen im galvanischen Leitungswiderstand, welche blos wenige Zehntel Procent betrugen.

III. Magnetisirungsverfahren.

Die Magnetisirung der Drähte geschah mittelst einer cylindrischen Spule durch galvanischen Strom. Als Stromquelle stand uns die Hefner-Alteneck'sche dynamoelectrische Maschine des physikalischen Institutes zur Verfügung, wodurch es uns möglich geworden, sehr starke magnetisirende Kräfte zur Anwendung zu bringen und dadurch bei unseren Magneten den Zustand voller magnetischer Sättigung zu erreichen.

Die Magnetisirungsspule, von der Länge $2a = 22{,}3$ cm enthielt 10 Lagen, jede von der ungefähren Windungszahl $n = 55$, und zwar variirte der Halbmesser r der Windungslagen von $r = 2{,}1$ bis $5{,}3$ cm.

Wird die Magnetisirungsspule vom Strome i durchflossen,

1) Vgl. A. v. Waltenhofen's Grundgedanken zur Untersuchung der Stahldrähte auf electromagnetischem Wege.

so ist bekanntlich die magnetisirende Kraft X_b auf einen in der Axe liegenden und von ihrer Mitte um b entfernten Punkt eines Magnetes für jede Lage der Spule:

$$X_b = \frac{\pi n i}{a}\left[\frac{a+b}{\sqrt{(a+b)^2+r^2}} + \frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2+r^2}}\right].$$

Bei unserer Anordnung war i etwa:

$$= 3{,}0 \frac{g^{1/2}\,cm^{1/2}}{sec} = 30 \text{ Ampères}.$$

Berechnet man nun mit diesem Werth die magnetisirende Kraft X_b für jede Lage bei verschiedenem Abstand b (cm), so erhält man für unsere Spule als Gesammtkraft ΣX_b:

$$\left(\text{Dimension: } \frac{g^{1/2}}{cm^{1/2}\,sec}\right),$$

$b =$	0	1	2	3	4	5
$\Sigma X_b =$	884	882	879	874	865	851.

Aus diesen Zahlen gewinnt man ein Urtheil, inwiefern die magnetisirten Drähte innerhalb eines homogenen magnetischen Feldes sich befanden. Der längste unserer Magnete war 10 cm lang; die grösste Variation der magnetischen Kraft betrug also etwa 3 bis 4%, bei den übrigen Magneten war diese Variation noch beträchtlich kleiner.

Für die mittlere Scheidekraft X einer Windungslage auf einen Magnet von der Länge $2b$ hat man den Ausdruck:

$$X = \frac{\pi n i}{a b}\left[\sqrt{(a+b)^2+r^2} - \sqrt{(a-b)^2+r^2}\right].$$

Bei unserer Spule ergab die Berechnung der Gesammtkraft ΣX aller Lagen für verschiedene Längen b (cm) das Resultat:

$$\left(\text{Dimension } \frac{g^{1/2}}{cm^{1/2}\,sec}\right),$$

$b =$	0	1	2	3	4	5
$\Sigma X =$	884	883	882	880	877	874.

Die grösste mittlere Scheidekraft, welche **Ruths** bei seinen Untersuchungen über das Verhalten des temporären Magnetismus angewandt hatte, war $\Sigma X = 40$ bei Eisendrähten und $\Sigma X = 147$ bei Stahlstäben. Bei unseren be-

deutend grösseren magnetischen Kräften erscheint die Annahme, dass unsere Magnete den Zustand vollständiger Sättigung erreicht haben, gewiss sehr berechtigt, um so mehr, als dieselben nur von sehr geringer Dicke gewesen. In der That überzeugten wir uns öfters, dass eine wiederholte Magnetisirung keine Erhöhung der permanenten Momente lieferte, die 1 % des Ganzen erreicht hätte.

Bei der Magnetisirung mit Spule durch den galvanischen Strom ist stets die Frage zu entscheiden, in welcher Weise der zu magnetisirende Draht der magnetisirenden Wirkung des Stromes ausgesetzt und wieder entzogen werden soll. Einige Beobachter, wie G. Wiedemann und C. Fromme brachten den zu magnetisirenden Stab in die Spirale erst dann, nachdem der Strom bereits geschlossen, und entfernten ihn, noch ehe der Strom geöffnet wurde. Durch dieses Verfahren wird die complicirende Wirkung inducirter Ströme wohl vermieden, dagegen der Vortheil des homogenen magnetischen Feldes, aus welchem die Stäbe herausgebracht werden, nicht gewahrt und die gleichmässige Vertheilung des Magnetismus dadurch möglicherweise beeinträchtigt. Aus diesem letzteren Grunde haben Holtz und Ruths vorgezogen, den Strom plötzlich zu schliessen und zu öffnen, während der zu magnetisirende Stab in der Spirale lag. Beide Methoden sind von C. Fromme[1]) zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung gemacht worden.

Wir haben nun von diesen beiden Methoden keiner den Vorzug gegeben, sondern das unter den vorliegenden Verhältnissen einfachste Verfahren gewählt, indem wir den magnetisirenden Strom allmählich anwachsen und ebenso allmählich aufhören liessen.

Beides ist bei den durch einen Gasmotor getriebenen dynamoelectrischen Maschinen von selbst gegeben. Beim Einrücken der Maschine steigt der Strom rasch, aber doch allmählich an und fällt ebenso allmählich ab beim langsamen Ausrücken des Motors.

Wir sind zu dem Glauben berechtigt, dass durch diese

1) C. Fromme, Wied. Ann. **5.** p. 345. 1878.

Art der Magnetisirung das permanente Moment am wenigsten eine nachträgliche Schwächung erleidet.

Es wurde also in eine in der Axe der Spirale befindliche enge Glasröhre der Draht eingelegt, dann die Maschine eingerückt, wodurch der Draht in die Mitte der Spirale hineingezogen wurde, dann liess man die Maschine etwa 10 bis 15 Secunden laufen und rückte wieder langsam aus. Nach einer Pause von etwa 30 Secunden wiederholte man das Verfahren bei demselben Draht nochmals. Länger als die angegebene Zeit durfte man den sehr starken Strom nicht geschlossen halten, um eine beträchtlichere Erwärmung der Spirale zu vermeiden.

IV. Bestimmung des magnetischen Momentes.

Die magnetisirten Drahtstücke wurden durch Ablenkungen eines gedämpften Magnetspiegels theils in erster, theils in zweiter Hauptlage in bekannter Weise mittelst Fernrohr und Scala untersucht.

Die Magnete wurden dabei an einem von Hrn. E. Hartmann nach Prof. F. Kohlrausch zu ähnlichen Zwecken besonders construirten Apparat befestigt, mittelst dessen sie stets in dieselbe relative Lage zum Magnetspiegel gebracht und dabei um 180° umgedreht werden konnten.

Der Apparat bestand aus einem horizontalen, mit Stellschrauben versehenen massiven Messingring, an welchem zwei verticale Messingsäulen als Träger eines in Grade getheilten horizontalen Kreises befestigt waren. In der Mitte des letzteren befand sich eine in einem konischen Lager drehbare und mit zwei Nonien versehene Alhidade, in deren Mitte ein vertical in der Höhe verstellbarer Messingstab als Halter für die Magnete festgeklemmt werden konnte.

An dem unteren Ende dieses Halters wurden die Magnete in passender Weise befestigt. Der Apparat wurde ein für allemal aufgestellt und orientirt und die Entfernung seiner Axe von dem (Sauerwaldt'schen) Stahlspiegel des Magnetometers bestimmt.

Dadurch sind die relativen Bestimmungen (und auf diese kam es bei der vorliegenden Untersuchung besonders

an) der Momente unserer Magnete von dem Abstand derselben vom Spiegel des Magnetometers unabhängig gemacht worden.

Die Berechnung geschah nach den bekannten Formeln:

$$M = \frac{1}{2}\frac{r^3\,T\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}}$$

für die erste, und:

$$M = \frac{r^3\,T\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 - \frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}}$$

für die zweite Hauptlage.

Darin bedeutet T die mittlere horizontale Intensität für den Beobachtungsstandpunkt, r den Abstand des Magnetometerspiegels von der Drehungsaxe des Ablenkungsapparates, φ den Ablenkungswinkel, l den Polabstand des Magnetes. Für den letzteren wurde durchweg der genäherte Werth $0{,}85\,L$ der Länge L der Magnete eingesetzt, was um so mehr berechtigt war, als das betreffende Correctionsglied für die relativen Bestimmungen von geringem Einfluss ist. Die Zahlenwerthe für die Constanten der Aufstellung sind weiter unten bei den betreffenden Beobachtungsreihen mitgetheilt.

Die Bestimmungen wurden bei gewöhnlicher, zwischen 18° bis 21° variirender Zimmertemperatur angestellt. Die durch diese Unterschiede bedingten Veränderungen des magnetischen Momentes wurden ebenso wie die Variationen der horizontalen Intensität als von secundärer Bedeutung nicht beachtet. Das Torsionsverhältniss des Magnetometers (bestimmt zu 0,00032) kam nicht in Betracht.

Um die mit Magneten verschiedener Länge erhaltenen Zahlen M auf ein von der Länge unabhängiges Maass zurückzuführen, ist in der Folge neben dem absoluten Moment M stets auch das Moment m der Masseneinheit (1 g) („specifischer Magnetismus") angeführt.

V. Bestimmung des Härtegrades.

Von den beiden zur Bestimmung des Härtezustandes des Stahles von uns früher angewandten Methoden, von denen die eine aus dem thermoelectrischen Verhalten, die andere aus dem galvanischen Leitungswiderstand auf den Härtegrad

des Stahles schliesst, wählten wir die letztere ihrer grösseren Einfachheit wegen. Auch hier waren wir vorzugsweise darauf bedacht, die relativen Bestimmungen des galvanischen Leitungswiderstandes sicher zu stellen, und erreichten dies in vorzüglicher Weise nach der Matthiessen'schen Modification der Wheatstone'schen Brückenmethode. In dem einen Hauptzweig der Wheatstone'schen Anordnung (Fig. 2) wurde die Brückenwalze (in der Figur schematisch als gerader Draht AB gezeichnet) von F. Kohlrausch[1]) in dem anderen mittelst dickerer Kupferdrähte der zu bestimmende Stahldraht $D_1 D_2$ und ein aus dickerem Neusilberdraht hergestelltes „Zehntel-Siemens" $Z_3 Z_4$ eingeschaltet. Der Stahldraht wurde durch zwei flache Klemmen mittelst zweier Messingplättchen geklemmt; nur auf diese Weise konnte ein Zerbrechen des dünnen und im glasharten Zustande äusserst spröden Drahtes vermieden werden. Der zum Vergleichszehntel verwendete Neusilberdraht war an dicke Kupferdrähte angelöthet, die an ihren Enden amalgamirt und in Quecksilbernäpfe eingetaucht waren. Von den Endpunkten A und B der Brückenwalze gingen Verbindungsdrähte zu einem Spiegelgalvanometer, dessen Ausschläge mit Fernrohr und Scala beobachtet wurden. Als Stromquelle reichten zwei Smee'sche Elemente vollständig hin.

Von den beiden Batteriedrähten ging der eine zu dem Contactröllchen der Brückenwalze, der andere wurde nacheinander mit zwei bestimmten Contactpunkten D_1 und D_2 auf dem zu bestimmenden Draht und mit den beiden Quecksilbernäpfchen Z_3 und Z_4 in Verbindung gebracht. Durch Einstellung auf den Strom = 0 in dem Brückenzweig ASB wurden auf dem Messdraht AB der Brückenwalze vier Punkte $M_1\, M_2\, M_3\, M_4$ bestimmt, welche den ganzen Draht AB im Verhältniss der Widerstände AD_1, $D_1 D_2$, $D_2 Z_3$, $Z_3 Z_4$ und $Z_4 B$ theilten; man hatte dann;

$$\frac{D_1 D_2}{Z_3 Z_4} = \frac{M_1 M_2}{M_3 M_4}$$

unabhängig von allen Contactunsicherheiten.

1) F. Kohlrausch, Verh. d. phys.-med. Ges. Würzburg, N. F. 15. p. 1. 1880.

Die Contactpunkte $D_1 D_2$ auf dem Draht wurden durch zwei flach zugespitzte Stahlnadeln gebildet, welche in einem bestimmten Abstand an einem Holzstab befestigt waren. An diese Nadeln waren oben zwei lange dünne Kupferdrähte angelöthet. Der Stab selbst war an einem rechtwinklig gebogenen Stück Brett befestigt, an welchem zugleich die zu den Nadeln führenden Drähte angebracht waren. Bei der Bestimmung wurde die ganze Vorrichtung passend so aufgestellt, dass die beiden Nadeln auf dem Draht ruhten; durch Klemmschrauben wurde dann der von der Stromquelle ausgehende Draht mit den zu den Nadeln führenden Kupferdrähten verbunden, welche letzteren lang und dünn waren, damit nicht bei der Befestigung die Nadeln durch Steifheit der Drähte gleiten.

Die ganze leicht improvisirte Vorrichtung bewährte sich in ausgezeichneter Weise. Trotzdem die zu messenden Widerstände nur wenige Hundertel Ohm betrugen, konnten dieselben mit grosser Sicherheit bis auf wenige Zehntelprocent genau bestimmt werden. Die Einstellung war auf der Brückenwalze mit Hülfe des Spiegelgalvanometers bis auf 0,1 Scalentheil, d. h. $^1/_{10000}$ Theil der Drahtlänge AB genau. Durch den Umstand, dass der Nadelabstand bei einem und demselben Magnet unverändert blieb — für verschieden lange Magnete hatten wir verschiedene solche Vorrichtungen mit grösserem und kleinerem Nadelabstand —, sowie dass die ganze Aufstellung unverändert und in einem Zimmer von sehr constanter Temperatur angebracht war, gestalteten sich die relativen Widerstandsbestimmungen sehr genau.

Wie man nach diesem Verfahren einen Draht auf seine Homogeneïtät prüfen konnte, ist ohne weiteres klar.

Indem man die Vorrichtung mit den beiden Nadeln auf verschiedene Theile des Drahtes legte, ohne an der übrigen Aufstellung das geringste zu ändern, konnte man den Widerstand verschiedener gleich langer Theile des Drahtes miteinander in sehr empfindlicher Weise vergleichen.

Grössere Schwierigkeiten bildeten die Querschnittbestimmungen der Drähte. Wir bestimmten den mittleren Durch-

messer aus mehreren äquidistanten Ablesungen mit einem Mikroskop mittelst Ocularscala.

Für relative Widerstandsänderungen der Drähte war diese Methode vollkommen hinreichend.

Aus dem für eine bestimmte Temperatur t erhaltenen Widerstand einer gemessenen Länge des Drahtes wurde zunächst der Widerstand W (Ohm) für die Länge 100 cm ermittelt und aus diesem der specifische Widerstand s (Mikrohm) für die Länge 1 cm und den Querschnitt 1 cm^2 berechnet und mittelst der für die Drahtsorte bekannten galvanischen Temperaturcoëfficienten auf die Normaltemperatur 0° reducirt. Dieser specifische Widerstand s ($\frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm) ist somit in der Folge als Maass der Härte beibehalten.

VI. Verlauf des Anlassens der Magnete.

Den Ausgangspunkt der Versuchsreihen bildete der glasharte Zustand der Magnete. Nachdem dieselben zuerst auf ihren Härtegrad durch galvanischen Leitungswiderstand geprüft worden waren, wurden sie frisch magnetisirt und auf ihren specifischen Magnetismus untersucht.

Darauf hin wurden die Magnete der anlassenden Wirkung des Wasserdampfes von 100° ausgesetzt, und zwar um allmähliche Aenderungen des Härtezustandes hervorzubringen, zuerst eine Stunde, dann weitere zwei, drei und vier Stunden lang.

In ähnlicher Weise wurden fernerhin die Magnete der anlassenden Wirkung des Anilindampfes von etwa 185° ausgesetzt, und zwar zuerst blos zwanzig Minuten, dann weitere vierzig Minuten, dann zwei, vier und sechs Stunden lang.

Als weitere Anlasstemperaturen wurden ferner die Schmelztemperaturen von Zinn (etwa 240°), Blei (330°) und Zink (420°) angewandt.

Zum Schluss wurden die Magnete ausgeglüht. Man setzte sie in ein mit Hammerschlag gefülltes Gasrohr, hüllte das letztere in Lehm ein und liess das ganze stark glühen und dann langsam erkalten.

Auf diese Weise hatte man zwischen den beiden extremen Härtezuständen, dem glasharten und weichen, noch etwa zwölf ziemlich gleichmässig vertheilte Härtegrade.

Jedesmal, nachdem die Magnete aus dem betreffenden Bad oder Dampf herausgenommen wurden, blieben sie eine Zeit lang liegen, wurden dann auf ihren Härtegrad geprüft, frisch magnetisirt und auf ihren Magnetismus untersucht.[1])

Der Verlauf des Anlassens stellt sich tabellarisch wie folgt dar:

Tabelle 1.

Dünnere Drahtsorte. $2\varrho = 0{,}084$ cm.

Verlauf des Anlassens	Specif. Widerstand $\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$ 0° Mikrohm	
	Draht I	Draht II
Glashart	38,5	37,3
1 Stunde im Wasserdampf 100°	36,3	34,7
3 Stunden „ „ „	34,8	33,0
6 „ „ „ „	33,9	32,2
10 „ „ „ „	33,4	31,6
20 Minuten im Anilindampf 185°	29,5	27,4
1 Stunde „ „ „	28,4	26,3
3 Stunden „ „ „	27,1	24,9
7 „ „ „ „	25,9	23,7
13 „ „ „ „	25,0	22,8
1 Minute im Bleibad 330° . .	20,4	18,9
1 Stunde „ „ „ . .	18,8	17,4
Ausgeglüht	15,7	14,5

1) Bei Magneten von grösserem Dimensionsverhältniss treten in den letzten, dem weichen Zustande naheliegenden Stadien der Härte Aenderungen des magnetischen Verhaltens ein, welche des hier auftretenden Maximums und des darauf folgenden raschen Abfalles wegen einer besonderen Untersuchung werth sind. Bei einer solchen müsste man dann durch Anwendung von noch höheren Anlasstemperaturen, als dies bei dieser Arbeit geschehen, zu dem weichen Zustande in allmählichen Uebergängen zu gelangen suchen.

Tabelle 2.

Dickere Drahtsorte. $2\varrho = 0,15$ cm.

Verlauf des Anlassens	Specifischer Widerstand $\frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm			
	Draht IX	Draht X	Draht XI	Draht XII
Glashart	47,2	46,8	43,8	43,5
1 Stunde im Wasserdampf 100°	42,0	41,7	38,6	38,4
3 Stunden „ „ „	39,5	39,3	36,5	36,2
6 „ „ „ „	38,2	38,0	35,1	34,9
10 „ „ „ „	37,4	37,1	34,3	34,0
20 Minuten im Anilindampf 185°	31,5	31,4	29,0	28,7
1 Stunde „ „ „	29,7	29,6	27,5	27,3
3 Stunden „ „ „	27,9	27,7	25,6	25,5
7 „ „ „ „	26,2	26,0	24,2	23,9
13 „ „ „ „	24,8	24,6	22,9	22,7
10 Minuten im Zinnbad 240°	24,0	23,8	22,2	22,0
1 Minute im Bleibad 330°	20,3	20,1	19,0	18,7
1 Stunde im Zinkbad 420°	17,5	17,2	16,2	16,0
Ausgeglüht	15,7	15,6	14,9	14,9

Inwiefern wir berechtigt gewesen, das für den unmagnetischen Zustand zunächst aufgestellte Maass der Härte auch auf den magnetischen Zustand zu übertragen und so die durch Magnetisirung der Drähte bewirkten Aenderungen im galvanischen Widerstand zu vernachlässigen, haben wir bereits in einer früheren kleinen Mittheilung besprochen.[1])

VII. Versuchsreihen.

Magnete von grösserem Dimensionsverhältniss.

Die erste Arbeit über den vorliegenden Gegenstand wurde mit Magneten ausgeführt, welche der dünneren Drahtsorte entnommen waren.[2]) Aus dem Draht I wurden die

1) V. Strouhal u. C. Barus, Wied. Ann. **14.** p. 54. 1881. Vgl. auch W. Beetz, Pogg. Ann. **128.** p. 193. 1866.

2) Die Vorsicht, Magnete aus einem und demselben Draht herzustellen, wurde anfänglich nicht beobachtet, vielmehr Magnete aus verschiedenen Drähten dieser Sorte bei einer planmässigen Wahl ihrer Länge hergestellt. Erst nach den ersten Bestimmungen zeigte es sich bei gra-

Magnete Nr. 1, 2, 3 und 4 hergestellt, aus dem Draht II die Magnete Nr. 6, 9 und 10. Leider zerbrach während der Untersuchung durch unvorsichtiges Klemmen bei der Widerstandsbestimmung der längste, Nr. 10, in drei Stücke; diese wurden dann weiter als Magnete Nr. 5, 7 und 8 geführt, indem die Numerirung nachträglich den Längen der Magnete entsprechend festgestellt wurde.

Die folgende Tabelle 3 enthält die Constanten dieser zehn Magnete. Die Dimensionen derselben wurden zunächst im glasharten Zustande ermittelt, im Verlaufe der Arbeit controlirt und zuletzt noch vor dem Ausglühen bestimmt; man konnte die durch Anlassen stattfindende Volumencontraction numerisch constatiren. In der Tabelle sind Mittelwerthe mitgetheilt. Das specifische Gewicht Δ der Drähte wurde aus der Masse und den Dimensionen der Drähte mehr zur Controle der Messungen berechnet und kann bei dem geringen Durchmesser der Drähte nicht genauer sein als etwa auf 1 Proc.

Tabelle 3.

Draht 2ϱ cm, Δ	Magnet Nr.	Masse μ g	Länge L cm	Dim.-Verh. α
I. $2\varrho = 0{,}0838$ cm, $\Delta = 7{,}70$	1	0,086	2,00	23,9
	2	172	4,05	48,4
	3	249	5,85	69,8
	4	336	7,90	94,3
II. $2\varrho = 0{,}0831$ cm, $\Delta = 7{,}69$	5	068	1,63	19,6
	6	126	3,03	36,5
	7	197	4,72	56,8
	8	236	5,66	68,1
	9	413	9,92	119,5
	10	502	12,06	145,1

phischen Darstellungen, dass nur Magnete, die aus einem und demselben Draht gemacht wurden, miteinander vergleichbar sind. Aus diesem Grunde wurde dann eine grössere Anzahl von Magneten, die einzeln standen, von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen und nur die den Drähten I und II entnommmenen beibehalten. Dieser Umstand erklärt die Unzweckmässigkeit in der Wahl der Dimensionsverhältnisse α, indem einige zwischenstehende Magnete wegfallen mussten.

Die Homogeneïtät der Drähte lässt sich aus den Bestimmungen des specifischen Widerstandes s beurtheilen. Derselbe wurde für alle Magnete gemessen, mit Ausnahme der sehr kurzen Magnete Nr. 1, 5 und 6; in den Tabellen ist für diese der Mittelwerth aus den für die anderen Magnete desselben Drahtes erhaltenen Werthen von s mitgetheilt, was durch einen . angezeigt ist.

Die magnetischen Messungen wurden in der zweiten Hauptlage ausgeführt. Die numerischen Werthe der Constanten, welche in die Formeln:

$$m = \frac{M}{\mu}, \quad M = \frac{r^3 T \operatorname{tg} \varphi}{1 - \frac{3}{8}\frac{l^2}{r^2}}, \quad 2 \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{n}{R}$$

eintreten, waren wie folgt:

$$T = 0{,}196 \frac{g^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{sec}}, \quad r = 26{,}34\ \mathrm{cm}, \quad R = 207{,}4\ \mathrm{cm}.$$

Die Resultate der Messungen enthält die folgende Zusammenstellung.

Draht	Magnet Nr.	α	W 1 m Ohm	t C.	s $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{cm}^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
			1. Magnete im glasharten Zustande.					
I	1	24	·0,726	·18,2	·38,5	1,34	2,89	33,7
	2	48	0,734	17,6	38,8	3,46	7,41	43,0
	3	70	0,727	18,3	38,6	5,28	11,20	45,0
	4	94	0,716	18,7	38,1	7,68	16,06	47,9
II	6	36	·0,719	·18,5	·37,3	2,58	5,54	43,9
	9	120	0,723	18,5	37,5	10,77	22,11	53,5
	10	145	0,714	18,5	37,1	13,78	27,65	55,1
			2. Magnete 1 Stunde im Wasserdampf.					
I	1	24	·0,687	·18,4	·36,3	1,33	2,85	33,3
	2	48	0,695	18,2	36,7	3,38	7,23	42,0
	3	70	0,683	18,4	36,4	5,19	11,01	44,3
	4	94	0,679	18,6	35,9	7,51	15,70	46,8
II	6	36	·0,670	·18,6	·34,7	2,53	5,44	43,1
	9	120	0,673	18,6	34,8	10,61	21,78	52,8
	10	145	0,667	18,6	34,6	13,53	27,15	54,1

Draht	Magnet Nr.	a	W 1 m Ohm	t C.	$s \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
3. Magnete weitere 2 (im ganzen 3) Stunden im Wasserdampf.								
I	1	24	·0,662	·20,1	·34,8	1,30	2,80	32,7
	2	48	0,669	20,0	35,1	3,30	7,06	41,0
	3	70	0,665	20,2	34,9	5,08	10,78	43,3
	4	94	0,653	20,2	34,4	7,41	15,49	46,2
II	6	36	·0,641	·20,1	·33,0	2,50	5,36	42,5
	9	120	0,644	20,2	33,2	10,41	21,38	51,8
	10	145	0,638	20,1	32,9	13,29	26,67	53,2
4. Magnete weitere 3 (im ganzen 6) Stunden im Wasserdampf.								
I	1	24	·0,648	·21,1	·33,9	1,28	2,76	32,2
	2	48	0,654	20,9	34,2	3,23	6,91	40,1
	3	70	0,651	21,3	34,1	5,00	10,60	42,7
	4	94	0,638	21,2	33,5	7,29	15,24	45,4
II	6	36	·0,626	·21,0	·32,2	2,47	5,31	42,0
	9	120	0,630	21,0	32,3	10,22	20,98	50,8
	10[1])	145	0,623	21,0	32,1	13,05	26,19	52,2
5. Magnete weitere 4 (im ganzen 10) Stunden im Wasserdampf.								
I	1	24	·0,637	·20,1	·33,4	1,28	2,75	32,1
	2	48	0,645	20,2	33,7	3,24	6,93	40,2
	3	70	0,640	20,1	33,6	5,00	10,60	42,7
	4	94	0,627	20,0	33,0	7,30	15,25	45,4
II	5	20	·0,614	·20,1	·31,6	0,93	2,01	29,6
	6	36	0,614	·20,1	·31,6	2,42	5,19	41,1
	7	57	0,614	20,2	31,6	4,28	9,13	46,4
	8	68	0,612	20,3	31,4	5,30	11,29	47,8
	9	120	0,617	19,8	31,7	10,26	21,06	51,0
6. Magnete 20 Minuten im Anilindampf.								
I	1	24	·0,566	·20,1	·29,5	1,28	2,76	32,2
	2	48	0,572	20,1	29,7	3,45	7,38	42,8
	3	70	0,568	20,1	29,6	5,38	11,41	45,9
	4	94	0,559	20,1	29,2	7,85	16,41	48,9
II	5	20	·0,536	·20,0	·27,4	0,92	1,98	29,1
	6	36	0,536	·20,0	·27,4	2,56	5,51	43,6
	7	57	0,534	20,0	27,3	4,51	9,62	48,9
	8	68	0,536	20,0	27,4	5,69	12,12	51,3
	9	120	0,539	20,0	27,5	11,05	22,69	55,0

1) Magnet bei der Widerstandsbestimmung durch unvorsichtiges Klemmen zerbrochen.

Draht	Magnet Nr.	α	W 1 m Ohm	t C.	$s \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
7. Magnete weitere 40 Minuten (im ganzen 1 Stunde) im Anilindampf.								
I	1	24	•0,545	•18,9	•28,4	1,36	2,93	34,1
	2	48	0,550	19,0	28,7	3,63	7,77	45,1
	3	70	0,546	19,0	28,5	5,64	11,96	48,1
	4	94	0,538	18,8	28,1	8,27	17,29	51,5
II	5	20	•0,514	•18,8	•26,3	0,94	2,04	30,0
	6	36	•0,514	•18,8	•26,3	2,68	5,75	45,6
	7	57	0,515	19,0	26,4	4,75	10,14	51,5
	8	68	0,512	19,0	26,2	5,96	12,69	53,7
	9	120	0,514	18,5	26,3	11,66	23,94	58,0
8. Magnete weitere 2 (im ganzen 3) Stunden im Anilindampf.								
I	1	24	•0,520	•18,9	•27,1	1,44	3,09	36,1
	2	48	0,523	18,8	27,2	3,93	8,41	48,8
	3	70	0,523	18,9	27,3	6,17	13,08	52,6
	4	94	0,514	19,0	26,8	8,99	18,80	56,0
II	5	20	•0,488	•18,8	•24,9	1,00	2,16	31,8
	6	36	•0,488	•18,8	•24,9	2,90	6,23	49,3
	7	57	0,487	18,7	24,9	5,16	11,01	55,9
	8	68	0,486	18,8	24,8	6,46	13,76	58,2
	9	120	0,490	19,0	24,9	12,68	26,03	63,1
9. Magnete weitere 4 (im ganzen 7) Stunden im Anilindampf.								
I	1	24	•0,500	•20,0	•25,9	1,51	3,25	37,9
	2	48	0,503	20,0	26,1	4,29	9,19	53,3
	3	70	0,502	20,0	26,0	6,72	14,26	57,3
	4	94	0,495	20,0	25,7	9,89	20,67	61,6
II	5	20	•0,466	•20,0	•23,7	1,09	2,36	34,7
	6	36	•0,466	•20,0	•23,7	3,11	6,69	53,0
	7	57	0,465	20,0	23,6	5,63	12,02	61,0
	8	68	0,467	20,0	23,7	7,11	15,14	64,0
	9	120	0,467	20,0	23,7	13,88	28,50	69,0
10. Magnete weitere 6 (im ganzen 13) Stunden im Anilindampf.								
I	1	24	•0,483	•19,9	•25,0	1,59	3,42	39,9
	2	48	0,483	19,9	24,9	4,60	9,85	57,1
	3	70	0,485	19,9	25,1	7,19	15,25	61,3
	4	94	0,480	19,9	24,9	10,50	21,95	65,4
II	5	20	•0,449	•19,9	•22,8	1,11	2,39	35,2
	6	36	•0,449	•19,9	•22,8	3,30	7,09	56,2
	7	57	0,445	19,8	22,6	6,01	12,83	65,1
	8	68	0,449	19,0	22,7	7,66	16,31	69,1
	9	120	0,454	20,0	23,0	14,69	30,16	73,1

Draht	Magnet Nr.	α	W 1 m Ohm	t C.	s $\frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
			11. Magnete 1 Minute im Bleibad.					
I	1	24	·0,397	·18,6	·20,4	1,57	3,38	39,4
	2	48	0,399	18,4	20,5	5,68	12,16	70,5
	3	70	0,397	18,7	20,4	9,44	20,02	80,5
	4	94	0,394	18,7	20,3	14,06	29,40	87,6
II	5	20	·0,374	·18,5	·18,9	0,99	2,15	31,5
	6	36	·0,374	·18,5	·18,9	3,58	7,68	60,9
	7	57	0,374	18,5	18,9	7,25	15,47	78,5
	8	68	0,373	18,7	18,8	9,32	19,85	84,0
	9	120	0,375	18,4	18,9	18,91	38,82	94,0
			12. Magnete 1 Stunde im Bleibad.					
I	1	24	·0,367	·18,8	·18,8	1,45	3,11	36,3
	2	48	0,370	18,8	18,9	5,96	12,76	74,0
	3	70	0,367	18,8	18,8	10,13	21,48	86,4
	4	94	0,365	18,7	18,7	15,27	31,92	95,2
II	5	20	·0,346	·18,8	·17,4	0,94	2,03	29,8
	6	36	·0,346	·18,8	·17,4	3,59	7,71	61,1
	7	57	0,345	18,8	17,4	7,62	16,25	82,5
	8	68	0,345	18,8	17,3	9,96	21,22	89,8
	9	120	0,348	18,7	17,5	20,62	42,34	102,6
			13. Magnete ausgeglüht.					
I	1	24	·0,302	·15,1	·15,7	0,32	0,69	8,0
	2	48	0,310	18,2	15,7	2,57	5,70	31,9
	3	70	0,308	18,2	15,7	6,21	13,18	53,0
	4	94	0,299	9,0	15,6	10,85	22,68	67,6
II	5	20	·0,288	·15,4	·14,6	0,31	0,25	3,7
	6	36	·0,288	·15,4	·14,6	1,39	2,99	23,7
	7	57	0,292	18,3	14,6	4,22	9,00	45,7
	8	68	0,292	18,3	14,6	6,07	12,93	54,7
	9	120	0,279	9,6	14,5	16,23	33,55	80,7

VIII. Versuchsreihen.

Magnete von kleinerem Dimensionsverhältniss.

Die zu dieser zweiten Arbeit verwendeten dickeren Drähte zeichneten sich im Vergleich zu den früher angewandten durch zwei Eigenschaften aus, nämlich durch einen bedeutend höheren Härtegrad im glasharten Zustand und durch eine grössere Homogeneïtät. Wir erhielten hier Härtegrade bis zu $s = 47{,}5$ $\left(\frac{cm}{cm^2} 0^0 \text{ Mikrohm}\right)$.[1]) Die grössere Homogeneïtät, wie sie sich

1) Der grösste bei allen früheren Versuchen erzielte Härtegrad entsprach einem specifischen Widerstand von $s = 0{,}48$ S. E. bei $t = 18^0$ also,

im galvanischen Widerstand ergab, zeigte sich auch in der sehr guten Uebereinstimmung magnetischer Resultate.

Zur gegenseitigen Controle wurden zweimal zwei Drähte, IX und X, XI und XII[1]) ausgesucht, die glashart nahe gleichen galvanischen Härtegrad gezeigt haben; aus allen vier wurden dann je fünf Magnete vom Dimensionsverhältniss $\alpha = 10, 20, 30, 40$ und 50 hergestellt.[2]) Die Constanten dieser 20 Magnete Nr. 21 bis 40[1]) enthält Tabelle 4. Bezüglich derselben gelten die gleichen Bemerkungen wie über die Constanten der früheren Magnete.

Tabelle 4.

Draht 2ϱ cm, Δ	Magnet Nr.	Masse μ g	Länge L cm	Dim.-Verh. α
IX.	21	0,184	1,45	9,9
$2\varrho = 0,147$	22	372	2,94	20,0
$\Delta = 7,46$	23	570	4,50	30,6
	24	764	6,04	41,1
	25	953	7,52	51,2
X.	26	194	1,46	9,8
$2\varrho = 0,149$	27	386	2,92	19,6
$\Delta = 7,58$	28	593	4,49	30,1
	29	789	5,99	40,2
	30	998	7,56	50,7
XI.	31	194	1,47	9,9
$2\varrho = 0,148$	32	401	3,01	20,3
$\Delta = 7,70$	33	578	4,33	29,2
	34	799	6,00	40,5
	35	979	7,38	49,8
XII.	36	208	1,51	10,0
$2\varrho = 0,151$	37	413	3,08	20,1
$\Delta = 7,65$	38	634	4,62	30,6
	39	827	6,04	40,0
	40	1,040	7,58	50,2

Die Homogeneïtät der Drähte wurde in der früher beschriebenen Weise geprüft (Abschnitt V). Der Draht wurde in seinem mittleren Theil in fünf Abschnitte von je 5 cm Länge abgetheilt und der Widerstand dieser fünf Theile

auf obiges Maass umgerechnet und auf 0° reducirt, $s = 44,5$. Vgl. Wied. Ann. 11. p. 945. 1880.

1) Drähte III bis IX, sowie Magnete Nr. 11 bis 20 wurden bei der folgenden magnetischen Untersuchung verwendet.

2) Dies konnte nur annähernd gelingen, da es sehr schwierig ist, so harte Drähte genau an einer bestimmten Stelle abzubrechen.

bestimmt. Die folgende Tabelle 5, die wir mittheilen, um bei dieser Gelegenheit die Methode durch Beispiele zu erläutern, enthält zunächst die directen Ablesungen an der Walzenbrücke von F. Kohlrausch. Die Homogeneïtät des Brückendrahtes wurde natürlich vorher geprüft und die sehr kleinen Correctionen an den Ablesungen angebracht. Die Zahlen 1 bis 5 geben für die aufeinander folgenden Theile des Drahtes die bei demselben Abstand (5,07 cm) der Contactspitzen erhaltenen Differenzablesungen an der Brücke in Scalentheilen; in Verbindung mit der für das angewandte „Zehntel Siemens“ erhaltenen Differenzablesung ist dann aus jenen Zahlen der Widerstand berechnet. Infolge der sehr befriedigenden Homogeneïtät der Drähte wurde zur Erleichterung der Arbeit im weiteren Verlaufe derselben die Widerstandsbestimmungen blos an den vier längsten Magneten ausgeführt.

Tabelle 5.

Prüfung der Homogeneïtät der Drähte.

	Scalentheile der Brücke				Widerstand der Länge 5,07 cm (Ohm)			
	IX	X	XI	XII	IX	X	XI	XII
—	—	—	—	—	0,017	0,013	0,013	0,012
1	70,1	69,0	67,2	66,1	26	85	11	54
2	70,4	68,9	67,1	66,1	33	83	09	54
3	70,6	69,0	67,2	66,2	37	85	11	56
4	70,8	68,9	67,5	66,3	40	83	16	58
5	70,7	69,0	67,5	66,3	39	85	16	58
0,1 S. E.	468,1	474,3	488,3	502,0	—	—	—	—
$l =$	10,8	10,8	11,0	11,0	10,8	10,8	11,0	11,0

Die magnetischen Messungen wurden in der ersten Hauptlage ausgeführt. Die numerischen Werthe der Constanten, welche in die Formeln:

$$m = \frac{M}{\mu}, \qquad M = \frac{1}{2}\frac{r^3 T \operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{r^2}}, \qquad 2 \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{n}{R}$$

eintreten, waren wie folgt:

$$T = 0{,}194 \frac{\mathrm{g}^{1/2}}{\mathrm{cm}^{1/2}\,\mathrm{sec}}, \qquad r = 24{,}90 \text{ cm}, \qquad R = 232{,}8 \text{ cm}.$$

Die Resultate der Messungen enthält die folgende Zusammenstellung.

Draht	Magnet Nr.	α	W 1 m Ohm	t C.	$s \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
			1. Magnete im glasharten Zustande.					
IX	21	9,9	0,283	10,8	47,2	2,60	4,17	22,7
	22	20,0	„		„	8,32	13,81	35,8
	23	30,6	„		„	14,86	23,62	41,4
	24	41,1	„		„	21,37	33,64	44,0
	25	51,2	„		„	28,18	43,86	46,0
X	26	9,8	0,273	11,2	46,8	2,82	4,53	23,3
	27	19,6	„		„	8,88	14,21	36,8
	28	30,1	„		„	15,82	25,14	42,4
	29	40,2	„		„	22,45	35,36	44,8
	30	50,7	„		„	29,75	46,30	46,4
XI	31	9,9	0,259	11,0	43,8	2,99	4,80	24,8
	32	20,3	„		„	10,27	16,43	41,0
	33	29,2	„		„	17,16	27,30	47,2
	34	40,5	„		„	25,77	40,59	50,8
	35	49,8	„		„	32,98	51,40	52,5
XII	36	10,0	0,248	11,0	43,5	2,98	4,79	23,0
	37	20,1	„		„	9,53	15,24	36,9
	38	30,6	„		„	17,32	27,50	43,4
	39	40,0	„		„	24,38	38,30	46,3
	40	50,2	„		„	32,28	50,22	48,3
			2. Magnete 1 Stunde im Wasserdampf.					
IX	21	9,9	0,252	11,8	42,0	2,43	3,90	21,2
	22	20,0	„		„	7,80	12,48	33,6
	23	30,6	„		„	13,92	22,12	38,8
	24	41,1	„		„	20,05	31,56	41,3
	25	51,2	„		„	26,47	41,21	43,2
X	26	9,8	0,244	12,0	41,7	2,66	4,27	22,0
	27	19,6	„		„	8,30	13,28	34,4
	28	30,1	„		„	14,88	23,65	39,9
	29	40,2	„		„	21,08	33,20	42,1
	30	50,7	„		„	27,95	43,50	43,6
XI	31	9,9	0,229	12,0	38,6	2,82	4,53	23,3
	32	20,3	„		„	9,83	15,73	39,2
	33	29,2	„		„	16,42	26,12	45,2
	34	40,5	„		„	24,69	38,89	48,7
	35	49,8	„		„	31,63	49,29	50,4
XII	36	10,0	0,219	12,0	38,4	2,86	4,59	22,1
	37	20,1	„		„	9,20	14,72	35,6
	38	30,6	„		„	16,70	26,52	41,8
	39	40,0	„		„	23,48	36,89	44,6
	40	50,2	„		„	31,15	48,47	46,6

Draht	Magnet Nr.	a	W in Ohm	t C.	$s\ \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	u cm	M abs. E.	m abs. E.
3. Magnete weitere 2 (im ganzen 3) Stunden im Wasserdampf.								
IX	21	9,9	0,238	11,9	39,5	2,46	3,94	21,4
	22	20,0	„		„	7,72	12,34	33,2
	23	30,6	„		„	13,69	21,76	38,2
	24	41,1	„		„	19,72	31,05	40,6
	25	51,2	„		„	25,89	40,30	42,3
X	26	9,8	0,230	11,8	39,3	2,70	4,34	22,4
	27	19,6	„		„	8,21	13,13	34,0
	28	30,1	„		„	14,62	23,23	39,2
	29	40,2	„		„	20,65	32,52	41,2
	30	50,7	„		„	27,34	42,55	42,6
XI	31	9,9	0,216	12,0	36,5	2,83	4,54	23,4
	32	20,3	„		„	9,68	15,49	38,6
	33	29,2	„		„	16,16	25,70	44,5
	34	40,5	„		„	24,21	38,13	47,7
	35	49,8	„		„	30,94	48,22	49,3
XII	36	10,0	0,207	12,0	36,2	2,88	4,63	22,2
	37	20,1	„		„	9,12	14,59	35,3
	38	30,6	„		„	16,50	26,21	41,3
	39	40,0	„		„	23,09	36,35	43,9
	40	50,2	„		„	30,57	47,57	45,7
4. Magnete weitere 3 (im ganzen 6) Stunden im Wasserdampf.								
IX	21	9,9	0,230	11,9	38,2	2,48	3,98	21,6
	22	20,0	„		„	7,72	12,35	33,2
	23	30,6	„		„	13,70	21,77	38,2
	24	41,1	„		„	19,63	30,90	40,4
	25	51,2	„		„	25,80	40,16	42,1
X	26	9,8	0,223	11,9	38,0	2,70	4,34	22,4
	27	19,6	„		„	8,21	13,13	34,0
	28	30,1	„		„	14,53	23,09	38,9
	29	40,2	„		„	20,55	32,37	41,0
	30	50,7	„		„	27,24	42,39	42,5
XI	31	9,9	0,209	11,8	35,1	2,82	4,53	23,3
	32	20,3	„		„	9,68	15,49	38,6
	33	29,2	„		„	16,09	25,60	44,3
	34	40,5	„		„	24,05	37,88	47,4
	35	49,8	„		„	30,82	48,08	49,1
XII	36	10,0	0,199	11,8	34,9	2,84	4,56	21,9
	37	20,1	„		„	9,12	14,59	35,3
	38	30,6	„		„	16,39	26,03	41,1
	39	40,0	„		„	22,92	36,08	43,6
	40	50,2	„		„	30,41	47,82	45,5

Draht	Magnet Nr.	α	*W* 1 m Ohm	*t* C.	$s \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	*n* C.	*M* abs. E.	*m* abs. E.
5. Magnete weitere 4 (im ganzen 10) Stunden im Wasserdampf.								
IX	21	9,9	0,226	11,8	37,4	2,46	3,95	21,5
	22	20,0	„		„	7,78	12,37	33,3
	23	30,6	„		„	13,69	21,76	38,2
	24	41,1	„		„	19,66	30,95	40,5
	25	51,2	„		„	25,88	40,21	42,2
X	26	9,8	0,218	11,9	37,1	2,70	4,34	22,4
	27	19,6	„		„	8,19	13,10	33,9
	28	30,1	„		„	14,57	23,16	39,0
	29	40,2	„		„	20,60	32,45	41,1
	30	50,7	„		„	27,25	42,41	42,5
XI	31	9,9	0,204	11,9	34,3	2,81	4,51	23,3
	32	20,3	„		„	9,61	15,37	38,3
	33	29,2	„		„	16,06	25,54	44,2
	34	40,5	„		„	24,08	37,85	47,4
	35	49,8	„		„	30,74	47,91	48,9
XII	36	10,0	0,195	11,9	34,0	2,87	4,61	22,2
	37	20,1	„		„	9,09	14,54	35,2
	38	30,6	„		„	16,34	25,95	40,9
	39	40,0	„		„	22,87	36,01	43,5
	40	50,2	„		„	30,37	47,25	45,4
6. Magnete 20 Minuten im Anilindampf.								
IX	21	9,9	0,191	12,0	31,5	2,31	3,71	20,2
	22	20,0	„		„	7,97	12,75	34,3
	23	30,6	„		„	14,60	23,21	40,7
	24	41,1	„		„	21,15	33,30	43,6
	25	51,2	„		„	28,02	43,62	45,8
X	26	9,8	0,185	12,0	31,4	2,60	4,18	21,5
	27	19,6	„		„	8,45	13,52	35,0
	28	30,1	„		„	15,48	24,60	41,5
	29	40,2	„		„	22,22	34,99	44,4
	30	50,7	„		„	29,58	46,04	46,1
XI	31	9,9	0,173	12,0	29,0	2,54	4,08	21,0
	32	20,3	„		„	9,75	15,60	38,9
	33	29,2	„		„	16,70	26,56	46,0
	34	40,5	„		„	25,52	40,20	50,3
	35	49,8	„		„	32,87	51,23	52,3
XII	36	10,0	0,165	12,0	28,7	2,67	4,29	20,6
	37	20,1	„		„	9,28	14,84	35,9
	38	30,6	„		„	17,31	27,49	43,4
	39	40,0	„		„	24,52	38,60	46,7
	40	50,2	„		„	32,75	50,96	49,0

Draht	Magnet Nr.	a	W 1 m Ohm	t C.	$s\ \frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}\ 0^\circ$ Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
7. Magnete weitere 40 Minuten (im ganzen 1 Stunde) im Anilindampf.								
IX	21	9,9	0,179	12,0	29,7	2,33	3,75	20,4
	22	20,0	"		"	8,30	13,28	35,7
	23	30,6	"		"	15,38	24,45	42,9
	24	41,1	"		"	22,37	35,22	46,1
	25	51,2	"		"	29,75	46,31	48,6
X	26	9,8	0,175	12,0	29,6	2,52	4,05	20,9
	27	19,6	"		"	8,79	14,06	36,4
	28	30,1	"		"	16,31	25,92	43,7
	29	40,2	"		"	23,60	37,17	47,1
	30	50,7	"		"	31,46	48,97	49,1
XI	31	9,9	0,164	12,0	27,5	2,57	4,13	21,3
	32	20,3	"		"	10,08	16,13	40,2
	33	29,2	"		"	17,49	27,82	48,1
	34	40,5	"		"	26,83	42,26	52,9
	35	49,8	"		"	34,64	53,99	55,1
XII	36	10,0	0,157	12,0	27,3	2,66	4,27	20,5
	37	20,1	"		"	9,60	15,36	37,2
	38	30,6	"		"	18,19	28,89	45,6
	39	40,0	"		"	25,88	40,75	49,3
	40	50,2	"		"	34,63	53,89	51,8
8. Magnete weitere 2 Stunden (im ganzen 3 Stunden) im Anilindampf.								
IX	21	9,9	0,169	11,7	27,9	2,41	3,87	21,0
	22	20,0	"		"	8,99	14,38	38,7
	23	30,6	"		"	16,93	26,91	47,2
	24	41,1	"		"	24,75	33,97	51,0
	25	51,2	"		"	32,94	51,27	53,8
X	26	9,8	0,164	11,8	27,7	2,62	4,21	21,7
	27	19,6	"		"	9,56	15,30	39,6
	28	30,1	"		"	18,08	28,73	48,5
	29	40,2	"		"	26,23	41,31	52,4
	30	50,7	"		"	35,06	54,56	54,7
XI	31	9,9	0,153	11,8	25,6	2,61	4,19	21,6
	32	20,3	"		"	10,71	17,18	42,7
	33	29,2	"		"	18,98	30,19	52,2
	34	40,5	"		"	29,25	46,07	57,7
	35	49,8	"		"	37,83	58,95	60,2
XII	36	10,0	0,147	11,9	25,5	2,75	4,42	21,2
	37	20,1	"		"	10,29	16,46	39,8
	38	30,6	"		"	19,81	31,46	49,6
	39	40,0	"		"	28,37	44,67	54,0
	40	50,2	"		"	38,16	59,37	57,1

Draht	Magnet Nr.	α	W 1 m Ohm	t C.	$s\,\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
9. Magnete weitere 4 Stunden (im ganzen 7 Stunden) im Anilindampf.								
IX	21	9,9	0,159	12,0	26,2	2,53	4,06	22,1
	22	20,0	"		"	9,80	15,68	42,2
	23	30,6	"		"	18,73	29,76	52,2
	24	41,1	"		"	27,65	43,53	57,0
	25	51,2	"		"	37,03	57,65	60,5
X	26	9,8	0,154	12,0	26,0	2,68	4,30	22,2
	27	19,6	"		"	10,36	16,58	42,9
	28	30,1	"		"	20,06	31,88	53,8
	29	40,2	"		"	29,31	46,16	58,5
	30	50,7	"		"	39,39	61,31	61,4
XI	31	9,9	0,145	12,0	24,2	2,63	4,22	21,8
	32	20,8	"		"	11,40	18,24	45,5
	33	29,2	"		"	20,69	32,92	56,9
	34	40,5	"		"	32,19	50,70	63,5
	35	49,8	"		"	41,96	65,39	66,8
XII	36	10,0	0,138	12,0	23,9	2,80	4,50	21,6
	37	20,1	"		"	11,01	17,61	42,6
	38	30,6	"		"	21,73	34,51	54,4
	39	40,0	"		"	31,32	49,81	59,6
	40	50,2	"		"	42,37	65,93	63,4
10. Magnete weitere 6 Stunden (im ganzen 13 Stunden) im Anilindampf.								
IX	21	9,9	0,151	12,0	24,8	2,50	4,02	21,8
	22	20,0	"		"	10,25	16,40	44,1
	23	30,6	"		"	20,09	31,93	56,0
	24	41,1	"		"	30,02	47,26	61,9
	25	51,2	"		"	40,25	62,66	65,8
X	26	9,8	0,146	12,0	24,6	2,64	4,24	21,9
	27	19,6	"		"	10,79	17,26	44,7
	28	30,1	"		"	21,59	34,32	57,9
	29	40,2	"		"	31,87	50,20	63,6
	30	50,7	"		"	42,96	66,87	67,0
XI	31	9,9	0,138	12,0	22,9	2,56	4,06	20,9
	32	20,8	"		"	11,59	18,54	46,2
	33	29,2	"		"	21,68	34,49	59,7
	34	40,5	"		"	34,58	54,39	68,1
	35	49,8	"		"	45,06	70,26	71,8
XII	36	10,0	0,132	12,0	22,7	2,73	4,36	21,1
	37	20,1	"		"	11,30	18,08	48,8
	38	30,6	"		"	22,90	36,37	57,4
	39	40,0	"		"	33,50	52,74	63,8
	40	50,2	"		"	45,60	70,96	68,2

Draht	Magnet Nr.	a	W 1 m Ohm	t C.	$s \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
			11. Magnete 10 Minuten im Zinnbad.					
IX	21	9,9	0,147	11,7	24,0	2,46	3,95	21,5
	22	20,0	"		"	10,37	16,59	44,6
	23	30,6	"		"	20,64	32,80	57,5
	24	41,1	"		"	30,97	48,75	63,8
	25	51,2	"		"	41,92	65,25	68,5
X	26	9,8	0,141	11,5	23,8	2,60	4,18	21,5
	27	19,6	"		"	10,98	17,57	45,5
	28	30,1	"		"	22,28	35,41	59,7
	29	40,2	"		"	33,11	52,16	66,1
	30	50,7	"		"	44,78	69,70	69,8
XI	31	9,9	0,134	11,6	22,2	2,46	3,95	20,4
	32	20,3	"		"	11,70	18,72	46,7
	33	29,2	"		"	22,17	35,27	61,0
	34	40,5	"		"	35,60	56,07	70,2
	35	49,8	"		"	46,70	72,78	74,3
XII	36	10,0	0,127	11,7	22,0	2,68	4,30	20,7
	37	20,1	"		"	11,37	18,19	44,0
	38	30,6	"		"	23,47	37,27	58,8
	39	40,0	"		"	34,58	54,44	65,8
	40	50,2	"		"	47,29	73,59	70,8
			12. Magnete 1 Minute im Bleibad.					
IX	21	9,9	0,124	11,9	20,3	2,26	3,60	19,7
	22	20,0	"		"	10,88	17,40	46,8
	23	30,6	"		"	24,04	38,19	67,0
	24	41,1	"		"	38,48	60,51	79,2
	25	51,2	"		"	52,53	81,77	85,8
X	26	9,8	0,120	11,3	20,1	2,38	3,74	19,3
	27	19,6	"		"	11,14	17,83	46,2
	28	30,1	"		"	25,34	40,27	67,9
	29	40,2	"		"	40,08	63,12	80,0
	30	50,7	"		"	55,46	86,82	86,5
XI	31	9,9	0,115	11,9	19,0	2,30	3,69	19,0
	32	20,3	"		"	11,71	18,72	46,7
	33	29,2	"		"	24,71	39,30	68,0
	34	40,5	"		"	42,45	66,87	83,7
	35	49,8	"		"	56,58	88,10	90,0
XII	36	10,0	0,109	11,9	18,7	2,46	3,95	19,0
	37	20,1	"		"	11,18	17,89	43,3
	38	30,6	"		"	25,95	41,21	65,0
	39	40,0	"		"	41,39	65,16	78,8
	40	50,2	"		"	58,01	90,26	86,8

Draht	Magnet Nr.	α	W 1 m Ohm	t C.	$s \frac{cm}{cm^2}$ 0° Mikrohm	n cm	M abs. E.	m abs. E.
			13. Magnete 1 Stunde im Zinkbad.					
IX	21	9,9	0,107	10,3	17,5	1,85	2,98	16,2
	22	20,0	"		"	10,15	16,24	43,7
	23	30,6	"		"	26,02	41,35	72,5
	24	41,1	"		"	43,90	69,12	90,5
	25	51,2	"		"	61,65	95,96	100,7
X	26	9,8	0,102	10,3	17,2	1,83	2,94	15,2
	27	19,6	"		"	9,82	15,71	40,7
	28	30,1	"		"	26,89	42,74	72,1
	29	40,2	"		"	46,03	72,49	91,9
	30	50,7	"		"	65,10	101,32	101,5
XI	31	9,9	0,098	10,3	16,2	1,74	2,79	14,4
	32	20,3	"		"	10,06	16,09	40,1
	33	29,2	"		"	26,87	42,74	72,6
	34	40,5	"		"	47,63	75,03	93,9
	35	49,8	"		"	65,29	101,74	103,9
XII	36	10,0	0,093	10,3	16,0	1,93	3,10	14,9
	37	20,1	"		"	9,95	15,91	38,5
	38	30,6	"		"	27,14	43,10	68,0
	39	40,0	"		"	46,78	73,57	89,0
	40	50,2	"		"	67,60	105,17	101,1
			14. Magnete ausgeglüht.					
IX	21	9,9	0,096	10,0	15,7	0,52	0,83	4,5
	22	20,0	"		"	2,72	4,35	11,7
	23	30,6	"		"	7,94	12,62	22,1
	24	41,1	"		"	10,87	26,56	34,8
	25	51,2	"		"	28,49	44,35	46,5
X	26	9,8	0,093	10,1	15,6	0,46	0,74	3,8
	27	19,6	"		"	2,52	4,03	10,5
	28	30,1	"		"	7,59	12,06	20,3
	29	40,2	"		"	15,72	24,76	31,4
	30	50,7	"		"	29,15	45,36	45,4
XI	31	9,9	0,096	10,2	14,9	0,52	0,84	4,3
	32	20,3	"		"	2,55	4,08	10,2
	33	29,2	"		"	6,80	10,82	18,7
	34	40,5	"		"	15,13	23,83	29,8
	35	49,8	"		"	26,68	41,50	42,4
XII	36	10,0	0,087	10,2	14,9	0,57	0,92	4,4
	37	20,1	"		"	3,15	5,04	12,2
	38	30,6	"		"	8,25	13,10	20,7
	39	40,0	"		"	16,32	25,69	31,1
	40	50,2	"		"	29,42	36,36	44,0

IX. Folgerungen.

Behufs einer leichteren Discussion des mitgetheilten Beobachtungsmateriales wollen wir vor allem eine tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Zahlen entwerfen, indem wir für jeden Draht den specifischen Magnetismus *m* seiner Magnete und ihren galvanisch gemessenen Härtegrad *s* nebeneinander stellen. Wir erhalten auf diese Weise folgende übersichtliche Tabellen:

Tabelle 6. Draht I.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad *s*	Specifischer Magnetismus *m*			
		Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
Glashart	38,5	33,7	43,0	45,0	47,9
1h im Wasserdampf 100°	36,3	33,3	42,0	44,3	46,8
3h " " "	34,8	32,7	41,0	43,3	46,2
6h " " "	33,9	32,2	40,1	42,7	45,4
10h " " "	33,4	32,1	40,2	42,7	45,4
20m " Anilindampf 185°	29,5	32,2	42,8	45,9	48,9
1h " " "	28,4	34,1	45,1	48,1	51,5
3h " " "	27,1	36,1	48,8	52,6	56,0
7h " " "	25,9	37,9	53,3	57,3	61,6
13h " " "	25,0	39,9	57,1	61,3	65,4
1m " Bleibad 330° . . .	20,4	39,4	70,5	80,5	87,6
1h " " " . . .	18,8	36,3	74,0	86,4	95,2
Ausgeglüht	15,7	8,0	31,9	53,0	67,6

Tabelle 7. Draht II.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad *s*	Specifischer Magnetismus *m*					
		Nr. 5	Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10
Glashart	37,3	—	43,9	—	—	53,5	55,1
1h im Wasserdampf 100°	34,7	—	43,1	—	—	52,8	54,1
3h " " "	33,0	—	42,5	—	—	51,8	53,2
6h " " "	32,2	—	42,0	—	—	50,8	52,2
10h " " "	31,6	29,6	41,1	46,4	47,8	51,0	—
20m " Anilindampf 185°	27,4	29,1	43,6	48,9	51,3	55,0	—
1h " " "	26,3	30,0	45,6	51,5	53,7	58,0	—
3h " " "	24,9	31,8	49,3	55,9	58,2	63,1	—
7h " " "	23,7	34,7	53,0	61,0	64,0	69,0	—
18h " " "	22,8	35,2	56,2	65,1	69,1	73,1	—
1m " Bleibad 330° . .	18,9	31,5	60,9	78,5	84,0	94,0	—
1h " " " . .	17,4	29,8	61,1	82,5	89,8	102,6	—
Ausgeglüht	14,5	3,7	23,7	45,7	54,7	80,7	—

Tabelle 8.

Draht IX.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad s	Specifischer Magnetismus m Dimensionsverhältniss = 9,9	20,0	30,6	41,1	51,2
Glashart	47,2	22,7	35,8	41,4	44,0	46,0
1h im Wasserdampf 100°	42,0	21,2	33,6	38,8	41,3	43,2
3h „ „ „	39,5	21,4	33,2	38,2	40,6	42,3
6h „ „ „	38,2	21,6	33,2	38,2	40,4	42,1
10h „ „ „	37,4	21,5	33,3	38,2	40,5	42,2
20m „ Anilindampf 185°	31,5	20,2	34,3	40,7	43,6	45,8
1h „ „ „	29,7	20,4	35,7	42,9	46,1	48,6
3h „ „ „	27,9	21,0	38,7	47,2	51,0	53,8
7h „ „ „	26,2	22,1	42,2	52,2	57,0	60,5
13h „ „ „	24,8	21,8	44,1	56,0	61,9	65,8
10m „ Zinnbad 240°	24,0	21,5	44,6	57,5	63,8	68,5
1m „ Bleibad 330°	20,3	19,7	46,8	67,0	79,2	85,8
1h „ Zinkbad 420°	17,5	16,2	43,7	72,5	90,5	100,7
Ausgeglüht	15,7	4,5	11,7	22,1	34,8	46,5

Tabelle 9.

Draht X.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad s	Specifischer Magnetismus m Dimensionsverhältniss = 9,8	19,6	30,1	40,2	50,7
Glashart	46,8	23,3	36,8	42,4	44,8	46,4
1h im Wasserdampf 100°	41,7	22,0	34,4	39,9	42,1	43,6
3h „ „ „	39,3	22,4	34,0	39,2	41,2	42,6
6h „ „ „	38,0	22,4	34,0	38,9	41,0	42,5
10h „ „ „	37,1	22,4	33,9	39,0	41,1	42,5
20m „ Anilindampf 185°	31,4	21,5	35,0	41,5	44,4	46,1
1h „ „ „	29,6	20,9	36,4	43,7	47,1	49,1
3h „ „ „	27,7	21,7	39,6	48,5	52,4	54,7
7h „ „ „	26,0	22,2	42,9	53,8	58,5	61,4
13h „ „ „	24,6	21,9	44,7	57,9	63,6	67,0
10m „ Zinnbad 240°	23,8	21,5	45,5	59,7	66,1	69,8
1m „ Bleibad 330°	20,1	19,3	46,2	67,9	80,0	86,5
1h „ Zinkbad 420°	17,2	15,2	40,7	72,1	91,9	101,5
Ausgeglüht	15,6	3,8	10,5	20,3	31,4	45,4

Tabelle 10.

Draht XI.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad s	Specifischer Magnetismus m Dimensionsverhältniss = 9,9	20,3	29,2	40,5	49,8
Glashart	43,8	24,8	41,0	47,2	50,8	52,5
1^h im Wasserdampf 100°	38,6	23,3	39,2	45,2	48,7	50,4
3^h „ „ „	36,5	23,4	38,6	44,5	47,7	49,3
6^h „ „ „	35,1	23,3	38,6	44,3	47,4	49,1
10^h „ „ „	34,3	23,3	38,3	44,2	47,4	48,9
20^m „ Anilindampf 185°	29,0	21,0	38,9	46,0	50,3	52,3
1^h „ „ „	27,5	21,3	40,2	48,1	52,9	55,1
3^h „ „ „	25,6	21,6	42,7	52,2	57,7	60,2
7^h „ „ „	24,2	21,8	45,5	56,9	63,5	66,8
13^h „ „ „	22,9	20,9	46,2	59,7	68,1	71,8
10^m „ Zinnbad 240°	22,2	20,4	46,7	61,0	70,2	74,3
1^m „ Bleibad 330°	19,0	19,0	46,7	68,0	83,7	90,0
1^h „ Zinkbad 420°	16,2	14,4	40,1	72,6	93,9	103,9
Ausgeglüht	14,9	4,3	10,2	18,7	29,8	42,4

Tabelle 11.

Draht XII.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad s	Specifischer Magnetismus m Dimensionsverhältniss = 10,0	20,1	30,6	40,0	50,2
Glashart	43,5	23,0	36,9	43,4	46,3	48,3
1^h im Wasserdampf 100°	38,4	22,1	35,6	41,8	44,6	46,6
3^h „ „ „	36,2	22,2	35,3	41,3	43,9	45,7
6^h „ „ „	34,9	21,9	35,3	41,1	43,6	45,5
10^h „ „ „	34,0	22,2	35,2	40,9	43,5	45,4
20^m „ Anilindampf 185°	28,7	20,6	35,9	43,4	46,7	49,0
1^h „ „ „	27,3	20,5	37,2	45,6	49,3	51,8
3^h „ „ „	25,5	21,2	39,8	49,6	54,0	57,1
7^h „ „ „	23,9	21,6	42,6	54,4	59,6	63,4
13^h „ „ „	22,7	21,1	43,8	57,4	63,8	68,2
10^m „ Zinnbad 240°	22,0	20,7	44,0	58,8	65,8	70,8
1^m „ Bleibad 380°	18,7	19,0	43,3	65,0	78,8	86,8
1^h „ Zinkbad 420°	16,0	14,9	38,5	68,0	89,0	101,1
Ausgeglüht	14,9	4,4	12,2	20,7	31,1	44,0

Diese Beobachtungsresultate kann man nun in doppelter Weise einer Discussion unterziehen. Bei einem und demselben Draht ist der specifische Magnetismus seiner Magnete eine Function des Härtegrades und des Dimensionsverhältnisses. An Stelle einer räumlichen Darstellung der Function kann man nun bequemer entweder die eine oder die andere Variable als arbiträre Constante betrachten und den Verlauf der Function nach der anderen Variablen in der Ebene verfolgen.

Indem wir diese graphischen Darstellungen bei allen Beobachtungsreihen ausgeführt haben, verwendeten wir sie zunächst als ein Mittel, um die Tabellen 6 und 7 durch andere zu ersetzen. Die Dimensionsverhältnisse der Magnete 1 bis 10 passen nicht zu denen der Magnete 21 bis 40, wodurch ein Vergleich zwischen den beiden Drahtsorten erschwert wird. Wir haben deshalb an Stelle jener Tabellen 6 und 7 die folgenden 12 und 13 durch graphische Interpolation entworfen, worin Resultate mitgetheilt sind, wie man sie, in Uebereinstimmung mit den thatsächlich erhaltenen Resultaten erhalten hätte, wenn die Dimensionsverhältnisse 20, 40, 60, 80 und 100 gewesen wären.

Tabelle 12.

Draht I.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad *s*	Specifischer Magnetismus *m* Dimensionsverhältniss = 20	40	60	80	100
Glashart	38,5	31,4	40,2	44,3	46,5	48,0
1ʰ im Wasserdampf 100°	36,8	30,5	39,2	42,9	44,7	46,0
3ʰ „ „ „	34,8	30,1	38,5	42,2	43,9	45,2
6ʰ „ „ „	33,9	29,9	38,3	42,0	43,8	45,0
10ʰ „ „ „	33,4	29,8	38,0	41,8	43,8	45,2
20ᵐ „ Anilindampf 185°	29,5	29,6	40,0	44,5	47,2	49,4
1ʰ „ „ „	28,4	30,3	42,3	47,4	50,3	52,3
3ʰ „ „ „	27,1	31,8	46,2	51,6	54,4	56,5
7ʰ „ „ „	25,9	33,6	50,4	56,0	59,1	61,4
13ʰ „ „ „	25,0	34,7	52,6	60,0	63,4	65,8
1ᵐ „ Bleibad 330°	20,4	32,2	63,4	77,3	84,2	89,2
1ʰ „ „ „	18,8	26,0	65,8	81,4	90,3	97,2
Ausgeglüht	15,7	6,0	21,3	48,0	59,4	70,3

Tabelle 13.

Draht II.

Verlauf des Anlassens	Härtegrad s	Specifischer Magnetismus m Dimensionsverhältniss = 20	40	60	80	100
Glashart	37,3	31,5	45,0	49,5	51,3	52,4
1ʰ im Wasserdampf 100°	34,7	30,4	43,4	47,8	49,7	50,5
3ʰ „ „ „	33,0	30,0	42,8	47,3	49,0	49,9
6ʰ „ „ „	32,2	29,9	42,7	47,2	48,8	49,8
10ʰ „ „ „	31,6	29,9	42,7	47,2	48,8	49,7
20ᵐ „ Anilindampf 185°	27,4	29,4	45,3	50,1	52,5	54,0
1ʰ „ „ „	26,3	30,0	47,3	52,2	55,0	56,6
3ʰ „ „ „	24,9	32,8	50,9	57,3	60,0	62,2
7ʰ „ „ „	23,7	34,3	54,7	62,3	66,0	68,0
13ʰ „ „ „	22,8	35,0	58,0	66,4	70,8	72,0
1ᵐ „ Bleibad 330°	18,9	33,0	64,3	80,7	88,6	92,2
1ʰ „ „ „	17,4	30,0	65,3	84,6	95,0	100,8
Ausgeglüht	14,5	·6,0	27,8	47,5	63,3	74,0

Ein Vergleich der Tabellen 12 und 13 mit den obigen 8, 9, 10 und 11 und aller dieser unter sich, noch besser aber die graphischen Darstellungen dieser Tabellen beweisen zunächst deutlich, dass jede Drahtsorte, ja selbst jeder einzelne Draht dieser Sorte in magnetischer Beziehung sich individuell verhält. Die für verschiedene Drähte entworfenen Curven decken sich keineswegs. Die dickere Drahtsorte zeigt eine höhere Magnetisirbarkeit als die dünnere. Bei beiden Drahtsorten zeigen die galvanisch härteren Drähte eine geringere Magnetisirbarkeit. Bei den dickeren Drähten scheint eine Beziehung mit dem specifischen Gewichte zu bestehen, indem die Magnetisirbarkeit mit dem specifischen Gewichte zunimmt.

Ein Umstand ist jedoch besonders hervorzuheben. Bei allen diesen individuellen Verschiedenheiten ist doch der Verlauf der Curven bei allen Drähten wesentlich gleicher Art.

Dieser Verlauf ist nun von grossem Interesse. Es zeigt sich vor allem, dass das Dimensionsverhältniss keineswegs eine so entscheidende Rolle spielt, als man bisher anzunehmen pflegt; wenigstens nicht in dem Sinne, dass ein Uebergangs-

werth (z. B. $\alpha = 35$ Ruths) existiren würde, unterhalb dessen sich die Magnete wesentlich anders verhalten würden als oberhalb. Die Aenderungen sind vielmehr stets gleichartig. Allgemein zeigt sich, dass die Magnete, kurz oder lang, beim ersten Anlassen an Magnetisirbarkeit allmählich verlieren, bis sie bei einem gewissen Härtegrade auf ein Minimum sinken. Bei fortschreitendem Anlassen nimmt wieder die Magnetisirbarkeit zu, steigt bei einem bestimmten Härtegrade bis zu einem Maximum an und sinkt dann wieder beim Uebergange zum ausgeglühten Zustand.

Der Grund, warum man früher einen Uebergangswerth des Dimensionsverhältnisses, der die Stahlsorte charakterisiren sollte, anzunehmen geneigt war, liegt darin, dass man nicht den ganzen Verlauf der Curven, sondern blos vier Punkte derselben, entsprechend den Zuständen glashart, gelb und blau angelassen und weich durch den Versuch festgestellt hat, welche sich allerdings verschieden gruppiren, wenn die eine arbiträre Constante, das Dimensionsverhältniss, variirt.

Der Einfluss des Dimensionsverhältnisses äussert sich zunächst, so weit es die Lage und Grösse der Maxima und Minima betrifft. Je gestreckter die Magnete werden, desto mehr rückt das Minimum und Maximum auseinander, sodass das erstere etwas weiter gegen den glasharten, das letztere dagegen rasch gegen den weichen Zustand fortrückt. Dabei wächst das Maximum relativ stark an, sodass es bei sehr gestreckten Magneten mehr als den doppelten Werth des Minimums erreicht. Werden dagegen die Magnete kürzer, so verflacht sich das Maximum immer mehr, rückt dabei gegen die mittleren Härtegrade an das Minimum heran, welches ebenfalls ein wenig gegen die mittleren Härtegrade sich verschiebt, so zwar, dass bei ganz kurzen Magneten, deren Dimensionsverhältniss kleiner als etwa 5 ist, das Maximum so wenig hervortritt und mit dem Minimum gewissermaassen sich so vereint, dass daraus wahrscheinlich eine stete Abnahme der Magnetisirbarkeit vom glasharten bis zum ausgeglühten Zustande resultirt.

Um die Ergebnisse durch eine graphische Darstellung

zu erläutern, haben wir mit Rücksicht darauf, dass der Verlauf der Curven für jeden Draht derselbe ist, hier blos für jede der beiden Drahtsorten die entsprechenden Curvensysteme mitgetheilt, indem wir die für die einzelnen Drähte der Sorte erhaltenen Zahlen im Mittelwerthe zusammengefasst haben. Dadurch sind die folgenden Tabellen 14 und 15 entstanden.

Tabelle 14.

Verlauf der Magnetisirbarkeit mit dem Härtegrad.
Dickere Drahtsorte $2\varrho = 0{,}15$ cm.

Mittlerer Härtegrad (galvan.)	Mittlerer specifischer Magnetismus für ein Dimensionsverhältniss = 10	20	30	40	50
45,3	23,5	37,6	43,6	46,5	48,3
40,2	22,2	35,7	41,3	44,2	46,0
37,9	22,3	35,3	40,8	43,3	45,0
36,6	22,3	35,3	40,6	43,1	44,8
35,7	22,3	35,2	40,6	43,1	44,8
30,2	20,8	36,0	42,9	46,2	48,3
28,5	20,8	37,4	45,1	48,8	51,2
26,7	21,4	40,2	49,4	53,8	56,5
25,1	21,9	43,3	54,3	59,6	63,0
23,8	21,4	44,7	57,8	64,3	68,2
23,0	21,0	45,2	59,3	66,5	70,9
19,5	19,3	45,8	67,0	80,4	87,3
16,7	15,2	40,8	71,3	91,3	101,8
15,3	4,3	11,2	20,5	31,8	44,6

Tabelle 15.

Verlauf der Magnetisirbarkeit mit dem Härtegrad.
Dünnere Drahtsorte. $2\varrho = 0{,}084$ cm.

Mittlerer Härtegrad (galvan.)	Mittlerer specifischer Magnetismus für ein Dimensionsverhältniss = 20	40	60	80	100
37,9	31,5	42,6	46,9	48,9	50,2
35,5	30,5	41,3	45,4	47,2	48,3
33,9	30,1	40,7	44,8	46,5	47,6
33,1	29,9	40,5	44,6	46,3	47,4
32,5	29,8	40,3	44,5	46,3	47,4
28,5	29,5	42,6	47,3	49,8	51,7
27,4	30,1	44,8	49,8	52,7	54,5
26,0	32,8	48,6	54,4	57,2	59,4
24,8	33,9	52,6	59,2	62,6	64,7
23,9	34,8	55,3	63,2	67,1	68,9
19,7	32,6	63,8	79,0	86,4	90,7
18,1	28,0	65,3	83,0	92,7	99,0
15,1	6,0	24,5	45,3	61,4	72,2

Auf Grundlage dieser Tabellen sind die Curvensysteme Fig. 3 und 4 entworfen.

Von grossem Interesse ist auch die andere Darstellungsweise der Beobachtungen, bei welcher der Härtegrad als arbiträre Constante betrachtet und die Magnetisirbarkeit als Function des Dimensionsverhältnisses dargestellt wird. Wir wollen auch aus dem Grunde diese zweite Darstellungsweise hier besprechen, um unsere Resultate mit denjenigen vergleichen zu können, welche frühere Beobachter über denselben Gegenstand erhalten haben. In Ermangelung eines verwendbaren Maasses für den Härtegrad hat man denselben früher durch die Anlassfarben charakterisirt und demgemäss stets harte, gelb und blau angelassene und weiche Stäbe untersucht. Im Einklange mit diesem Verfahren wollen wir der arbiträren Constante ebenfalls solche Werthe beilegen, welche diesen Härtezuständen entsprechen. Als Anhaltspunkt werden uns dabei folgende Werthe dienen, die wir bei einer über den Zusammenhang zwischen Anlassfarben und specif. Widerstand angestellten Arbeit erhalten haben:

Glashart . . .	s = 45,7 (cm/cm^2 0° Mikrohm)
Gelb angelassen	26,3
Blau angelassen	20,5
Weich	15,9 [1])

Bei unserem Anlassverfahren würden die Werthe „gelb und blau angelassen" etwa jenen Härtezuständen am nächsten kommen, wie sie nach drei Stunden im Anilindampf (Mittel $s = 26,7$ und 26,0) und eine Minute im Bleibade (Mittel $s = 19,5$ und 19,7) resultiren. An die letzteren zu kleinen Werthe reihen sich auch die kleineren Werthe für ausgeglüht (im Mittel $s = 15,3$ und 15,1). Für den vorliegenden Zweck genügt es also vollkommen, aus den Tabellen 14 und 15 die folgenden mittleren Werthe für die von uns bevorzugten Härtezustände herauszuwählen:

1) Nicht ohne Interesse ist die Bemerkung, dass der logarithmische Abstand von gelb und blau angelassen sehr nahe derselbe ist wie von blau angelassen und weich, und ungefähr doppelt so gross als der von glashart und gelb angelassen.

Dickere Drahtsorte.

	Mittlerer specifischer Magnetismus für ein Dimensionsverhältniss =				
	10	20	30	40	50
Glashart . .	23,5	37,6	43,6	46,5	48,3
Gelb angelassen	21,4	40,2	49,4	53,8	56,5
Blau angelassen	19,3	45,8	67,0	80,4	87,3
Weich . . .	4,3	11,2	20,5	31,8	44,6

Dünnere Drahtsorte.

	Mittlerer specifischer Magnetismus für ein Dimensionsverhältniss =				
	20	40	60	80	100
Glashart . . .	31,5	42,6	46,9	48,9	50,2
Gelb angelassen	32,3	48,6	54,4	57,2	59,4
Blau angelassen	32,6	63,8	79,0	86,4	90,7
Weich . . .	6,0	24,5	45,3	61,4	72,2

Nach diesen Tabellen sind die Curvensysteme Fig. 5 und 6 entworfen.

Die Curve „glashart“ verläuft durchwegs gegen die Abscissenaxe concav und anfangs rasch, später stets langsamer ansteigend nähert sie sich in ihrem schliesslichen Verlauf einem bestimmten Grenzwerth. Die Curve „weich“ steigt dagegen anfangs langsam an, und indem sie zunächst convex gegen die Abscissenaxe verläuft, nähert sie sich bei abnehmender Krümmung einem Wendepunkt, nimmt dann, rasch über die Curve „glashart“ sich erhebend, bei allmählich zunehmender Krümmung einen concaven Verlauf an, bis sie schliesslich ebenfalls asymptotisch einem gewissen Grenzwerth sich nähert. Zwischen diesen beiden Curven, welche den extremen Härtezuständen angehören, finden beim Anlassen allmähliche Uebergänge statt. Bei beginnendem Anlassen fällt zunächst die Curve „glashart“ in ihrem ganzen Verlauf ab. Bei fortschreitendem Anlassen hebt sich zunächst der Endtheil der Curve, und diese Hebung, im Endtheil stets zunehmend, pflanzt sich allmählich gegen den Mitteltheil der Curve fort. Bei der Curve „gelb angelassen“ finden wir schon den Curventheil von $\alpha = 14$, resp. 18 an oberhalb der Curve „glashart“; bei „blau angelassen“ ist der Theil der Curve von $\alpha = 15$, resp. 20 an schon stark gestiegen. Der

Anfangstheil der Curve hat unterdessen, allmählich abfallend, seine Krümmung geändert und verläuft bei „blau angelassen“ schon convex gegen die Abscissenaxe. Weiterhin sinkt der Anfangstheil der Curve immer mehr, das Sinken breitet sich gegen den Mitteltheil der Curve aus, während der Endtheil noch weiter, aber stets langsamer ansteigt, bis endlich die Curve in die durch den Endzustand „weich“ gegebene Grenzform übergeht.

Wir haben oben erwähnt, dass der ganze Verlauf der Magnetisirbarkeit keineswegs darauf hinweist, einen gewissen Werth des Dimensionsverhältnisses als Uebergangswerth anzunehmen. Würde man allerdings blos den Verlauf der Curven „glashart, gelb und blau angelassen“, kennen, wie sie die Fig. 5 und 6 geben, so wäre man geneigt, den Werth $\alpha = 15$, resp. 20 als Uebergangswerth anzusehen, da sich bei diesem Werthe die drei Curven nahezu schneiden. Wie wenig das jedoch berechtigt wäre, zeigt ein Blick auf die Curven Fig. 3 und 4, die keineswegs bei diesem Uebergangswerth irgendwie den Charakter ihres Verlaufes ändern.

Es mögen nun unsere Resultate mit den von Ruths erhaltenen Zahlen verglichen werden. Wir wollen von seinen Versuchen die auf p. 47 seiner Abhandlung mitgetheilte und für den Gegenstand maassgebendste Versuchsreihe entnehmen und hier wieder nur diejenigen Zahlen auswählen, welche sich auf Magnete im möglichst gesättigten Zustande beziehen. An Stelle des absoluten magnetischen Momentes der Stahlstäbe haben wir in der folgenden Zusammenstellung aus seinen Angaben den specifischen Magnetismus zur leichteren Vergleichung mit unseren Zahlen berechnet.

Ruths.

Länge $L = 12$	I	II	III	IV	V	VI
Durchmesser . . . $D =$	0,19	0,24	0,29	0,38	0,49	0,59
Dim.-Verh. approx. $\alpha =$	70	50	40	30	25	20
Masse . . . . . $\mu =$	1,99	4,31	6,22	10,55	17,50	25,65
Spec. Magnetismus $m =$						
Glashart	68,7	66,1	74,7	61,0	66,6	51,0
Gelb angelassen . . .	88,6	71,0	79,1	52,0	38,6	29,7
Blau angelassen . . .	92,0	71,0	90,2	61,3	48,2	28,4

Die erste Bemerkung, die wir an diese Zusammenstellung knüpfen wollen, betrifft den in § 2 von uns hervorgehobenen Einfluss der Härtung. Ruths' Magnete waren alle von gleicher Länge, dagegen variirte die Dicke von 0,2 bis 0,6 cm. Stäbe von so verschiedener Dicke in auch nur annähernd gleicher Weise zu härten, ist wohl unmöglich, auch wenn sie von ganz gleichem Material wären. Die Folge davon ist, dass die bei verschiedenen Magneten erhaltenen specifischen Magnetismen miteinander gar nicht vergleichbar sind. Ein Zusammenhang zwischen Dimensionsverhältniss und dem specifischen Magnetismus, also eine in ähnlicher Weise wie Fig. 5 durchgeführte graphische Darstellung ist auf Grundlage der Ruths'schen Zahlen nicht mit ähnlicher Sicherheit ausführbar. Im grossen ganzen nimmt der specifische Magnetismus mit dem Dimensionsverhältniss zu. Bei den weniger gestreckten Magneten IV, V und VI im glasharten Zustande erhielt Ruths bedeutend grössere specifische Magnetismen, als wir bei unseren. Nach seinen Zahlen würde der Durchschnittspunkt der Curve „glashart" und „blau angelassen" bei $\alpha = 30$ liegen, der Durchschnittspunkt der Curven „blau" und „gelb angelassen" bei $\alpha = 20$. Um diesen Daten zu genügen, müsste Fig. 5 in der Weise abgeändert gedacht werden, dass die Curve „glashart" — entsprechend den Ruths'schen grossen Werthen — zu Anfang rascher ansteigt, als es in Fig. 5 der Fall ist, sodass sie die beiden anderen erst dann schneidet, nachdem sie sich selbst bei $\alpha = 20$ bereits geschnitten haben; die Curve „glashart" würde bei $\alpha = 30$ die Curve „blau angelassen" schneiden, und etwa bei $\alpha = 40$ die Curve „gelb angelassen", welche letztere rascher als bei unseren Versuchen aufsteigen müsste. Freilich würde dann die bei $\alpha = 50$ beobachtete Gleichheit zwischen „gelb" und „blau angelassen" nicht damit in Einklang stehen.

C. Fromme stellt mit acht Stäben, je vier von gleichen Dimensionen, Controlversuche zu den Ruths'schen Resultaten an.

Davon haben die ersten vier Stäbe das Dimensionsverhältniss

$$\alpha = \frac{100}{7} = 15, \text{ die anderen vier ein } \alpha = \frac{100}{2} = 50.$$

Seine Versuche geben folgende Resultate für den Quotienten:

$\frac{\text{Gewicht}}{l^2}$	$\alpha = 15$	$\alpha = 50$
Glashart . . .	1982	413
Gelb angelassen	1508	448
Blau angelassen	1118	440

Diese Zahlen würden den Durchschnittspunkt der Curven, „gelb und blau angelassen" auf $\alpha = 50$ andeuten, übereinstimmend mit dem von Ruths bei Magnet II erhaltenen Resultate; der vorhin erwähnte Widerspruch zwischen den bei $\alpha = 50$ und den von Ruths bei $\alpha < 50$ erhaltenen Zahlen würde aber bleiben, da diese letzteren jenen Durchschnittspunkt auf $\alpha = 20$ andeuten.

X. Schluss.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate lösen nur einen Theil der allgemeineren Aufgabe, welche darin besteht, den Verlauf der Magnetisirbarkeit auch in ihrer Abhängigkeit von der dritten Grundvariablen, der magnetischen Kraft, zu studiren und insbesondere auch den temporären und permanenten Magnetismus in ihrem gegenseitigen Verhalten zu verfolgen. Bevor die über diese allgemeine Aufgabe bisher angestellten Arbeiten nicht in ähnlicher Weise ergänzt sind, wie wir es hier bei der speciellen versucht haben, dürfte es kaum an der Zeit sein, theoretische Betrachtungen über den Gegenstand anzustellen. Dass man auf dem von uns eingeschlagenen Wege auch die allgemeine Aufgabe wird lösen können, ist wohl ausser Zweifel; wir hoffen, in der Zukunft auch darüber ausführliche Arbeiten nachzutragen.

Die bei dem vorliegenden Gegenstande für die Praxis wichtige Frage, welcher Härtegrad bei bestimmten Magneten zu wählen ist, falls man den grösstmöglichen Magnetismus erzielen will, ist durch die gewonnenen Resultate für cylindrische Magnete wohl befriedigend erledigt. Es ist nicht ohne Interesse, dass bei kurzen Magneten der eine extreme Zustand „glashart", bei sehr gestreckten dagegen der andere „weich" oder vielmehr ein diesem sehr nahe kommender Zustand am günstigsten ist. Allein der Gesichtspunkt der

grössten Magnetisirbarkeit ist es nicht allein, der bei Magneten in Betracht kommt. Viel wichtiger ist gerade bei magnetischen Messungen die Rücksicht auf die Haltbarkeit und Widerstandsfähigkeit der Magnete sowohl gegenüber den Einflüssen der Temperatur, als auch der mechanischen Erschütterungen und der Wirkung der Zeit. Hierin aber sind die glasharten Magnete am empfindlichsten, und daher die angelassenen unbedingt zu bevorzugen. Ueber diese Frage wird in der folgenden Untersuchung ausführlicher berichtet.

VIII. *Ueber den Einfluss des Anlassens auf die Haltbarkeit der Magnete;*
von V. Strouhal und C. Barus.

(Hierzu Taf. III.)

I. Der Einfluss der Temperatur auf den permanenten Magnetismus der Stahlmagnete äussert sich bekanntlich theils in bleibender, theils in vorübergehender Weise. Wird ein bei einer bestimmten Temperatur t frisch magnetisirter Stahlstab auf eine höhere Temperatur T gebracht und dann wieder auf die frühere Temperatur t abgekühlt, so erleidet er durch diesen Temperaturwechsel einen bleibenden Verlust an magnetischem Moment.

Eine Wiederholung des Verfahrens bringt einen neuen, aber jedesmal kleineren Verlust hervor in der Weise, dass endlich ein bestimmter Grenzzustand erreicht wird, bei welchem die gleiche Temperaturerhöhung keine bleibende, sondern nur eine vorübergehende Abnahme des magnetischen Momentes hervorbringt.

Beobachtungen und Versuche über diesen Gegenstand liegen sehr zahlreich vor[1]; sie führten zu der in der Praxis

---

1) Literaturangaben enthält u. a.: J. Lamont, Magnetismus 1867. p. 386. — G. Wiedemann, Galvanismus. 2a. 1874. p. 603. Vgl. auch A. Mousson, Physik. 3. Aufl. 3. p. 110. Von den neueren Arbeiten (seit 1876) auf diesem Gebiete sind ferner hervorzuheben: G. Wiedemann, Pogg. Ann. 157. p. 257—281. 1876. — J. M. Gaugain, Compt.

gewöhnlich befolgten Regel, Magnete, bei denen keine andere als nur eine vorübergehende Aenderung des magnetischen Momentes durch Temperaturänderungen innerhalb gewisser Grenzen zulässig sein soll, zuvor sehr oft zwischen diesen oder noch weiteren Grenzen zu erwärmen und abzukühlen, um auf diese Weise jenen Grenzzustand zu erreichen.

Der Grund, warum wir ein bereits von so vielen Beobachtern bearbeitetes Thema wieder aufgenommen und zum Gegenstande einer neuen Untersuchung gemacht haben, lag in erster Reihe in den vielen neuen Erfahrungen, die wir bei unseren Arbeiten über Stahl gewonnen haben.

Diese Erfahrungen deuteten entschieden darauf hin, dass bei den bis jetzt vorliegenden Versuchen über die Einwirkung der Temperatur auf glasharte Magnete,— und auf diese sollte sich unsere Arbeit zunächst beschränken — ein Punkt von einigen Forschern blos angedeutet, von den meisten dagegen ganz ausser Acht gelassen worden ist, nämlich die Veränderung des Materiales, welche bei der Einwirkung höherer Temperaturen auf glasharte Magnete eintreten muss. Unsere Versuche über Anlassen des Stahles führten zu dem Resultat, dass schon Temperaturen, die relativ wenig höher sind als diejenige Temperatur, bei welcher der Stahl abgelöscht worden war, einen anlassenden Einfluss und somit eine Veränderung des Materiales bewirken.

Will man nun den Einfluss der Temperatur auf die magnetischen Eigenschaften allein studiren, so muss natürlich jeder Einfluss der Temperatur auf das Material gänzlich vermieden werden. An diesem Uebelstand leiden aber alle die früheren Versuche über diese Frage. Die Beobachter wenden wiederholt Temperaturen bis ca. 100° an, und dabei verändert sich während des Versuches das Material unter den Händen des Beobachters, dessen Folgerungen dann nothwendiger Weise nicht jenen Anspruch an Genauigkeit erreichen, den der Beobachter selbst angestrebt hat.

---

rend. **82.** u. **83.** p. 1422 u. 661 1876.; Beibl. **1.** p. 119. 1877.; Compt. rend. **86.** p. 536. 1878.; Beibl. **2.** p. 283. 1878. — G. Poloni, Elettricista. **2.** p. 193—231. 1878.; Beibl. **2.** p. 528. 1878.; Beibl. **5.** p. 67. 1881.; Beibl. **5.** p. 802. 1881. — J. Trowbridge, Beibl. **5.** p. 614. 1881.

Ausser diesem war es noch ein anderer Gesichtspunkt, der uns bei unseren Versuchen leitete, nämlich die **Herstellung von Magneten möglichst guter Haltbarkeit.** Wir brauchen nicht hervorzuheben, welche grosse Bedeutung diese Frage für alle absoluten, insbesondere aber relativen magnetischen Messungen besitzt. Dass aber die bis jetzt üblichen praktischen Regeln zu diesem Zwecke nicht ausreichen, bestätigen selbst die erfahrensten Beobachter auf diesem Gebiete. Das einzig sichere schien bis jetzt, sehr alte Magnete zu messenden Zwecken anzuwenden; allein selbst diese mussten ängstlich vor jeder mechanischen Erschütterung, vor jedem stärkeren Temperaturwechsel bewahrt werden, damit keine Aenderung ihres magnetischen Momentes eintrete.

Im Folgenden führen wir unsere Versuche in ihrer chronologischen Aufeinanderfolge an. Manche davon bestätigen nur Folgerungen, zu denen andere Forscher bereits gelangt sind; dass wir solche Versuche von der Mittheilung nicht ausgeschlossen haben, möge der innere Zusammenhang und die meistens neue Interpretation derselben rechtfertigen.

Die Magnetisirung der Drähte, die Bestimmung und Berechnung des magnetischen Momentes sowie die Untersuchung des Härtezustandes des Stahles geschah in derselben Weise wie in der vorigen Arbeit.

II. Die ersten orientirenden Versuche wurden mit sechs kleinen parallelepipedischen Magneten von gleichem Material angestellt, welche, ursprünglich zu einem anderen Zweck, auf ihre Magnetisirbarkeit geprüft werden sollten.

Die Dimensionen (cm) und die Masse (g) dieser Magnete (nach ihrer Härtung) waren:

	I	II	III	IV	V	VI
Länge	3,0	2,5	3,0	2,5	3,0	2,5
Breite	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3	0,3
Höhe	0,3	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2
Masse	0,328	0,278	0,278	0,232	0,133	0,113

Mit einem grossen Funkler'schen Hufeisenmagnet (von 50 kg Tragkraft) magnetisirt, haben dieselben folgenden specifischen Magnetismus:

(Dimension: $\frac{cm^{5/2}}{g^{1/2} sec}$) angenommen:

	I	II	III	IV	V	VI
m =	16,4	12,9	18,6	14,8	25,0	20,7

Nun brachten wir, den üblichen Regeln folgend, die Magnete abwechselnd zehnmal aus einem Wasserbad von 15° C. in ein anderes von 50° C. und hielten sie darin jedesmal etwa zehn Secunden lang. Nach dieser Behandlung ergab eine Bestimmung ihres specifischen Magnetismus folgende Zahlen:

	I	II	III	IV	V	VI
m =	16,1	12,7	18,4	14,6	24,6	20,3

Die Verluste erweisen sich demnach als nicht sehr bedeutend; im Durchschnitt etwa 32 Proc. Die höhere Temperatur von 50° ist offenbar noch relativ niedrig; wollte man auf die Weise einen Grenzwerth erreichen, so müsste man offenbar den Vorgang sehr oft, wohl über hundertmal wiederholen.

Aus diesem Grunde gingen wir zu höheren Temperaturen über und setzten die Magnete der Einwirkung des Wasserdampfes von 100° aus. Zuvor jedoch wurden sie noch frisch magnetisirt, und zwar durch den galvanischen Strom einer dynamoelectrischen Maschine mittelst einer Spule, deren mittlere Scheidekraft für die Länge: 2,5 bis 3,0 cm der Magnete und die angewandte Stromstärke:

$$= 3{,}0 \frac{cm^{1/2} g^{1/2}}{sec} \text{ sich ergab: } \Sigma X = 885 \frac{g^{1/2}}{cm^{1/2} sec} \cdot$$

Dieselben erreichten durch die so starken magnetisirenden Kräfte das grösstmögliche magnetische Moment.

Darauf wurden die Magnete in Wasserdampf von 100° gesetzt und darin eine bestimmte Zeit lang, und zwar 20, 40 Minuten, dann 1, 2, 3 und endlich 4 Stunden lang gehalten. Jedesmal, nachdem sie herausgenommen worden waren, blieben sie eine Zeit lang im Zimmer von einer zwischen 10 und 15° liegenden Temperatur liegen und wurden dann auf ihr magnetisches Moment untersucht. Die Resultate dieser Versuchsreihe zeigt die folgende Zusammenstellung:

Tabelle 1.

Abnahme des Magnetismus bei fortschreitendem Anlassen.

Verlauf des Anlassens		Specifischer Magnetismus I	II	III	IV	V	VI
Originalzustand . .		18,97	14,90	21,34	17,08	28,70	23,55
20^m	im Wasserdampf	14,08	10,74	15,80	12,42	20,94	16,66
weitere 40^m	im Wasserdampf	11,68	9,05	13,45	10,42	17,60	13,92
„ 1^h	im Wasserdampf	10,34	8,11	12,21	9,60	15,68	12,22
„ 2^h	im Wasserdampf	9,42	7,32	11,21	8,85	14,16	11,04
„ 3^h	im Wasserdampf	8,86	7,07	10,68	8,21	13,63	10,24
„ 4^h	im Wasserdampf	8,65	6,69	10,29	8,02	12,98	9,91

Stellt man die Resultate dieser Versuche graphisch dar, indem man die Einwirkungsdauer der 100° Temperatur als Abscisse und den specifischen Magnetismus der Magnete bei gewöhnlicher Temperatur als Ordinate aufträgt, so reihen sich die so erhaltenen Punkte in Curven, welche bei allen den untersuchten Magneten einen regelmässigen und gleichartigen Verlauf zeigen. Die Curven fallen zunächst rasch, dann immer langsamer und langsamer ab, sodass sie schliesslich mit der Abscissenaxe nahe parallel verlaufen.

Die Versuche bestätigen zunächst den Einfluss der Dauer der Erwärmung auf die magnetischen Aenderungen. Bekanntlich haben zuerst Moser und Riess[1]), später Holmgren[2]) diesen Einfluss untersucht, und der letztere im Gegensatze zu den beiden ersten Beobachtern denselben behauptet; man war jedoch geneigt, seine Beobachtungen auf andere Ursachen zurückzuführen.[3]) Indessen hat schon Lamont[4]) darauf hingewiesen, dass Holmgren mit glasharten, Moser und Riess dagegen mit ungehärteten Stahlstäben gearbeitet haben. In neuerer Zeit wurde von G. Poloni[5]) der Einfluss der Erwärmungsdauer wiederum betont, indessen das

1) L. Moser und P. Riess, Pogg. Ann. 12. p. 403. 1829.

2) K. A. Holmgren, Acta soc. scient. Upsala (3) 1. p. 309. 1856.; Fortschr. d. Physik. 1856. p. 536.

3) Vgl. G. Wiedemann, Galv. 2a. p. 614. 1874.

4) J. Lamont, Magnetismus. p. 385. 1867.

5) G. Poloni, Elettricista. 2. p. 139.; Beibl. 2. p. 523. 1878.

Verhalten von Magneten verschiedener Härtegrade nicht streng geschieden; dass aber solche wesentlich verschieden sich verhalten können, werden wir später noch hervorheben.

Aus der graphischen Darstellung unserer ersten Versuche kann man noch eine weitere Folgerung ziehen. Der Verlauf der Curven erinnert vollständig an den Verlauf von denjenigen Curven, welche das Anlassen des Stahles im Wasserdampf von 100° in seiner Abhängigkeit von der Einwirkungsdauer darstellen.[1]) Es liegt somit der Gedanke nahe, die beobachtete Abnahme der magnetischen Kraft mit dem dabei gleichzeitig stattfindenden Anlassen der glasharten Magnete in ursächlichen Zusammenhang zu bringen, mit anderen Worten, das Anlassen als den primären und die Abnahme des magnetischen Momentes als den secundären Vorgang aufzufassen.

Um nun diesen Gedanken durch den Versuch zu begründen, wurde aus dem Vorrathe unserer glasharten Drähte von 0,084 cm Durchmesser ein sehr gut homogener Draht Nr. III genommen und in zwei gleich lange Stücke von der Mitte aus getheilt. Wir bezeichnen sie als Magnet Nr. 11 und 12[2]).

Die Constanten derselben sind:

	Nr. 11	Nr. 12	
Länge =	10,0	10,0	cm
Masse	0,417	0,418	g

Die Magnete wurden mit der Spule zur vollen Sättigung magnetisirt und darauf der anlassenden Wirkung des Wasserdampfes von 100° ausgesetzt, und zwar zunächst 10 Minuten, dann weitere 20 und 30 Minuten, dann weitere 1, 2, 3, 4, 5, 6 Stunden lang. Nach jedem Anlassen wurde so wie im Originalzustande der Härtegrad durch ihren specifischen Leitungswiderstand s bei gewöhnlicher Temperatur t bestimmt. Zum Vergleich wurde ferner der Magnet Nr. 12 nach jedem Anlassen frisch mit der Spule magne-

1) Strouhal und Barus, Wied. Ann. **11.** p. 930. 1880.

2) Magnete Nr. 1 bis 10 aus gleicher Drahtsorte wurden bei unserer früheren Untersuchung „Ueber Magnetisirbarkeit des Stahles“ verwendet.

tisirt, während der Magnet Nr. 11 in dem Zustande untersucht wurde, wie er durch das Anlassen sich ergab.

Die Resultate dieser Versuchsreihe zeigt die folgende tabellarische Zusammenstellung. In dieser sowohl, als auch in den noch folgenden Tabellen bedeutet W den bei der Temperatur t beobachteten und auf die Länge 1 m umgerechneten Leitungswiderstand in Ohms, s den daraus berechneten auf die Länge 1 cm und den Querschnitt 1 cm² bezogenen und auf 0° reducirten specifischen Widerstand in Mikrohms, m den specif. Magnetismus im cm-g-System nach dem Anlassen, m^* nach frischer Magnetisirung.

Tabelle 2.

Abnahme des Härtegrades, des Magnetismus und der Magnetisirbarkeit mit fortschreitendem Anlassen.

Verlauf des Anlassens	W	t	s	m	W	t	s	m	m^*
	Magnet Nr. 11				Magnet Nr. 12				
Glashart . .	0,755	18,3	39,5	62,6	0,761	18,5	39,9	—	62,5
10ᵐ in 100°	741	18,7	38,7	59,5	746	18,7	39,1	59,7	62,4
+20ᵐ „ „	724	20,1	37,6	56,0	728	20,1	38,0	58,2	61,9
+30ᵐ „ „	708	21,0	36,7	52,6	712	21,0	37,1	57,5	60,6
+ 1ʰ „ „	689	19,9	35,7	50,0	693	20,0	36,1	56,5	60,2
+ 2ʰ „ „	671	20,2	34,8	47,3	676	20,1	35,2	56,1	59,5
+ 3ʰ „ „	656	18,7	34,1	46,1	660	18,7	34,5	56,4	59,4
+ 4ʰ „ „	646	19,2	33,5	45,1	651	19,0	33,9	56,5	59,3
+ 5ʰ „ „	639	20,0	33,1	44,3	644	20,0	33,5	56,3	59,1
+ 6ʰ „ „	634	19,9	32,8	43,8	638	19,9	33,2	56,5	59,0

Aus dieser Zusammenstellung tritt zunächst bei dem Magnet Nr. 11 der parallele Gang der Zahlen für den spec. Magnetismus m und den spec. Leitungswiderstand s auffallend hervor. Stellt man die Beobachtungen graphisch dar, als Abscisse die Einwirkungsdauer der Anlasstemperatur, als Ordinate den spec. Magnetismus, resp. Leitungswiderstand, so erhält man (Fig. 7) zwei vollkommen ähnlich verlaufende Curven. Es ist ausser allen Zweifel, dass die continuirlich erfolgende Abnahme des magnetischen Momentes durch die Anlassvorgänge mit bedingt ist. Dafür spricht auch der Umstand, dass beide Grenzzustände nahezu gleichzeitig erreicht werden.

Was die mit Magnet Nr. 12 angestellte Versuchsreihe betrifft, so zeigt sich zunächst in den Zahlen m^* die abnehmende Magnetisirbarkeit mit fortschreitendem Anlassen — in Uebereinstimmung mit unseren bereits früher angestellten Versuchen. Ferner sieht man aus dem Vergleiche der Zahlen m^* und m, wie beim fortschreitenden Anlassen der Einfluss der höheren Temperatur im Verhältniss zu ihrer Einwirkungsdauer in dem Maasse sich verringert, in welchem der Magnet dem der Temperatur 100° entsprechenden Grenzzustande seiner Härte sich nähert. Man sieht aber auch, wie endlich ein nach und nach gleichbleibender Grenzzustand nach dem Anlassen sich einstellt in der Art, dass der bereits dem Grenzzustande der Härte nahe gekommener Magnet, frisch magnetisirt und der Temperatur von 100° ausgesetzt, auch einen magnetischen Grenzzustand annimmt, der von der Dauer der Temperatureinwirkung beinahe unabhängig ist.

III. Um den im letzten Satze ausgesprochenen Gedanken weiter zu verfolgen, wurden die Magnete Nr. 11 und 12 jetzt frisch mit Spule magnetisirt und in ähnlicher Weise der Einwirkung des Wasserdampfes von 100° wie zu Anfang ausgesetzt. Die Versuche ergaben die in folgender Tabelle angegebenen Werthe:

Tabelle 3.

Abnahme des Magnetismus durch Temperatureinwirkung bei angelassenen Magneten.

Einwirkungsdauer der Temperatur 100°	Nr. 11 m	Nr. 12 m
Frisch magnetisirt	59,0	59,0
10^m im Wasserdampf	57,3	57,1
Weitere 20^m „ „	56,6	56,6
„ 30^m „ „	55,7	55,9
„ 1^h „ „	55,7	55,6
„ 2^h „ „	55,7	55,6
Frisch magnetisirt	59,0	58,7
10^m im Wasserdampf	57,2	57,1
Weitere 20^m „ „	56,6	56,4
„ 30^m „ „	56,0	55,9
„ 1^h „ „	56,0	55,9
„ 2^h „ „	56,0	55,8

Aus diesen Zahlen sieht man zunächt, dass die Magnete durch das jetzige wiederholte Erwärmen — nachdem sie also bereits früher dem Grenzzustande des Anlassens nahe gekommen sind — einen bedeutend geringeren Verlust an Magnetismus erleiden. Magnet Nr. 11 erlitt bei der ersten wiederholten Erwärmung auf 100° einen Verlust von (62,6 — 43,8)/62,6 = 30 Proc., jetzt im Mittel (59,0 — 55,9)/59,0 = 5,3 Proc.

Dieses Resultat bestätigt theilweise eine bereits von Riess und Moser[1]) und später von Dufour[2]) gemachte Beobachtung.

Nach Riess und Moser betrug bei einer harten Nadel

	die Abnahme
bei der ersten Magnetisirung	44 %
„ „ zweiten „	6,1 %
„ „ dritten „	4,4 %

Die letztere Veränderung der magnetischen Abnahme zeigen unsere Beobachtungen nicht. Vielmehr folgt aus diesen, dass, falls einmal der Grenzzustand errreicht ist (sowohl der des Härtegrades als auch der des magnetischen Momentes), dann der „übrigbleibende“ Verlust bei wiederholter gleicher Behandlung constant ist.

Will man nun in alle diese Erscheinungen Klarheit bringen, so muss man offenbar zwei verschiedene Arten des magnetischen Verlustes streng scheiden.

Ist der Magnet in einem solchen Härtezustande, dass die höhere Temperatur eine anlassende Wirkung ausüben kann — also z. B. glashart — so tritt durch die wiederholte Erwärmung auf eine bestimmte Temperatur T eine Veränderung des Materiales ein. Die Molecüle erfahren dabei mechanische Umlagerungen, welche offenbar einen grossen Einfluss auf die Anordnung magnetischer Molecüle mit sich bringen. Daher die auffallend grossen Verluste am magnetischen Moment. Dass hier die Dauer der Erwärmung wesentlich mit von Einfluss ist, so

1) Riess und Moser, Pogg. Ann. 17. p. 403. 1829.

2) L. Dufour, Fortschr. der Phys. 1857. p. 438.

zwar, dass durch eine lange Dauer dasselbe erreicht werden kann wie durch oftmalige Erwärmung und Abkühlung, kann nicht überraschen, da ja das Anlassen ebenfalls wesentlich von der Einwirkungsdauer abhängig ist.

Wenn nun der zur Temperatur T gehörige Grenzzustand der Härte erreicht ist, dann kann auch kein Verlust an magnetischer Kraft weiter erfolgen. Wird aber der Magnet frisch magnetisirt und wiederum der Einwirkung der Temperatur T ausgesetzt, dann erleidet er den vom Anlassen unabhängigen und bedeutend geringeren Verlust, der eine Folge der geringeren Coërcitivkraft bei der höheren Temperatur T ist, und der von der Dauer der Erwärmung beinahe unabhängig oder vielmehr in einem weit geringeren Grade abhängig ist. Wenigstens sieht man aus unseren Zahlen, dass, während früher der Grenzzustand nach 22 Stunden noch nicht erreicht war, so tritt er jetzt schon nach etwa einer Stunde ein, und zwar in der Weise, dass der Hauptheil dieses Verlustes schon in den ersten zehn Minuten erfolgt.

Daraus erklärt sich nun auch, warum bei weichen oder bereits angelassenen Magneten der Verlust bedeutend kleiner als bei glasharten, und warum er von der Dauer der Erwärmung (nach Riess und Moser) unabhängig ist. Die erste durch die Veränderung des Materiales bedingte Art des Verlustes fällt hier eben weg, und es bleibt nur die andere Art übrig. Es scheint dann auch, dass für eine bestimmte Temperatur T dieser zweite Verlust — als eine magnetische Eigenthümlichkeit — vom Material unabhängig ist.

So finden z. B. Riess und Moser den Verlust:

= 13,6 % bei einer weichen Nadel,
13,4 „ „ blau angelassenen,
13,7 „ „ kirschroth angelassenen.

Ueber diese Frage gedenken wir jedoch noch weitere Versuche anzustellen, welche insbesondere auch die Frage beantworten sollen, inwiefern dieser Verlust vom Dimensionsverhältniss des Magnets abhängig ist.

IV. Ist die im vorigen Abschnitte entwickelte Auffassung richtig, dann muss es offenbar gleichgültig sein, ob man einen glasharten Stahlstab zuerst z. B. in Wasserdampf von 100° anlässt, bis er seinen Grenzzustand der Härte erlangt hat, und dann erst zur Sättigung magnetisirt, oder ob er schon gleich zu Anfang bis zur Sättigung magnetisirt gewesen und dann der anlassenden Wirkung des Wasserdampfes von 100° ausgesetzt wurde.

Um auch diese — für die Richtigkeit unserer Auffassung entscheidende — Frage experimentell zu prüfen, wurden aus einem glasharten Drahte Nr. IV gleicher Dicke (0,084 cm) wie jener, aus welchem Magnete Nr. 11 und 12 gemacht worden sind, zwei gleich lange Magnete Nr. 13 und 14 gebildet. Die Constanten dieser Magnete waren:

	Nr. 13	Nr. 14.
Länge =	9,1	9,1 cm
Masse =	0,379	0,381 g.

Von diesen wurde Nr. 14 frisch bis zur Sättigung magnetisirt, dagegen blieb Nr. 13 unmagnetisirt. Beide wurden nun der anlassenden Wirkung des Wasserdampfes ausgesetzt und der Fortgang des Anlassens am galvanischen Leitungswiderstand verfolgt. Leider brach aber bei einer Bestimmung des Widerstandes durch stärkeres Klemmen ein Stück des Drahtes Nr. 13 ab.

Die Länge desselben betrug dann nur 8,7 cm, die Masse 0,363 g.

Theils wegen dieses Umstandes, theils aber auch und hauptsächlich deswegen, um den Gegenstand an Magneten verschiedener Dimensionsverhältnisse zu studiren, wurden aus dem Vorrathe glasharter, 0,2 cm dicker Drähte drei Nr. V, VI und VII ausgesucht, welche, in der Flamme gehärtet, nahe gleichen specifischen Leitungswiderstand zeigten, nämlich im Mittel:

V) $s = 42,4$, VI) $s = 42,6$, VII) $s = 42,2$.

Aus dem ersten und zweiten Drahte wurde je ein Magnet — Nr. 15 und 16 —, dagegen aus dem dritten Drahte, der besser homogen gewesen, zwei kürzere Magnete — Nr. 17 und 18 — gebildet. Die Länge von 15 und 16, sowie 17

und 18 sollte gleich sein, es gelingt jedoch bei so starken und glasharten Drähten nicht, sie an einer bestimmten Stelle abzubrechen, sodass kleine Verschiedenheiten in der Länge nicht vermieden werden konnten.

Die Constanten dieser vier, 0,21 cm dicken Magnete waren:

	Nr. 15	16	17	18
Länge =	7,2	7,3	2,90	2,95 cm
Masse =	1,90	1,92	0,773	0,776 g.

Diese Magnete wurden zunächst nach einem gleichen Plane wie Nr. 13 und 14 behandelt. Nach elfstündigem Anlassen im Wasserdampf von 100° waren die Magnete, wenn auch nicht im Grenzzustande selbst, so doch demselben nahe. Nun wurden sie alle frisch magnetisirt; Magnete 14, 15, 16 und 17 wurden dann wiederum im Wasserdampf von 100° eine bestimmte Zeit lang gehalten und ihr magnetisches Verhalten untersucht, dann wieder frisch magnetisirt und nochmals in gleicher Weise behandelt, Magnete Nr. 13 und 14 wurden zunächst der Einwirkung einer niedrigeren Temperatur, nämlich der Siedetemperatur des Methylalkoholes (66°) eine bestimmte Zeit lang ausgesetzt, bis sie ihren magnetischen Grenzzustand erreicht haben, dann erst wieder in Wasserdampf von 100° gesetzt, bis sie auch hier in den dieser Temperatur entsprechenden Grenzzustand gekommen sind.

Den Gang und die Ergebnisse des Versuches zeigt die (p. 674) folgende übersichtliche Darstellung. (S. Tab. 4 u. 5.)

Die Versuche geben also eine vollständige Bestätigung unserer Annahme. Ist einmal bei der Einwirkung einer höheren Temperatur T der Grenzzustand der Härte erreicht, der dieser Temperatur entspricht, dann ist es für das folgende magnetische Verhalten vollkommen gleichgültig, ob der Magnet schon vorher oder erst nachher magnetisirt worden ist.

In der That zeigen die Magnete 15 und 16 sowie auch 17 und 18, nachdem sie elf Stunden lang in Wasserdampf gewesen, nach frischer Magnetisirung und weiterer Behandlung vollkommen parallelen Gang. Ebenso verhalten sich Magnete 13 und 14 im Methylalkoholdampf ganz gleich, so wie auch im Wasserdampf.

Tabelle 4.
Magnetische Grenzzustände.

Einwirkungsdauer der Temperatur	W 1 m Ohm	t C.	s Mikrohm	m abs. E.	W 1 m Ohm	t C.	s Mikrohm	m abs. E.
	Magnet Nr. 13				Magnet Nr. 14			
Glashart . . .	0,734	9,0	39,7	—	0,741	9,1	40,1	51,4
10^m in 100°	721	9,0	39,0	—	726	9,1	39,3	48,7
$+20^m$ „ „	701	9,0	37,9	—	707	9,0	38,2	45,8
$+30^m$ „ „	683	8,0	37,0	—	688	8,1	37,2	43,4
$+ 1^h$ „ „	666	9,0	35,9	—	669	9,0	36,1	40,8
$+ 2^h$ „ „	646	9,0	34,9	—	650	9,0	35,0	39,2
$+ 3^h$ „ „	632	9,0	34,1	—	634	9,0	34,2	38,1
$+ 4^h$ „ „	622	9,3	33,5	—	626	9,8	33,6	37,0
Frisch magnetisirt	—	—	—	49,9	—	—	—	49,2
1^h in 66°	—	—	—	48,3	—	—	—	48,4
$+ 2^h$ „ „	—	—	—	48,0	—	—	—	47,5
$+ 3^h$ „ „	—	—	—	48,0	—	—	—	47,4
1^h „ 100°	—	—	—	47,5	—	—	—	47,1
$+ 3^h$ „ „	—	—	—	47,5	—	—	—	47,1

Tabelle 5.
Magnetische Grenzzustände.

Einwirkungs-dauer d. Temp.	W	t	s	m	W	t	s	m	m	m
	Magnet Nr. 15				Magnet Nr. 16				Nr. 17	Nr. 18
Glashart	—	—	—	—	—	—	—	48,1	—	32,3
1 Tag später	0,1277	8,7	42,4	—	0,1282	8,8	42,5	47,2	—	31,5
10^m in 100°	1219	9,3	40,4	—	1218	9,3	40,3	37,4	—	21,4
$+20^m$ „ „	1165	9,6	38,6	—	1167	9,8	38,6	33,2	—	17,5
$+30^m$ „ „	1128	9,7	37,3	—	1129	9,7	37,3	30,3	—	15,2
$+ 1^h$ „ „	1087	9,0	35,9	—	1084	9,0	35,9	27,8	—	13,4
$+ 2^h$ „ „	1048	9,1	34,6	—	1049	9,1	34,7	26,0	—	11,6
$+ 3^h$ „ „	1021	9,3	33,7	—	1024	9,5	33,0	24,8	—	11,2
$+ 4^h$ „ „	1011	10,0	33,3	—	1008	10,0	33,2	24,5	—	10,7
Frisch magn.	—	—	—	43,6	—	—	—	45,3	29,2	30,1
10^m in 100°	—	—	—	41,8	—	—	—	43,7	27,8	28,6
$+20^m$ „ „	—	—	—	41,7	—	—	—	43,6	27,6	28,2
$+30^m$ „ „	—	—	—	41,6	—	—	—	43,6	27,4	28,2
Frisch magn.	—	—	—	43,4	—	—	—	45,2	29,3	30,0
10^m in 100°	—	—	—	42,1	—	—	—	44,0	27,8	28,8
$+20^m$ „ „	—	—	—	41,9	—	—	—	43,7	27,6	28,4
$+30^m$ „ „	—	—	—	41,7	—	—	—	43,5	27,4	28,4
$+ 3^h$ „ „	—	—	—	41,6	—	—	—	43,4	27,3	28,3

Der magnetische Grenzzustand im Wasserdampf ist kleiner als jener im Methylalkoholdampf der Coërcitivkraft entsprechend, die mit zunehmender Temperatur abnimmt. In ähnlicher Weise also, wie beim Anlassen einer jeden Temperatur ein bestimmter Grenzzustand entspricht, ebenso entspricht auch bei angelassenen Magneten einer jeden Temperatur ein bestimmter magnetischer Grenzzustand. Es liesse sich leicht für einen bestimmten glasharten Stahldraht die Curve der Grenzzustände der Härte experimentell finden; eine ähnliche Curve für magnetische Grenzzustände würde noch vom Dimensionsverhältniss der aus diesem Drahte hergestellten Magnete abhängen.

Aus den Magneten 11, 14, 16 und 17 kann man auch sehen, wie die Annahme des specifischen Magnetismus vom Ausgangswerthe bis zum Grenzwerthe mit dem Dimensionsverhältniss der Magnete zusammenhängt.

Man hat als Abnahme:

Für Nr. 11: $\frac{62{,}6 - 43{,}8}{62{,}6} = 30\%$ Dim.-Verh. $\frac{10{,}0}{0{,}084} = 119$

14: $\frac{51{,}4 - 37{,}0}{51{,}4} = 28\%$ „ „ $\frac{9{,}1}{0{,}084} = 108$

16: $\frac{48{,}1 - 24{,}5}{48{,}1} = 49\%$ „ „ $\frac{7{,}3}{0{,}207} = 35$

18: $\frac{32{,}3 - 10{,}7}{32{,}3} = 67\%$ „ „ $\frac{2{,}95}{0{,}207} = 14$

Unter sonst gleichen Umständen verlieren also gestrecktere Magnete durch Temperaturerhöhungen weniger als kurze.

In Fig. 7 ist die Abnahme des specifischen Leitungswiderstandes und die gleichzeitig dabei stattfindende Abnahme des specifischen Magnetismus durch Anlassen in 100° für die Magnete 11, 14, 16 und 18 graphisch dargestellt.

Die gleichartige Aenderung des specifischen Magnetismus und des galvanischen Leitungswiderstandes legt den Gedanken nahe, die Veränderungen dieser beiden Grössen in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit zu verfolgen. In Fig. 8 ist als Abscisse der specifische Magnetismus dargestellt. Die so erhaltenen Punkte reihen sich in Curven,

welche mit geringer Krümmung ziemlich parallel und gleichartig miteinander verlaufen. Offenbar ist jede dieser Curven blos der Anfangszweig einer Curve, welche die gleichzeitig stattfindenden Veränderungen des specifischen Magnetismus und des galvanischen Leitungswiderstandes darstellen würde, wenn man die Magnete, ohne sie frisch zu magnetisiren, in höheren Temperaturen nach und nach anlassen würde.

Den weiteren Verlauf dieser Curve haben wir an zwei Magneten, Nr. 19 und 20, studirt, die einem glasharten Draht Nr. VIII von 0,147 cm Durchmesser entnommen waren und nach und nach in höheren Temperaturen angelassen wurden. Die Constanten dieser Magnete waren:

Länge	= 1,50	9,09	cm
Masse	= 0,193	1,172	g
Dim.-Verh.	= 10,2	61,9	

Den Gang und die Resultate der Versuche, so weit dieselben fortgeführt werden konnten, zeigt die folgende Zusammenstellung:

Tabelle 6.

Simultane Abnahme der Härte und des Magnetismus bei fortschreitendem Anlassen.

Magnete Nr. 19 und 20.

Verlauf des Anlassens	*W* 1 m Ohm	*t* C.	*s* Mikrohm	*m* Nr. 19	*m* Nr. 20
Glashart . . .	0,283	11,5	47,0	21,25	39,1
20^m in 100^0	0,267	12,0	44,2	12,56	29,5
+ 2^h „ „	0,245	12,0	40,5	7,74	22,3
+ 10^m „ 185^0	0,202	11,6	33,4	3,93	18,8
+ 6^h „ „	0,162	11,3	26,7	2,45	17,5
+ 1^m „ 330^0	0,120	10,0	19,6	0,25	14,4

Fig. 8 enthält die graphische Darstellung dieser Beobachtungsreihen. Die Curven, ähnlich verlaufend, sind gegen die Abscissenaxe anfangs convex, haben dann einen Wendepunkt, verlaufen weiterhin concav und fallen schliesslich rasch ab. Dabei verlieren kurze Magnete rascher ihren Magnetismus als gestreckte, welche gegen Temperatureinwirkungen überhaupt eine grössere Widerstandsfähigkeit besitzen.

V. Die Verwendung angelassener an Stelle glasharter Magnete hat, wie aus dem vorhergehenden Beobachtungsmaterial deutlich hervorgeht, den einen grossen Vortheil, dass ihre Empfindlichkeit gegenüber Temperatureinwirkungen wesentlich vermindert wird. Wird ein zu einem Magneten bestimmter glasharter Stahlstab vor oder nach der Magnetisirung bei einer bestimmten höheren Temperatur *T* — wir wollen z. B. die sehr bequem herzustellende Temperatur von 100°[1]) wählen und festhalten — solange angelassen, bis er den dieser Temperatur entsprechenden Grenzzustand der Härte annimmt, so ist sein Material gegen Temperaturerhöhungen bis zu 100° vollkommen unempfindlich. Wird dann der Stahlstab — zum ersten oder schon zum zweiten mal — frisch, bis zur Sättigung magnetisirt und nochmals eine gewisse Zeit lang der Einwirkung des Wasserdampfes von 100° ausgesetzt, so erreicht der Magnet in viel kürzerer Zeit als früher jenen constanten magnetischen Grenzzustand, bei welchem auch sein Magnetismus gegen Temperaturerhöhungen bis zu 100° vollkommen unempfindlich ist.

Bei den Magneten, welche zu messenden Zwecken verwendet werden, verlangt man aber nicht nur Unempfindlichkeit gegen eine bis zur gewissen Grenze steigende Temperaturerhöhung, sondern auch eine Haltbarkeit allen mechanischen Einwirkungen — wie Schlag, Stoss etc. — gegenüber sowie auch gegenüber der Wirkung der Zeit. Dass die bisher angewandten Methoden nicht hinreichen, Magnete von dieser Beschaffenheit zu erzielen, ist bekannt. Wir wollen in dieser Beziehung nur eine für die vorliegende Frage massgebende Stimme anführen.

In den „Annalen des physikalischen Centralobservatoriums, Petersburg Jahrg. 1878 p. 63 berichtet

1) Höhere Anlasstemperaturen zu wählen, dürfte kaum zweckmässig sein, da bei einer stärkeren Härteabnahme der Magnete der magnetische Temperaturcoëfficient ohne Zweifel (analog mit dem galvanischen) anwachsen würde, was für messende Zwecke nicht erwünscht ist.

H. Wild über die Functionirung des Edelmann'schen Bifilarmagnetometers und über den dazu gehörigen Magnet.[1])

Zur numerischen Beurtheilung der Abnahme seines Magnetismus dienen folgende Zahlen:

Der 8,0 cm lange, 2,1 cm breite und 0,22 cm dicke Stahlmagnet, 33,7 g schwer, hatte, nachdem er dem erwähnten Temperaturwechsel ausgesetzt worden war, das Moment M, resp. den specifischen Magnetismus m

zu Anfang . . . . $M = 954,2$ $m = 28,31$
nach neun Monaten $M = 914,5$ $m = 27,14$

Die Abnahme betrug also in einem Monat durchschnittlich 0,46 Proc. des Ausgangswerthes.

Doch auch der neue Magnet bewährte sich keineswegs besser, wie H. Wild darüber im Jahrg. 1879 p. 8 berichtet.[2])

Auch dieser Magnet wurde nach der gewöhnlichen Regel, bevor er in Gebrauch genommen wurde, Temperaturwechseln zwischen 0° und 55° 16 mal ausgesetzt.

Zur numerischen Beurtheilung mögen folgende Zahlen dienen:

Der Magnet hatte das magnetische Moment M, resp. den specifischen Magnetismus m am 29. December 1878, gleich nach Magnetisirung $M = 1852$ $m = 55,0$.

Eine Zeit lang später, am 4. Februar 1879 war
$M = 1756$ $m = 52,1$.

---

1) „Obgleich der Magnet nach seiner Magnetisirung abwechselnd einer Temperatur von 0° und 30° ca. 30 mal ausgesetzt worden war, um ihn permanenter zu machen, fand doch eine schnelle Abnahme des magnetischen Momentes statt, sodass sie mehrfache Verstellungen und Veränderungen erforderte. Damit nämlich die Scala noch nicht ganz aus dem Gesichtsfelde herausrücke, musste schon am 17. April (seit Anfang December) der Torsionswinkel um 1° 51,5′ vermindert werden, um wieder die Mitte der Scala in das Gesichtsfeld des Fernrohres zu bringen . . . . Da die Verminderung des magnetischen Momentes des Stabes auch in folgenden Monaten ungeschwächt fortdauerte, so befürchtete ich, es sei der Magnet schlecht, und liess daher nach dem Muster desselben einen neuen herstellen.“

2) „Auch dieser neue Magnet verlor nach der Aufhängung am Bifilar noch fortwährend bis zum Schlusse des Jahres soviel Magnetismus, dass eine Bearbeitung der Beobachtungen an diesem Bifilar nicht erfolgen konnte.“

Nach 16 maligem Temperaturwechsel zwischen 0° und 55°

$M = 1694 \quad m = 50{,}3.$

Die Erklärung dieser Thatsachen ist nach dem Vorhergehenden nicht schwer.

Man hat — nach den Beobachtungen von Riess und Moser, nach denen die Einwirkungsdauer der höheren Temperatur unwesentlich sein sollte — seither das Hauptgewicht auf den Temperaturwechsel gelegt und infolge dessen den Magnetstab der höheren Temperatur nur solange ausgesetzt, als eben nothwendig war, damit der Magnet diese Temperatur annehme. Selbst Holmgren glaubte, um Temperaturveränderungen innerhalb gewisser Grenzen (0° und 100°) für den Magnetismus unschädlich zu machen, den Magnet einem Temperaturwechsel (zwischen 0° und 100°) aussetzen zu müssen, und hat deswegen den Magnet bis 213 mal abwechselnd erwärmt und abgekühlt. Geschieht dies jedoch — wie gewöhnlich — blos 20 bis 40 mal, (selbst das ist mühevoll und zeitraubend genug), so kann ein beträchtliches Anlassen des Stahles kaum stattfinden, um so weniger, wenn die angewandten höheren Temperaturen nicht 100°, sondern etwa nur 50° betragen.

Der Magnet bleibt also im glasharten Zustande, in jenem Zustande, in welchem die Molecüle in einer sehr gespannten Gleichgewichtslage sich befinden, wo sie nach Aenderungen derselben auch ohne äussere Veranlassung — durch Wirkung der Zeit — streben. Das Anlassen vermindert eben diese, wenn man so sagen darf, unnatürlichen Spannungen und bringt dadurch eine grössere Stabilität hervor.

Günstigere Resultate erhält man durch Anwendung höherer Temperaturen als 50°, z. B. 100°, wenn man den Magnet einigermassen längere Zeit in dieser Temperatur hält. So wurde ein Magnet, welcher für ein Bifilar des physikalischen Instituts Würzburg bestimmt war, nachdem er frisch magnetisirt worden, zehn Minuten lang im kochenden Wasser gehalten und erst dann in Gebrauch genommen. Der Magnet hatte, frisch magnetisirt, den specifischen

Magnetismus $m = 28{,}95 \quad M = 2397,$

nach dem Anlassen $m = 24{,}43 \quad M = 2023.$

Der Magnet, sofort daraufhin in Gebrauch genommen, bewährte sich sehr befriedigend.

Beachtet man, wie rasch der Härtegrad des Stahles bei Einwirkung von 100° zu Anfang sich ändert, so wird man zugeben, dass schon durch die blos zehn Minuten lange Behandlung in 100° der Magnet nicht unbeträchtlich angelassen und dadurch die grosse Spannung der Molecüle vermindert wurde. Die Folge davon ist eine grössere Constanz, um so eher, wenn, wie es hier geschehen, der Magnet nicht nochmals frisch magnetisirt worden ist.

Offenbar erhält man noch bessere Resultate, wenn man das Anlassen bis zum Grenzzustande fortsetzt. Allein dadurch verliert der Magnet ganz bedeutend an Magnetismus bei den gewöhnlich gebrauchten Magneten vom Dimensionsverhältniss 10 bis 20 — wie aus früheren Zahlen zu entnehmen ist — bis über 70 Proc. Ein nochmaliges Magnetisiren bis zur Sättigung stellt aber den ursprünglichen Magnetismus beinahe wieder her, und eine nochmalige Behandlung mit Wasserdampf bis zum magnetischen Grenzzustande bewirkt dann nur Verluste von einigen fünf bis zehn Procenten.

Wir haben nun Anhaltspunkte, zu glauben, dass Magnete in diesem Grenzzustande von ganz vorzüglicher Haltbarkeit sind. Während z. B. bei glasharten Magneten ein Fallenlassen des Magnetes sofort Verluste hervorbringt, ist dies, wie wir öfter beobachtet haben, bei solchen Magneten nicht im geringsten der Fall. Ja selbst, wenn man solche Magnete mit Absicht stark schlägt oder heftig gegen den Boden hinwirft, bewirkt diese mechanische Erschütterung keinen Einfluss.

Als Beispiel führen wir die folgende bei einem sehr kurzen und dickeren Magnet — die bekanntlich im allgemeinen viel weniger haltbar sind als gestrecktere Magnete — gemachte Beobachtung an.

Der Magnet, 2,5 cm lang, 0,4 cm breit und 0,3 cm hoch wurde zunächst absichtlich blos vier Stunden lang im Wasser gekocht, dann frisch magnetisirt und wieder zwei Stunden lang im Wasserdampf gehalten. Das Magnetometer gab als

Mittel aus fünf Einstellungen den Ausschlag (mm als Scalentheile): $n = 27{,}00$.

Nun wurde der Magnet auf einen Holzklotz gelegt und mit einem anderen Holzklotz heftig 30 mal senkrecht zur magnetischen Axe und 20 mal längs der magnetischen Axe geschlagen. Nachdem der Magnet eine Zeit lang liegen geblieben — um etwaige Temperaturerhöhung vorübergehen zu lassen —, gab das Magnetometer den Ausschlag:

$$n = 26{,}97.$$

Nach einer Wiederholung desselben Verfahrens erhielt man: $n = 26{,}93$.

Möge nun auch die beobachtete Abnahme von 27,00 auf 26,93 Scalentheile — also um etwa 0,3% — thatsächlich — also nicht in Beobachtungsfehlern — begründet sein, so würde diese Abnahme einem hundertmaligen heftigen Schlagen entsprechen. Nun war aber der Magnet nicht bis zum Grenzzustand angelassen. Um so unempfindlicher werden aber Magnete sein, bei denen dies eher der Fall ist.

Entscheidende Versuche über diese Frage wurden mit einem 109,32 g schweren Röhrenmagnet angestellt. Die Länge desselben betrug 16 cm, der äussere Durchmesser 1,6 cm, der innere 1,2 cm. Der Magnet wurde nach dem Härten zur Sättigung magnetisirt, dann in Wasserdampf von 100° 30 Stunden lang angelassen; wieder frisch magnetisirt und nochmals 10 Stunden lang im Wasserdampf gehalten. Der specifische Magnetismus m ergab sich nach und nach wie folgt:

Magnet glashart, frisch magnetisirt . .	$m = 41{,}0$
10 Stunden im Wasserdampf von 100° .	$m = 26{,}1$
20 „ „ „ „ „ .	$m = 25{,}2$
30 „ „ „ „ „ .	$m = 24{,}8$
Magnet angelassen, frisch magnetisirt .	$m = 39{,}9$
5 Stunden im Wasserdampf von 100° .	$m = 33{,}8$
10 „ „ „ „ „ .	$m = 33{,}1.$

Das Magnetometer gab für den letzten Zustand in zweiter Hauptlage, aus einem Abstand von 72,9 cm beim Umdrehen des Magnetes um 180° den Ausschlag:

$$n = 475{,}6 \text{ Scalentheile (mm)},$$

wobei die Scala im Abstande 250 cm vom Magnetometerspiegel sich befand.

Nun wurde der Magnet in einer Glasröhre 1,5 m hoch vertical gegen einen Holzklotz fallen gelassen, und zwar einmal mit dem Nordpol, das andere mal mit dem Südpol nach unten. Das Magnetometer gab darauf den Ausschlag:

$n = 475{,}2$ Scalenth.

und etwa 10 Minuten später:

$n = 475{,}6$ „

Darauf wurde der Magnet $^1/_2$ m hoch zehnmal nacheinander in horizontaler Lage auf den Fussboden fallen gegelassen:

das Magnetometer gab den Ausschlag $n = 474{,}7$
und etwa 5 Minuten später . . . . $n = 475{,}0$.

Nun wurde der Magnet nochmals in der Glasröhre 1,5 m hoch vertical fallen gelassen, und zwar zehnmal, abwechselnd mit Nordpol und Südpol nach unten. Das Magnetometer gab dann den Ausschlag: . . . . $n = 473{,}3$,
nach 3 Minuten . . . . $n = 474{,}0$,
und nach einer halben Stunde . . . . $n = 475{,}5$.

Die beobachteten Abnahmen sind also auf Temperaturerhöhungen zurückzuführen, die durch die Erschütterungen selbst und noch mehr durch Halten des Magnetes in der Hand entstanden sind; die Erschütterungen selbst, so heftig sie auch gewesen sind, haben auf das magnetische Moment keinen oder nur höchst unbedeutenden Einfluss gehabt. Die Temperatur des Zimmers (= 6,0°) blieb während der Dauer des Versuches unverändert.

Nach diesen Versuchen kann man mit grösster Wahrscheinlichkeit erwarten, dass solche Magnete auch gegenüber stärkeren Temperaturerniedrigungen, wie sie praktisch — etwa bei Polarexpeditionen — vorkommen mögen, Stand halten werden. Versuche darüber hoffen wir bald nachfolgen zu lassen. Auf glasharte Magnete wirkt bekanntlich grosse Kälte ebenso anlassend wie grosse Wärme; wenn daher glasharte Magnete grossen Kälten ausgesetzt werden, muss durch Anlassen ein ähnlich grosser permanenter Verlust an magnetischem Moment eintreten wie beim Anlassen in der

Wärme. Darauf sind wohl die neueren von J. Trowbridge gemachten Beobachtungen über den Verlust, den die Magnete durch grosse Kälte erleiden (und der bis auf 66 Proc. sich belaufen kann), zurückzuführen. Wenn aber die Magnete bereits angelassen sind, so wird der Einfluss der Kälte vielleicht ganz unschädlich (bis zu gewissen Grenzen) sicherlich aber nicht in gleichem Maasse schädlich auftreten.

Somit glauben wir, dass wir in dem oben beschriebenen Verfahren wirklich eine Methode gefunden haben, nach welcher Magnete von vorzüglicher Haltbarkeit hergestellt werden können. Wie sich solche Magnete auf lange Zeit hinaus halten, darüber werden wohl solche Beobachter in der Zukunft Zeugniss geben, welche derartige Magnete zu Intensitätsbestimmungen verwenden werden.

Dass insbesondere vergleichende magnetische Bestimmungen an verschiedenen Orten der Erde — z. B. nach der Schwingungsmethode — wesentlich verlässlicher sein werden, wenn nicht Gefahr besteht, dass die dazu verwendeten Magnete durch Transport und unvermeidliche Erschütterungen Verlust an Magnetismus erleiden, ist klar.

Wir wollen also zum Schluss folgende praktische Regeln, wie sie sich aus unseren bisherigen Erfahrungen ergeben, für die Herstellung constanter Magnete aufstellen:

1. Glasharte Stahlstäbe zu Magneten zu verwenden, ist durchaus unzweckmässig.

2. Ist der Stahlstab bei gewöhnlicher Temperatur gut gehärtet, dann setze man ihn auf lange Zeit (20 bis 30 Stunden, bei massiveren Magneten noch länger) z. B. in Wasserdampf von 100°[1]. Unterbrechungen sind gleichgültig. Der Stahlstab befindet sich darauf in dem der Temperatur 100° entsprechenden Grenzzustande der Härte.

---

1) Sehr bequem herzustellen durch Anwendung einer langhalsigen Kochflasche und eines Kühlers, aus welchem das condensirte Wasser wieder in die Kochflasche zurücktröpfelt. Die langdauernde Einwirkung des Wasserdampfes ist für den Magnet in keiner Weise schädlich; derselbe wird dadurch gleichmässig dunkel gebeizt und kann dann so polirt werden.

3. Dann wird der Stahlstab (gleichgültig ob er schon vorher magnetisirt worden ist), bis zur Sättigung magnetisirt, und darauf wieder etwa fünf Stunden (bei massiveren Magneten eher noch länger) im Wasserdampf von 100° gehalten. Erst dann ist der Magnet, der sich nunmehr in dem der Temperatur 100° entsprechenden magnetischen Grenzzustande befindet, zu magnetischen Messungen zu verwenden.

Indem wir die vorliegenden Mittheilungen schliessen, gedenken wir noch mit herzlicher Dankbarkeit des freundlichen Entgegenkommens und der bereitwilligen Unterstützung, die uns Hr. Prof. F. Kohlrausch während der vielen Jahre, die wir im physikalischen Institut der Universität Würzburg thätig gewesen, und wo diese Arbeiten in ihrem wesentlichen Theile entstanden sind, in freundschaftlichster Weise stets erwiesen hat.

Prag — New-Haven, 10. August 1883.

IX. *Berichtigung; von A. Guébhard.*

Da leider Hr. Prof. W. Voigt in seinem neulichen Aufsatze „Beobachtungen zur Prüfung der Theorie der Nobili-Guébhard'schen Ringe“[1]) ebensowenig wie in der vorigen sogenannten „Theorie der electrochemischen Experimente des Hrn. Guébhard,“[2]) sich den wirklichen, von mir wiederholt als allerhauptsächlichsten angezeigten experimentellen Bedingungen hat anknüpfen wollen, so scheint mir unbedingt nothwendig, die Fragestellung wieder herzustellen, indem ich den ins Deutsche[3]) übersetzten Text meines Satzes hierbei anführe:

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 183—207. 1883.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **17.** p. 257—272. 1882.
3) W. Voigt, Wied. Ann. **17.** p. 257—258. 1882.

„Stellt man einer horizontalen, sehr dünnen, genau durch die Wände einer electrolytischen Zelle begrenzten Metallplatte eine beliebige Zahl von verticalen, cylindrischen Electroden sehr nahe gegenüber, so stellen die entstehenden Farbenringe mit sehr grosser Annäherung das theoretische System der äquipotentiellen Linien dar, welches sich ergeben würde, wenn man dieselben Electroden direct auf eine durch dieselben Grenzen begrenzte leitende Ebene aufsetzte. Einige experimentelle Vorsichtsmaassregeln machen die Annäherung zum mindesten gleich der . . .“ u. s. w.

Die nothwendige Dünnheit der Platte habe ich vielfach[1]) und umständlich besprochen: bei Kupferblech ist 0,02 mm, bei Eisenblech 0,15 mm schon als zu dick angezeigt; dünnere Platten aber sind im Verkehr nicht leicht zu finden.[2])

Wie und mit welchem Material die Begrenzung ausgeführt werden soll, ist im Electricien[3]) vollständig angegeben. Am selben Orte wird auch deutlich dargelegt, dass ein 25 × 12 qcm grosses Metallblatt nie als unbegrenzte Ebene angenommen werden darf, selbst mit einem 35 × 25 qcm grossen Eisenblech ist der Fehler ein grosser, und zwar desto grösser, je geringer die Zahl der Electroden und je unregelmässiger und weniger dicht ihre Anordnung ist; das folgt direct aus der Theorie der conformen Abbildungen; und man kann nicht behaupten, „dass für eine ganze Classe von Erscheinungen — nämlich bei Anwendung gleichnamiger Pole

---

1) A. Guébhard, Compt. rend. **90.** p. 984. 1880.

2) Ganz ausnahmsweise wurde eine 4 mm dicke Platte, und nur deswegen citirt, um gegenüber Hrn. Dr. Hugo Meyer zu erwähnen, dass auch auf solchen möglich war, etwas anderes zu erzeugen, als die „gewöhnlichen“ Nobili'schen kleinen Pfauenaugen. Von Genauigkeit war aber in den kurzen, ausser dem Text citirten Zeilen (Electricien **2.** p. 434) gar keine Rede und die bezügliche electrochemische Figur nur als „analog“ mit der wirklichen Aequipotentialfigur angezeigt.

3) Guébhard, Electricien **2.** p. 433. 1882; früher auch schon in Compt. rend. **93.** p. 406. 1881; und dann Journ. de Phys. (2) **1.** p. 213. 1882. u. s. w.

— gar kein entsprechendes Kirchhoff'sches Stromverzweigungsproblem existirt."[1])

Dass in keinem Falle punktförmige oder die Platte berührende Electroden angewendet werden dürfen, geht aus meinem Texte selbst hervor. Vielmehr habe ich in einer besonderen, Hrn. Prof. Voigt wohl bekannten Notiz[2]) ganz speciell die aus einer ungenauen Anwendung des Kirchhoff'schen Gesetzes hervorgehenden ungenauen Resultate erklärt, indem bei Anwesenheit nur gleichnamiger Electroden nicht durch einen beliebigen Contact der Aus-, resp. Eintritt des Stromes geschehen darf, sondern durch eine im unendlichen, resp. endlichen Bereiche liegende Grenzelectrode, welche, in der Form einer der bezüglichen berechneten Niveaucurven gebogen, alle anderen Electroden vollständig umringen soll, ohne irgend die Platte zu berühren.

Als grösster Abstand der Electroden von der Platte wird 6 mm angegeben, für genaue Resultate aber der allerkleinste (1 bis 2 mm) empfohlen. Als Minimum der als unendlich geltenden Höhe der freien cylindrischen Electroden — resp. des Flüssigkeitsniveaus — werden 8 cm erfordert.

Ueber die Procentverhältnisse der gebrauchten essigsauren Kupfer- und Bleilösung von Hrn. Dr. Hugo Meyer dringend befragt, antwortete ich zwar, dass jene vom Einfachen bis zum Zehnfachen modificirt werden könnten; meiner langen Erfahrung nach möchte ich aber jetzt empfehlen[3]), dass das Bleiverhältniss das allergeringste sein soll.

Endlich muss hervorgehoben werden, dass keineswegs mit den Nobili'schen, meinem Satze folgenden Farbenringe die dicken, dunkeln, farbenlosen Flecke zu verwechseln sind, welche als Zerstörungsprocess erscheinen, sobald nicht, nach meiner Anzeige, eine allerkleinste, stark polarisirbare Säule von höchstens 5 cm hohen Bunsen'schen, resp. chromsauren oder secundären Elementen angewendet wird, welche

1) W. Voigt, Wied. Ann. 19. p. 205. 1883.

2) Guébhard, Compt. rend. 94. p. 851. 1882. Auch Journ. de Phys. (2) 1. p. 213. 1882.

3) Guébhard, Journ. de Phys. (2) 1. p. 215. 1882.

keine unendliche Verdickung der Niederschläge mit permanentem Durchgang des Stromes in die Platte gestattet.

Wird aber diese letzte, von allen anderen sich ergebende, resp. alle andere umfassende Hauptbedingung erfüllt, so erscheint mein ersterer „irriger“, „unmöglicher“ Satz als particulärer Fall des folgenden erweiterten, fast augenscheinlichen physikalischen Gesetzes: „Wird in einem beliebig gestalteten electrolytischen Felde irgend eine Anordnung von isolirten leitenden Flächen hergestellt und die experimentelle Bedingung erfüllt, dass in jedem Punkte jener eingetauchten Oberflächen keine stationäre Normalstromcomponente das Maximum der Polarisation überwiegen kann, so werden die polarisirten metallischen Oberflächen als feste, undurchdringliche Wände die erstere stationäre Strömung zerstören und die Linien gleicher Polarisation, resp. gleicher Dicke oder Farbe Niveaucurven des neuen eintretenden stationären Zustandes bilden.“

Wenn auch die „Unmöglichkeit“ dieses — für hydrodynamische sowie für electrostatische und magnetische Anwendungen wichtigen — Satzes, für Hrn. Prof. W. Voigt „ganz von selbst sich erweisen soll, „und dessen „Irrigkeit“ „ohne weiteres so klar erscheinen“, dass sie „keines Beweises“ würdig sein wird, so möchte ich doch für jede eventuelle Fortführung des theoretischen Streites[1]) einen gewissen experimentellen Standpunkt deutlich festgestellt haben. Ob mich die bisherigen Aeusserungen des Hrn. Prof. Voigt oder die nachträglichen, der rohen primitiven Nobili'schen Manier nachgeahmten, allzuvereinfachten Versuche des Hrn. Dr. Werner in irgend einer Weise getroffen haben, überlasse ich dem Leser zu beurtheilen; wie schon gesagt, haben diese Aufsätze mit meiner Methode gar nichts zu thun.

---

1) Von mir selbst war noch kein einziges theoretisches Wort ausgesprochen worden, als mich schon (1880) Hr. Dr. Hugo Meyer theoretisch über meine rein experimentell lautende Notiz des 26. April desselben Jahres (Compt. rend. 90. p. 984. 1880) angriff. Demnach sind auch fortwährend nicht meine, sondern die von Hrn. Dr. Hugo Meyer irrthümlich mir zugeschriebenen Ansichten von Hrn. Voigt (vgl. Voigt's Citat. l. c. p. 202 unten) sowie von anderen angegriffen worden.

Auch kann von einer Vertheidigung meinerseits nicht die Rede sein, umsoweniger von einem „Angriffe“. In diesen Zeilen suche ich nur die wahren Thatsachen zu begründen und jede weitere Verschiebung dieser Frage zu verhindern.

Paris, physikal. Laborat. d. medic. Facult., im Mai 1883.

X. *Benutzung der Schlierenmethode zur Untersuchung von Verwachsungen im Quarz; von A. Kundt.*

In einer vor kurzem erschienenen Mittheilung[1]) habe ich gezeigt, dass sich mit Hülfe der electrischen Pulverfiguren in senkrecht zur Axe geschnittenen Quarzplatten leicht auch solche Verwachsungen nachweisen lassen, welche bei Untersuchung in polarisirtem Lichte nicht erkennbar sind. Bei einzelnen der benutzten Platten, besonders aber bei einigen parallel oder schief zur Hauptaxe geschnittenen, liessen sich die Verwachsungen allerdings mit blossem Auge bei sehr schiefem Durchgange unpolarisirten Lichtes bemerken. Dies führte mich darauf, die betreffenden Stücke mit der von Töpler angegebenen „Schlierenmethode“ zu untersuchen.[2])

Es ergab sich, dass mittelst derselben Verwachsungen im Quarz, die sich sonst dem Auge durchaus entziehen und wohl nur mittelst Anätzung[3]) zu constatiren sind, sehr schön und deutlich wahrgenommen werden können.

Die Anordnung des „Schlierenapparates“ für die Versuche war folgende: Vor einem Argandbrenner wurde ein Schirm mit kreisrunder Oeffnung gebracht; der Durchmesser der Oeffnung konnte leicht von 1,5 mm bis ca. 5 mm geän-

1) A. Kundt, Wied. Ann. 20. p. 592—601. 1883.

2) Bezüglich der Schlierenmethode siehe: Töpler, Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode. Bonn bei Max Cohen & Sohn. 1864; desgl. Pogg. Ann. 127. p. 556. 1866 u. 131. p. 33. 1867.

3) Leydolt, Wien. Ber. 15. p. 59 ff.

dert werden. Eine achromatische Linse L, deren Brennweite etwas mehr als 1 m betrug, entwarf von der Oeffnung in 6 m Entfernung von letzterer ein reelles Bild. Ein Fernrohr von 50 mm Objectivöffnung wurde dann so aufgestellt, dass das reelle Bild der kreisrunden Oeffnung dicht vor das Objectiv des Fernrohres fiel. Die zu untersuchende Quarzplatte wird dicht vor die Linse L gebracht und das Fernrohr so eingestellt, dass dasselbe ein scharfes Bild der Quarzplatte gibt. Blendet man dann das reelle Bild vor dem Objectiv mit einem Stückchen Papier in geeigneter Weise ab, so werden sofort alle Schlieren in der Quarzplatte sichtbar. An der Grenze jeder Verwachsung tritt eine meist auf eine enge Zone begrenzte Aenderung des Brechungsvermögens auf, d. h. eine „Schliere." Man sieht daher im Fernrohre alle Grenzlinien der Verwachsungen sehr deutlich. Gewöhnlich ist es nicht einmal nöthig, den reellen Vereinigungspunkt der Strahlen vor dem Objectiv, wie es Töpler vorschreibt, abzublenden; es treten allerdings bei passender Abblendung die Grenzlinien der Verwachsungen deutlicher hervor. Die Figuren 1, 2 und 3 zeigen die Verwachsungen von drei parallel der Hauptaxe geschnittenen Platten, wie sie sich im Schlierenapparate zeigten.

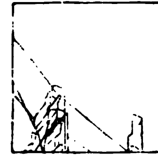
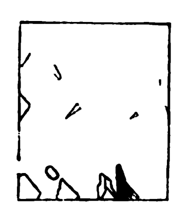

Fig. 1.


Fig. 2.


Fig. 3.

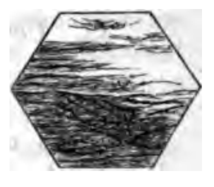

Fig. 4.

Fig. 4 gibt das Aussehen einer senkrecht zur Axe geschnittenen Platte. Sowohl bei Betrachtung mit blossem Auge als auch im Polarisationsapparate erwies sich die Platte als homogen; dass sie vielfach verwachsen sein müsse, hatte sich indess schon bei der Untersuchung auf Thermoelectricität gezeigt.

Die electrische Pulverfigur derselben Platte bei Erwärmung von der Mitte aus ist in der oben angeführten Arbeit

in Fig. 10 abgebildet. Ob die 6 Seiten derselben den 6 Prismenflächen des Krystalls, aus dem sie geschnitten, entsprechen, war nicht bekannt. Leider konnte die andere Platte, deren unregelmässige Pulverfigur in jener Abhandlung abgezeichnet ist, im Schlierenapparate nicht untersucht werden, da sie inzwischen gesprungen war.

Die Zwillingsplatte, deren Pulverfigur l. c. Fig. 11 abgebildet ist, zeigte im Schlierenapparate die Zwillingsgrenze als etwas verwaschene dunkle Zone. Doch war für die Erkennung derselben ein sorgfältiges Abblenden des reellen Lichtpunktes mit einer scharfen Kante, welche der Zwillingsgrenze parallel stand, nöthig.

Ich habe die vorstehende kurze Mittheilung gemacht, um Krystallographen auf die Verwendbarkeit der Schlierenmethode für die Untersuchung von Verwachsungen, speciell am Quarz, hinzuweisen. Auch die Untersuchung des thermoelectrischen Verhaltens verwachsener Quarzplatten dürfte durch die gleichzeitige Untersuchung derselben im Schlierenapparate in manchen Fällen gefördert werden können.

Strassburg i. E., den 20. October 1883.

XI. *Ueber absolute Maasse; von C. Bohn.*

Zweite Abhandlung.

Gegen meine Abhandlung über absolute Maasse [1]) hat Hr. Volkmann Bemerkungen veröffentlicht [2]) und dabei sich auf eine mir bis dahin unbekannt gewesene Erörterung der Frage von Hrn. Bertrand [3]) berufen. Ich nehme hieraus Anlass auf den Gegenstand zurückzukommen, mit Bezugnahme auf die beiden angeführten Schriften.

Hr. Volkmann muss meine Dimensionsbestimmung der Masse (dritte nach der Länge, minus zweite nach der Zeit)

1) Bohn, Wied. Ann. **18.** p. 346. 1883.
2) Volkmann, Wied. Ann. **19.** p. 245. 1883.
3) Bertrand, Journ. des Savants, 1882. p. 621.

als richtig anerkennen, verwirft sie aber, weil „die häufige Ausführung von Wägungen in der Physik den Begriff der Masse in uns zu einem so anschaulichen und greifbaren gestaltet hat, wie wir ihn in dem Dimensionswerth $L^3 T^{-2}$ jedenfalls nicht haben." Nun hat aber die sogenannte Dimensionsermittelung einer Grösse mit dem Begriffe dieser gar nichts zu thun. Für die Deutlichkeit dieses Begriffes der Masse (einer Stoffmenge) ist es ganz gleichgültig, ob man die Masseneinheit als eine willkürliche und unabhängige, oder ob man sie in einem durchgebildeten Maasssysteme als eine aus den bereits gewählten Einheiten der Länge und Zeit nothwendig folgende ansieht. Es wird nirgends bestritten, die Temperatur habe dieselbe Dimension wie das Quadrat einer Bahngeschwindigkeit, aber Niemand wird deshalb die bisher übliche Definition der Temperatur, die gewöhnliche Erläuterung des Temperaturbegriffes verlassen, um ein Geschwindigkeitsquadrat an die Stelle zu setzen.

Ueberhaupt muss, Missverständnissen gegenüber, daran erinnert werden, dass $M \dotplus L^3 T^{-2}$ nicht heisst die Masse sei gleich...., sondern das Symbol drückt aus, wie sich in einem folgerichtig entwickelten Maasssysteme die Masseneinheit ändert, wenn die Einheit der Länge $m$fach, die Einheit der Zeit $n$fach genommen wird. Sind die Dimensionsermittelungen zunächst für die Bedürfnisse von Umrechnungen angestellt worden, sind sie ohne Einfluss auf die Deutlichkeit des Begriffes einer Grösse, so vermögen sie doch nützliche Aussichten zu eröffnen und zu fruchtbaren Vergleichungen zu leiten. Die kinetische Wärmelehre hat offenbar eine Stütze mehr erhalten, dadurch dass die Dimension der Temperatur als dieselbe wie die eines Geschwindigkeitsquadrates erkannt, also eine nähere Beziehung zwischen Temperatur und Geschwindigkeitsquadrat aufgedeckt wurde.

Nach Hrn. Volkmann's Darstellung kann es scheinen, als ob ich der Erfinder des Gedankens wäre, alle Gleichungen müssten homogen sein, oder als ob ich wenigstens die Allgemeingültigkeit dieses Satzes, besonders in der Physik zuerst ausgesprochen hätte. Ich muss die Ehre, diese Erfindung gemacht zu haben, ablehnen. Der elementare Satz von der

Gleichartigkeit der auf beiden Seiten einer Gleichung stehenden Grössen ist mir bekannt und als selbstverständlich klar erschienen Ich weiss allerdings genug Fälle anzuführen, in welchen die Homogeneïtät der Gleichungsglieder scheinbar verletzt ist; Darstellungen, in welchen das vorkommt, halte ich für tadelnswerth. Es war früher üblich, die trigonometrischen Functionen als gewisse Längen zu erklären, mit dem Zusatze, dass sie an einem Kreise zu construiren seien, der mit dem Halbmesser gleich der Längeneinheit beschrieben sei. Fasst man den Sinus als eine Länge auf, so ist die Gleichung: Kathete gleich Hypothenuse mal Sinus . . freilich nicht homogen. Die schärfere und richtige Darstellung erklärt von vornherein die trigonometrischen Functionen als Verhältnisse zweier Längen, und damit schwindet in dem gewählten Beispiele der Verstoss gegen die Gleichartigkeit. Ganz gewöhnlich gibt man für Geschwindigkeiten gewisse Längen an, spricht z. B. von einer Geschwindigkeit von 5 m. Sieht man nun unrichtig die Geschwindigkeit als eine Länge an, so ist die Gleichung: Weg (d. i. Länge) gleich Geschwindigkeit mal Zeit nicht homogen. Fasst man richtig Geschwindigkeit als Verhältniss einer Länge zu einer Zeit, so wird die Gleichartigkeit der Gleichungsglieder sofort erkannt. Und so ist es in allen Fällen, wenn wirklich richtige Gleichungen scheinbar gegen die Homogeneïtät verstossen. Hr. Volkmann will das Princip der Homogeneïtät der Gleichungen „schon der Einfachheit halber beibehalten, soweit es angeht.“ Es erscheint ihm aber zweifelhaft, ob es sich consequent durchführen lässt. Danach muss man wohl glauben, dass Hr. Volkmann auch Gleichheit verschiedenartiger Grössen zulässt, und dieser Verstoss gegen den in meinen Augen unbestreitbaren Grundsatz kennzeichnet eigentlich schon die Art der gegen meine Arbeit erhobenen Bemerkungen. Obgleich Hr. Volkmann, der die allgemeine Durchführbarkeit des Grundsatzes der Gleichartigkeit des Gleichungsgliedes bezweifelt, die Forderung also nicht für eine nothwendig zu erfüllende ansieht, lässt er sich gleichwohl bestimmen, um die Homogeneïtät herzustellen, die Constante des Gravitationsgesetzes zu einer Function von Masse,

Länge und Zeit zu machen. Ich vermisse hier die Folgerichtigkeit.

Trifft man gewisse Uebereinkommen, so lassen sich die Einheiten aller Grössen so unter einander verknüpfen, dass aus einer Einheit, z. B. jener der Zeit, alle anderen folgen. Verschiedene Vorschläge dieser Art sind von mehreren Seiten gelegentlich gemacht worden, ohne dass man gerade die Nützlichkeit der Durchführung behauptet hätte. Ich habe die Einheiten aller Grössen aus denen der Länge und der Zeit abgeleitet und habe mich zu dieser Wahl bestimmen lassen durch die Betrachtung, dass alle Naturvorgänge zuletzt Bewegungen sind, d. h. in Aenderungen des räumlichen Nebeneinander — und des zeitlichen Nacheinander — bestehen, die durch Längen- und Zeitmessungen bestimmt werden können. Der Hauptinhalt des ersten Theiles meiner Abhandlung ist: Die Masse ist keine Grundgrösse, sondern eine abgeleitete. Eine ganz kurze Notiz, die aus Gauss's Nachlass veröffentlicht wurde[1]), gestattet zu vermuthen, der berühmte Vater der absoluten Maasse habe die Einführung der Masseneinheit als einer besonderen und selbständigen für überflüssig, aber vielleicht für bequem erachtet, denn die Dimensionswerthe der Dichtigkeit, der Expansibilität der Flüssigkeit, des Druckes, der Wirkung = lebendige Kraft = Drehungsmoment und der „Wirksamkeit" werden einmal durch Länge und Zeit allein und erst in zweiter Linie mit Zuziehung der Masse angegeben, die Masse $\mp L^3 T^{-2}$ gesetzt und daneben selbständig $\mp M$. Dem gegenüber steht Hrn. Volkmann's Ausspruch, drei Grundgrössen seien für die Mechanik sogar nothwendig. Grund: „In den Differentialgleichungen der Mechanik kommen alle drei Grundgrössen — die Masse unabhängig von den beiden anderen — vor." Nun sind, abgesehen von den rein phoronomischen Gleichungen, welche ausschliesslich Beziehungen zwischen Längen und Zeiten ausdrücken, die Gleichungen der Dynamik Abkömmlinge zweier Grundgleichungen: der Gleichheit zwischen Antrieb der Kraft und Quantität der Bewegung und der Gleichheit zwischen Arbeit

1) Gauss Werke, 5. p. 630; mir erst durch das Citat in Wied. Ann. 19. p. 246. 1883 bekannt geworden.

der Kraft und lebendiger Potenz, drücken also Beziehungen aus zwischen Längen, Zeiten, Massen und Kräften. Man kann nun entweder im Jacobi-Kirchhoff'schen Sinne von den Kräften ganz absehen und sich mit den Geschwindigkeitsdifferentialquotienten begnügen, oder in der allgemein angenommenen Weise Kraft- und Masseneinheit mittelst der Längen- und Zeiteinheit verknüpfen; schliesslich bleiben Gleichungen zwichen Längen, Zeiten, Massen übrig. Sobald aber eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen gegeben, ist eine Abhängigkeit derselben voneinander festgestellt, es können nicht alle drei, sondern höchstens zwei unabhängig veränderlich sein; daher verstehe ich die oben mitgetheilte Betrachtung Volkmann's durchaus nicht.

Die Behauptung von der Nothwendigkeit der drei Grundeinheiten für die Mechanik findet sich in dem Artikel von Hrn. Bertrand in der Form, die Zahl drei der Grundeinheiten sei mit den Grundsätzen der Wissenschaft verknüpft (liè aux principes mêmes de la science). Eine Begründung oder Erklärung dieses Satzes wird nicht gegeben; ich bestreite ihn. Unmittelbar vor diesem Ausspruche wird gesagt[1]) man habe das Recht, sechs verschiedene und unabhängige Einheiten in der Mechanik anzunehmen für Längen, Zeiten, Kräfte, Massen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen (warum denn nicht auch für Flächen, Volumen, Bewegungsmenge, Arbeiten u. s. w.?), die Formeln würden dann je nach den getroffenen Wahlen andere. In der classischen Formel für die Schwingungsdauer des Pendels vollziehe sich der Uebergang von der Secunde zur Minute als Einheit von selbst, und das rühre her von der Uebereinkunft, nach welcher man mit der Zeiteinheit auch die Masseneinheit ändern müsse und folglich die Zahl, welche die Schwere darstelle. — Damit wird doch die freie Verfügung über die Masseneinheit eigentlich schon aufgegeben, es wird wenigstens anerkannt, dass die Masseneinheit übereinkömmlich von der Zeiteinheit bedingt sei. Ich lege mir die Sache etwas anders zurecht und benutze das, um noch ein Beispiel der scheinbaren Ungleichartigkeit der Glieder einer Gleichung zu besprechen.

1) Bertrand, Journ. des Savants. 1882. p. 623.

Die Pendelformel lautet bekanntlich $T = \pi \sqrt{l/g}$. Es ist üblich, die von der Intensität der Schwere abhängige Grösse g durch eine Längenangabe zu bestimmen; selbstverständlich wird die Pendellänge l nach derselben Einheit gemessen sein, wie sie der Angabe für g zu Grunde liegt. Dann steht rechts eine unbenannte Zahl (π) mal der Wurzel aus einer unbenannten Zahl, im ganzen also wieder eine unbenannte Zahl, während links eine benannte Zahl — eine Anzahl Zeiteinheiten — steht. Der Verstoss gegen die Gleichartigkeit rührt aber nur her von der nachlässigen und unrichtigen Annahme, g sei eine Länge; g ist eine Beschleunigung, d. h. das Verhältniss einer Länge zum Quadrate einer Zeit. Führt man das in die Formel ein, so stellt sich die Homogeneïtät der Gleichung sofort heraus. Wie dieselbe Längeneinheit bei der Auswerthung von l und g dienen wird, so ist auch eine und dieselbe Zeiteinheit bei der Auswerthung von T (der Schwingungsdauer) und von g zu benutzen.

Hr. Bertrand erwähnt aus einer mir unbekannt gebliebenen Schrift[1]) die Ansicht, die Anzahl der absoluten Einheiten sollen so klein als möglich sein, und setzt hinzu, wenn dieser Satz angenommen würde, so müsste man eben nur eine absolute Einheit nehmen. Dem stimme ich bei, nur halte ich es für zweckmässiger, zwei unabhängige Einheiten (Zeit und Länge) zu benutzen. Der Meinung des Hrn. Blavier setzt Hr. Bertrand die seine entgegen: die Regel sollte sein, die grösstmögliche Zahl von Grundeinheiten anzunehmen, welche sich mit der Bedingung verträgt, alle wissenschaftliche Sätze durch Formeln ausdrücken zu können, die unabhängig von der Wahl der Einheiten seien. Er fährt fort, wenn man die Anzahl der Einheiten zu gross wähle, müsste man je nach der gewählten die Formeln ändern; wenn man die Zahl der Einheiten mehr als nöthig vermindere, so könnten allerdings die Formeln fortbestehen, welches auch die Einheiten seien, aber die unnöthig auferlegte Beschränkung in der Wahl dieser schränke ohne Noth die Allgemeinheit

1) Des grandeurs electriques et de leur mesure en unités absolues, par E. E Blavier, Paris 1881.

der durch jede Formel ausgedrückten Sätze ein. Mir scheint das nicht zutreffend. Wird eine Zuziehung von Zahlencoëfficienten nöthig (was nicht immer der Fall), so ändert das den Sinn der Formel gar nicht. Die Formel $\lambda = \text{Const.}\, L . P / (q . E)$ sagt, welche und wieviel Einheiten auch gewählt sein mögen, immer dasselbe aus: die elastische Verlängerung (λ) eines Stabes ist proportional der Länge (L) des Stabes und der Grösse des Zuges (P), verkehrt proportional dem Querschnitte (q) des Stabes und verkehrt proportional dem Elasticitätsmodul (E) des Stoffes. Selbstverständlich, und gerade der Homogeneïtät der Gleichung wegen, ist folgerichtig bei derselben Einheit zu bleiben für die Maasszahlen, bei welcher dieselbe Art von Einheit in Frage kommt, also nicht etwa λ in Millimetern und L in Metern oder Fussen zu nehmen. In vielen Fällen ändert sich mit der Wahl neuer Einheiten nicht einmal der in der Formel vorkommende Zahlencoëfficient. Er bleibt in der Pendelformel π, ob man die Längen (in Pendellänge und in der Beschleunigung) nach Meter oder Zoll, ob man die Zeiten (in Schwingungsdauer und in der Beschleunigung) nach Secunden, Minuten oder Stunden rechnet.

Hier kann ich sogleich Hrn. Volkmann's Befürchtung besprechen, die Genauigkeit von Messungen würde getrübt durch in dem Naturgesetze vorkommende constante Factoren (Weber's kritische Geschwindigkeit, die Constante des Newton'schen Gesetzes), deren numerischer Werth weniger genau feststeht, als die Resultate (der Messungen) in sich übereinstimmen. Eine Folgerung dieser Befürchtung würde sein, alle Einheiten voneinander unabhängig zu wählen, z. B. Volumen- und Gewichtseinheit ohne Rücksicht auf die Längeneinheit zu bestimmen. Ist es denn nicht äusserst schwierig, ein Volumen herzustellen, das mathematisch genau mit jenem eines Würfels übereinstimmt, dessen Seite gleich der Längeneinheit, ein Gewicht, welches genau gleich ist dem der diesen Würfel (oder ein ihm gleiches Volumen) ausfüllenden Menge Wassers von bestimmt vorgeschriebenen Eigenschaften? Es ist doch einfacher und sicherer, irgend ein Hohlgefäss, irgend einen Gewichtsstein auf dem Rathhaus oder sonstwo zu hin-

terlegen und dessen Rauminhalt, beziehungsweise Gewicht, als Einheit zu verkünden. Aber die Befürchtung, welche zu dieser mindestens befremdenden Folgerung führt, ist auch glücklicher Weise nicht begründet. Die Genauigkeit und Sicherheit und Allgemeinverständlichkeit, wie der dauernde Werth, mit welchem Maassergebnisse dargestellt und bewahrt werden können, hängt nur von der Unveränderlichkeit und Wiederauffindbarkeit der gebrauchten Maasseinheiten ab, nicht von deren Grösse an und für sich oder von einem Zusammenhange derselben unter sich und mit irgend welchen Naturvorgängen. Zu welchem Zwecke werden überhaupt Maasseinheiten aus anderen abgeleitet und nicht selbständig, willkürlich genommen? Um die Constanten aus mathematischen Formeln und aus Naturgesetzen fortzuschaffen.

Der Artikel im Journal des Savants erwähnt, ein englischer Autor[1]) habe zur Verdeutlichung des Nutzens eines folgerichtig durchgeführten Maasssystemes gesagt: ‚Jedermann begreife, wie absurd es sein würde, eine Geometrie zu lehren, in welcher die Flächeneinheit so gewählt sei, dass der Inhalt eines Rechteckes 0,000 023 mal das Product der Seitenlängen sei. Es wird dann zugesetzt, dieser zufällig gewählte Coëfficient sei übrigens nicht unbequemer als der Factor π, welcher in der classischen Geometrie in der Flächenformel des Kreises auftrete. Dem gegenüber muss aber bemerkt werden, dass die dem Factor π zugeschriebene Unbequemlichkeit unvermeidlich folgt aus der Irrationalität des Verhältnisses der Flächen eines Quadrates und eines Kreises, dessen Halbmesser gleich der Quadratseite ist. Eine möglichst einfache Beziehung zwischen der Längen- und der Flächeneinheit wird von einem gut durchgebildeten Maasssystem gefordert, es bleibt aber noch Willkür. Es ist nicht gerade geboten, ein Quadrat als Vergleichsfigur zu nehmen, man hätte auch können als Flächeneinheit den Inhalt eines Dreieckes, dessen Grundlinie und dessen Höhe je der Längeneinheit gleich sind, wählen können, und diese Wahl hätte

1) Reports of the Committee on electrical standards appointed by the Brit. Assoc. etc. 1873.

sogar vor der allgemein angenommenen gewisse Vortheile, unter anderen dass der so häufig auftretende Factor $^1/_2$ bei Trapezen, Polygonen nach L'huillier's Regel oder aus Coordinaten u. s. w. berechnet, in Wegfall käme. Oder man könnte als Flächeneinheit die Fläche des regelmässigen n-Eckes mit der Seite gleich der Längeneinheit wählen, oder jene des Kreises vom Halbmesser Eins. Bei letzterer Einheitswahl entfiele der Factor π bei der Flächenformel für den Kreis, die Ellipse u. s. w., dafür würde aber bei Parallelogrammen, bei Dreiecken und Trapezen ... statt des Factors Eins, beziehungsweise $^1/_2$, je ein anderer (irrationaler) auftreten. Der rationelle Zusammenhang zwischen Volumen- und Längeneinheit hätte auch anders, als geschehen, gewahrt werden können, man hätte können die Kugel vom Halbmesser Eins, das Octaëder oder Icosaëder oder ... von der Seitenlänge Eins oder von der Axenlänge Eins als jenen Körper bezeichnen können, dessen Volumen die Einheit für die Raummessungen sein soll. Das Verhältniss der Volumen verschieden gestalteter Körper mit gleichen oder verschiedenen Linearabmessungen würde durch beliebige Wahl der Volumeneinheit nie geändert, nur die in den Formeln vorkommenden Zahlencoëfficienten.

Ich nehme, den Lesern dieser Zeitschrift gegenüber, fast Anstand, an einen ganz elementaren Satz zu erinnern, dessen man jedoch bei den Discussionen über das absolute Maass nicht immer genügend eingedenk gewesen zu sein scheint. Nämlich, dass man den üblichen kurzen sprachlichen Ausdruck einer Formel nicht wörtlich nehmen und nicht mit dem eigentlichen Sinn der Formel verwechseln darf. Es ist unbestreitbar Unsinn, zu sagen, die Fläche eines Rechteckes sei das Product aus Höhe und Breite desselben. Denn benannte Zahlen kann man überhaupt nicht miteinander multipliciren. Der Sinn des bequem kurzen Wortausdruckes ist bekanntlich, dass das Product der absoluten Zahlen, welche angeben, wie oft die Längeneinheit je in der Höhe und in der Breite enthalten ist (also wieder eine absolute Zahl) anzeigt, wievielmal die Flächeneinheit in der Fläche des Rechteckes enthalten ist, wobei wieder stillschweigend die Annahme gemacht ist, die Flächeneinheit sei jene des

Quadrates (nicht des regelmässigen *n*-Eckes oder Kreises u. s. w.) mit der Seite Eins.

Hr. Bertrand führt p. 626 aus, bei einer gewissen Wahl der Einheiten sei die Gasspannung oder der Flächendruck ein Geschwindigkeitsquadrat (genauer gesprochen mit diesem von gleichen Dimensionen). Die Ableitung des Satzes stützt sich auf die Behauptung, M/L^3 sei eine absolute Zahl, „denn dieses Verhältniss sei unabhängig von der Wahl der Einheiten.“ Das ist aber nicht richtig. Damit ein Verhältniss oder ein Bruch eine absolute Zahl sei, müssen entweder Dividend und Divisor unbenannte, reine Zahlen sein, oder sie müssen gleichbenannte sein. Auch dass jenes Verhältniss von der Wahl der Einheiten unabhängig sei, trifft nicht zu. Zwar wird es im rationellen Maasssysteme von der Wahl der Längeneinheit nicht beeinflusst, wohl aber von der Wahl der Zeiteinheit. Denn die (rationelle) Masse Eins ist jene, welcher durch die Kraft Eins die Beschleunigung Eins ertheilt wird, — oder, um zugleich die rationelle Krafteinheit mit zu definiren, es ist jene Masse, welche durch Gravitation von einer gleich grossen, wenn beide als Kugeln gedacht werden, deren Dichte nur Function des Halbmessers ist, bei dem Abstand Eins der Mittelpunkte die Beschleunigung Eins erhält. Die Zahlengrösse für die Beschleunigung ($\div L T^{-2}$) ist aber abhängig von der Zeit, also auch die Zahlengrösse einer Masse, also auch jenes Verhältniss nicht, wie Hr. Bertrand meint, eine absolute Zahl, sondern $\div L T^{-2}$. Beachtet man dieses und führt die angezogene Betrachtung sonst ganz gerade so wie in jenem Artikel fort, so gelangt man zu: Flächendruck $\div L^2 T^{-4}$; ganz wie in meiner ersten Abhandlung angegeben, und wie (ich habe das seither erst erfahren) Gauss[1]) die Dimension für die „Expansibilität der Flüssigkeit“ bestimmt hat.

Die beiden Schriften, gegen welche ich hier mich erkläre, verlangen Nachweis eines Widerspruches, wenn ein Maasssystem verworfen werden soll. Einen solchen Widerspruch habe ich aber für das herrschende System aufgedeckt. Wird

1) Gauss' Werke, 5. p. 631.

die Masse als Grundeinheit (unabhängige) angenommen, so muss man, um die Gleichartigkeit der Gleichungsglieder zu retten, in die Gravitationsformel eine Function von Masse, Länge, Zeit einführen, und wenn man nun die Verhältnisse von Massen zu einander, ebenso von Längen zu einander durch ihre Werthe, nämlich reine Zahlen ersetzt, so gelangt man zu einem gänzlich veränderten, einem der Erfahrung widersprechenden Ausdrucke des Gravitationsgesetzes.

Im electromagnetischen (oder dynamischen) absoluten Maasssysteme erhalten electrische Massen solche Dimensionswerthe, dass man, um die Homogeneïtät der Gleichung herzustellen in der Formel, welche die Anziehung oder Abstossung ausdrückt, die zwei electrische unendlich kleine Körper aufeinander ausüben, statt einer unbenannten Constante eine Function von den Dimensionen eines Geschwindigkeitsquadrates einführen muss. Das kann meiner Meinung nach als Grund gegen die Zulässigkeit dieses Maasssystemes gelten. Im electrostatischen absoluten Maasssysteme ist man hingegen genöthigt, in der Formel, welche das Coulomb'sche Gesetz über die Wirkung zweier unendlich kleiner Körper, die man mit je nur einer magnetischen Polarität begabt denkt, ausdrückt, statt der unbenannten Constanten eine Function von den Dimensionen eines Geschwindigkeitsquadrates einführen. Das gibt nach meiner Meinung noch keinen Grund ab, die Zulässigkeit dieses Maasssystemes zu bezweifeln oder zu bestreiten. Bei mathematischer Bearbeitung von Aufgaben wird man zuweilen auf eine Gleichung mit imaginären Wurzeln geführt, und deutet dieses Ergebniss nicht dahin, dass die mathematische Bearbeitung unrichtig sei, sondern dahin, dass in der Aufgabe etwas Unmögliches verlangt sei, ein Widerspruch in ihr gelegen sei. So auch hier. Es widerstreitet der Erfahrung, Körper, grosse oder kleine, zu denken, welche jeweils nur mit einer magnetischen Polarität begabt sind. Hat man zwei sehr lange Magnete und bringt einen Pol des einen verhältnissmässig nahe an einen Pol des anderen, sodass die beiden anderen Pole voneinander und von jenen benachbarten sehr entfernt sind — wie Coulomb bei einer

Prüfung des nach ihm benannten Gesetzes that —, so kann man die Wirkungen der entfernten Pole vernachlässigen und mit einiger Annäherung denken, es würden nur die Wirkungen der benachbarten Pole in die Erscheinung treten. Ganz anders ist es aber, wenn man unendlich kleine magnetische Körper (physikalische Punkte oder Elementarmagnete) in ihrer Wirkung aufeinander untersucht. Dann ist die Entfernung je eines Poles des einen von einem Pole des anderen verhältnissmässig sehr gross gegen die Länge der Elementarmagnete, und die Unterschiede der Entfernungen zwischen einem Pole des einen und den beiden Polen des anderen sind vernachlässigbar. Man ist also in dem Falle, der in gewissen, bekannten Messungen oft verwirklicht ist, dass der Abstand der Mitten der beiden Magnete sehr gross ist, gegen die Abmessungen der Magnete und annähernd die Tangente des Winkels, um welchen je ein Magnet aus dem magnetischen Meridiane abgelenkt wird, der dritten Potenz jenes Mittenabstandes verkehrt proportional ist.

Wenn ich Hrn. Volkmann richtig verstanden habe, will er meine Behauptung, das electrostatische Maasssystem sei das allein zulässige, eben deshalb nicht gelten lassen, weil in dem Coulomb'schen Gesetze für magnetische Massen der Constanten eine Dimension nach der Länge und der Zeit gegeben werden muss. Folgerichtig muss Hr. Volkmann das electrostatische und das electromagnetische Maass für unzulässig erklären, denn nach dem ersten muss in dem Coulomb'schen Gesetze für magnetische und nach dem zweiten in jenem für electrische Massen der Constanten eine Dimension ertheilt werden. Gleichwohl hält aber Hr. Volkmann diese beiden Maasssysteme für gleichberechtigt und zulässig. Er führt gegen mich die Autorität eines der ständigen Schriftführer der französischen naturwissenschaftlichen Academie an; Hr. Bertrand sagt aber mit dürren Worten: die zwei Systeme seien miteinander unvereinbar (inconciliables).[1])

Den oben besprochenen Einwand gegen meine Bevor-

---

1) Bertrand, Journ. des Savants. 1882. p. 625.

zugung des electrostatischen Systemes hatte ich in meiner ersten Abhandlung vorgesehen und war ihm kurz gerade so entgegengetreten, wie ich es eben etwas weitläufiger gethan. Hr. Volkmann sieht aber voraus[1]), ich würde erwidern, die Wirkungen electrischer und magnetischer Massen aufeinander hingen noch von der Natur des Zwischenmittels ab. Dass dem so ist, daran habe ich allerdings ganz nebenbei erinnert, allein das hat mit der Hauptfrage nichts zu thun. Es ist mir recht leid, dass das Zwischenmittel (Diamagneticum, Dielectricum) Einfluss hat und „an Stelle des Zweikörperproblemes das Körperproblem n zu setzen ist." Allein es ist einmal so. Weisst Hr. Volkmann diese Thatsache ab, so muss er auch die allgemeine Gravitation leugnen und die Abweichung der Gestalt der Himmelskörper von der Kugel, denn aus beiden Ursachen wird die schöne und bequeme Einfachheit des Anziehungsproblemes auch verdorben, und die lästigen „Störungen' müssen berechnet werden.

Den Hauptgrund gegen das electromagnetische Maasssystem entnehme ich (und entnahm ich in meiner ersten Abhandlung) nicht vom Coulomb'schen Gesetze für magnetische Massen, sondern von der Folgerung, electromagnetisch habe man sich den electrischen Leitungswiderstand ähnlich wie eine Geschwindigkeit vorzustellen, während er electrostatisch uns als einer umgekehrten Geschwindigkeit äquivalent entgegentritt, weil aber wirklich, je kleiner die Geschwindigkeit einer electrischen Ausgleichung ist, desto grösser der Leitungswiderstand ist, also directe Proportionalität mit der Zeit (der Ausgleichung) besteht. Ich erinnerte dabei an die Arbeit von Riess, wodurch die Identität von Leitungswiderstand und Verzögerungswerth festgestellt ist. Hr. Volkmann hat ganz Recht zu sagen, Verzögerung sei zunächst eine negative Beschleunigung. Den Ausdruck Verzögerungswerth habe aber nicht ich hier erfunden, sondern überliefert angenommen; man könnte sich, wie ich zugestehe, deutlicher ausdrücken. Der Sinn ist, bei Riess, wie bei mir: verkehrt proportional der Entladungszeit ist das Leitungsvermögen

1) S. Abhandl. p. 247.

oder direct proportional jener Zeit ist der Widerstand, und meine Betrachtung behält also trotz der nicht tadellosen Ausdrucksweise ihre volle Gültigkeit.

Ist eine Grösse unabhängig von einer Grundgrösse, so sage ich, sie sei von der Dimension Null nach dieser; eine unbenannte Zahl ist also von der Dimension Null nach jeder Grundgrösse. Diese Ausdrucksweise weicht ab von jener des Hrn. Volkmann und anderer. Hr. Volkmann sagt in diesem Falle, die Dimension sei = 1 (p. 247 a. a. O.). Ich halte es für richtiger, als Dimensionszahl den Potenzexponenten zu nehmen.

Aschaffenburg, im Juni 1883.

XII. *Ein Vorlesungsversuch zum Beweise, dass Metalle besonders schlechte Absorbenten der Wärmestrahlen sind; von W. Holtz.*

Tyndall führt in seinem Buche über die Wärme zum Beweise, dass Metalle besonders schlechte Absorbenten der Wärmestrahlen sind, als Vorlesungsversuch das folgende Experiment an.[1] Ein Stück sogenanntes Goldpapier ist an der Metallseite mit einzelnen Papierstücken belegt, während es an der Papierseite mit rothem Quecksilberjodid bestrichen ist. Fährt man alsdann mit einem rothglühenden Spatel über die Metallseite, so wird der Anstrich dort gelb gefärbt, wo das Papierstück die Belegungen hat, während an den unbelegten Stellen, wo die Wärme am schwächsten absorbirt wird, die rothe Farbe unverändert bleibt. Nun ändert aber das Quecksilberjodid seine Farbe erst bei ziemlich hoher Temperatur, und so ist in der That eine fast unmittelbare Berührung nöthig, um den fraglichen Effect zu erzielen. Hierbei ist es aber schwer, die ganz unmittelbare Berührung aus-

1) Tyndall, Die Wärme, deutsche Uebersetzung 1875, p. 348.

zuschliessen, welche doch andererseits, weil es sich hier um strahlende Wärme, also um eine Fernwirkung handelt, ausgeschlossen werden muss.

Ich schlage deshalb vor, statt des Quecksilberjodids das für Wärme weit empfindlichere Kobaltchlorid zu verwenden. Man kann hierbei die Tyndall'sche Versuchsform sonst beibehalten, aber man kann sie auch umkehren, wodurch die Erscheinung meines Erachtens noch übersichtlicher wird. Den letzteren Fall angenommen, verfahre man etwa so. Man bestreiche Schreibpapier auf seiner einen Seite mit einer Auflösung von Kobaltchlorid, während man auf die andere einige Stückchen gedachten Goldpapieres klebt. Noch besser aber ist statt des letzteren echtes Blattgold, welches man so anheftet, dass man zuvor Eiweiss aufträgt, dann jenes darüber deckt und endlich das nicht Haftende wieder entfernt. Am besten sind markirte Formen, wie Quadrate, Dreiecke oder Kreuze, welche die beabsichtigte Wirkung am besten in die Augen fallen lassen und so, wie eben angegeben, auch leicht herstellbar sind. Wirkt auf die belegte Fläche alsdann ein glühender Stab oder eine seitlich brennende Leuchtgasflamme, so färbt sich die bestrichene Fläche sofort blau dort, wo das Papier keine Belegungen hat, während an den übrigen Stellen die fast weisse Farbe des Anstriches erhalten bleibt, und selbst, wenn sich die Entfernung von der Wärmequelle nach Centimetern bemisst. Noch einen anderen Vortheil bietet die Anwendung des Kobaltchlorids, nämlich, dass dasselbe Papierstück immer wieder für spätere Versuche dienen kann, da jene blaue Färbung bekanntlich nur eine vorübergehende ist, während der Quecksilberjodidanstrich, wenn einmal gelb geworden, seine gelbe Farbe beibehält.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1883. ANNALEN № 12[b].
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XX.

I. *Ueber die Electricitätsleitung der Gase; von W. Hittorf.*

Vierte Mittheilung.[1])

(Hierzu Taf. VI.)

§ 1. Nachweis der Stetigkeit der Ströme, welche von der Bunsen'schen Chromsäurekette in den Gasen erhalten werden und für diese Mittheilung benutzt sind.

1. An die Spitze meiner vorigen Mittheilung habe ich den experimentellen Beweis gestellt, dass der Durchgang der Electricität durch gasförmige Medien bei Benutzung einer genügenden Zahl geeigneter galvanischer Elemente ebenso stationär und stetig erhalten werden kann, wie er im Schliessungsbogen, der nur aus metallischen und electrolytischen Leitern besteht, schon bei der kleinsten electromotorischen Kraft ist. Dieselbe charakteristische Thatsache, die Unveränderlichkeit der Spannungsdifferenz zweier Querschnitte, welche für letztern das Ohm'sche Gesetz statuirt und R. Kohlrausch[2]) mit Hülfe des Condensators einst nachwies, konnte ich bei der sogenannten Glimmentladung, welche meine Tauchbatterie in den Gasen erzeugt, mit Condensatoren von sehr verschiedener Capacität darthun. Werden nämlich die metallischen Electroden, welche die Gasstrecke begrenzen, mit den beiden Belegen eines Condensators leitend verbunden, so ladet sich derselbe mit ihrem Spannungsunterschiede und beharrt in diesem Zustande, vorausgesetzt, dass das Leitungsvermögen des übrigen Schliessungsbogens nicht unter einem gewissen Grenzwerthe liegt. Trennt

1) Erste Mittheilung: Pogg. Ann. 136. p. 1. u. p. 197. 1869. Zweite Mittheilung: Jubelbd. p. 430. 1874. Dritte Mittheilung. Wied. Ann. 7. p. 553. 1879.

2) R. Kohlrausch, Pogg. Ann. 78. p. 1. 1849.

man während des Durchganges der Electricität die Belege von den Electroden und schliesst sie unter Aufnahme eines geeigneten Galvanometers in sich, so zeigt die Constanz des ersten Ausschlagwinkels die Unveränderlichkeit der Ladung und der Spannungsdifferenz.

2. Da die Mittel, welche früher zur Hervorbringung electrischer Funken benutzt und bekannt waren: die Reibung, die Influenz, die Induction, das Gewitter, dieselben nur von kurzer Dauer erzeugen, so bestand in der Wissenschaft das Vorurtheil des täglichen Lebens: das Momentane des Blitzes sei ein nothwendiges und wesentliches Attribut der Gasentladung, während in der Wirklichkeit nur die Armuth dieser Quellen dasselbe verschuldet. Hervorragende Forscher hatten sich für jene so irrige Auffassung erklärt, nachdem Gassiot mit einer vielpaarigen galvanischen Kette zuerst nur discontinuirliche Entladungen in den verdünnten Gasen erhalten hatte.[1])

Ich habe diese Ansicht nie getheilt, sondern aus der Thatsache, dass der Davy'sche Lichtbogen, der eine so grosse Stromstärke in Anspruch nimmt, Stetigkeit besitzt, letztere um so mehr von der schwachen Glimmentladung erwartet, wenn die ergiebigste Quelle der Electricität, der chemische Process, zweckmässig für dieselbe benutzt wird. Diese Erwartung bestimmte mich, trotz der so ungünstigen Lage, in welcher ich meine Experimentaluntersuchungen ausführen muss, die Mühe nicht zu scheuen, und mir eine passende vielpaarige Kette zu verschaffen.

3. Obgleich obiger Beweis jeden Zweifel, dass der Strom meiner Tauchbatterie in den Gasen, solange seine Intensität nicht unter einen gewissen Grenzwerth sinkt, stetig ist, ausschliesst, so ist es mir doch nicht gelungen, alle Physiker, die mit mir dieses Gebiet bearbeiten, von der Richtigkeit der Thatsache zu überzeugen.[2]) Ebenso wird ihre Wichtig-

1) Das Nähere enthält meine dritte Mittheilung p. 554 u. f.

2) Die zustimmenden „Versuche über die Glimmentladung“ aus dem Helmholtz'schen Laboratorium von H. Hertz Wied. Ann. **19**. p. 782. 1883 erschienen, als die Abfassung vorliegender Mittheilung bereits so gut wie abgeschlossen war.

keit noch vielfach verkannt. Und doch muss dieselbe sogleich einleuchten, wenn man bedenkt, dass durch die Stetigkeit des Stromes die Möglichkeit gegeben ist, die Verhältnisse des electrischen Funkens auf demselben Wege und ebenso vollständig zu erforschen, wie dies für das electrische Verhalten der Metalle und Electrolyte durch Benutzung der grossen Entdeckung Volta's unserem Jahrhunderte gelang.

Die Schlüsse meiner vorigen und dieser Mittheilung haben die Stetigkeit der benutzten Gasströme zur Voraussetzung und würden hinfällig, wenn dieselbe nicht begründet wäre. Es muss daher zunächst meine Aufgabe sein, alle mir bekannt gewordenen Zweifel bezüglich dieses Punktes zu beseitigen.

4. E. Wiedemann[1]) bemühte sich, zu zeigen, dass die Stetigkeit des Bildes, welches die durch den Strom m einer galvanischen Kette leuchtend gewordene Gasstrecke im rotirenden Spiegel gibt, welche ebenfalls von mir als Beleg angeführt wurde, eine scheinbare sein könne und daher die Stetigkeit der Entladung nicht beweise. Bei seiner Rechnung setzt er diejenige Stromstärke voraus, welche ich als die grösste, die meine Elemente, hintereinander verbunden, liefern können, angegeben hatte. Solche starken Ströme sind aber niemals von mir bei den Versuchen mit dem rotirenden Spiegel angewendet worden. Sie würden die Aluminiumelectroden sogleich geschmolzen und die Haarröhrchen gesprengt haben. Die Intensität kann tausendmal geringer sein, und der Durchgang des galvanischen Stromes gibt bereits ganz stetige Bilder.[2]) Ausserdem habe ich ausdrücklich bemerkt, dass nur eine unvollkommene Vorrichtung mir zur Verfügung gewesen, und dass die Zahl der Spiegelrotationen nicht viel über 100 in der Secunde gesteigert werden konnte. Ich stützte daher meine Ueberzeugung von der Stetigkeit noch auf zwei andere Argumente, von welchen die Constanz der Ladungen des Condensators, als das wichtigere, ausführlich erörtert wurde.[3]) E. Wiedemann lässt aber diesen Beweis

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 244. 1880.
2) Vergleiche meine dritte Mittheilung p. 563.
3) Dritte Mittheilung p. 565 u. f.

ganz unberücksichtigt. Er glaubt, die galvanische Kette, selbst wenn sie vollkommen continuirliche Entladungen liefere, sei für die spectroskopische Untersuchung nicht verwendbar.[1])

5. Wie der Durchgang des galvanischen Stromes durch die Gase aus einer überaus grossen Zahl sehr kurz dauernder Partialentladungen, die durch kleine, aber endliche Zeiträume von einander getrennt sind, stets bestehen soll, so wird auch dem durch einmaliges Oeffnen des primären Stromes entstehenden Inductionsstrome, welcher von mir in den Versuchen der ersten Mittheilung durch die Gase geleitet wurde, dieser Charakter beigelegt. Ich halte diese Auffassung ebenfalls für unrichtig. Das Bild im rotirenden Spiegel, welches das beim Durchgang des einzelnen Inductionsstromes leuchtend gewordene Gas erzeugt, ist ein vollkommen stetiger Streifen. Darin stimmen die Beobachter überein, welche diesen Versuch, zum Theil mit sehr grossen Rotationsgeschwindigkeiten ausgeführt haben. Hierzu kommt, dass der Inductionsstrom zwischen mehreren nebeneinander liegenden und mit besonderen Electroden ausgestatteten Gasstrecken, sobald sie hinreichend verdünnt sind, sich verzweigen kann, ein Verhalten, welches mir in meiner ersten Mittheilung die Messungen ermöglichte, und welches nur stetige Ströme besitzen.

6. In vollständigem Gegensatze zu meinen Angaben stehen die Erfahrungen, welche Warren de la Rue und Müller über den Charakter der galvanischen Entladungen durch verdünnte Gase gemacht haben. Im zweiten Theile ihrer Experimentaluntersuchungen über die electrischen Entladungen der Chlorsilberbatterie[2]) fast am Schlusse (p. 230) sagen sie nämlich: „These results therefore confirm the conclusion already arrived at from other experiments, namely, that the discharge in vacuum tubes is intermittent.“

Sie hatten auf den Rath Maxwell's, um über die Stetigkeit des Stromes ein Urtheil zu gewinnen, ein Tele-

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 245. 1880.
2) De la Rue u. Müller, Phil. Trans. 1878.

phon in die Leitung aufgenommen und dieses bei der durch Widerstände verzögerten Entladung eines Condensators durch das verdünnte Gas immer, auch dann, wenn die Schichtungen ganz stetig erschienen, rauschend gefunden. Jener Aufsatz von De la Rue und Müller ist bereits vor meiner dritten Mittheilung erschienen, war mir aber zur Zeit, wo ich letztere abfasste, unbekannt. Die Verfasser hatten mir vom ersten Theile einen Abdruck gütigst zugesendet, und ich hatte denselben damals[1]) berücksichtigt. Da bald nachher eine Krankheit mich über ein Jahr zur Unthätigkeit und zum Ortswechsel zwang, so erhielt ich von jenem zweiten Theile erst sehr spät Kenntniss. Die meisten Versuche meiner dritten Mittheilung sind in den Jahren 1876 und 1877 angestellt; sie stammen aus einer Zeit, wo mir Bell's grosse Erfindung, das Telephon, unbekannt war. Seit der Wiederaufnahme meiner electrischen Studien habe ich stets zwei Siemens'sche Telephone, bei denen bekanntlich die vibrirende Platte von beiden Polen des Magnetes beeinflusst und sehr empfindlich ist, mit grossem Nutzen verwendet. Sie bestätigten mir aber vollständig den Schluss, zu welchem das Verhalten des Condensators geführt. In allen Fällen, wo der angehängte Condensator beim Durchgange des galvanischen Stromes durch die verdünnten Gase constant geladen und ruhig bleibt, ist auch das Telephon absolut still, es mag im Schliessungsbogen der Kette oder in den die Belege des Condensators mit den Electroden der Gasstrecke verbindenden Leitern aufgenommen sein. Entladet der Condensator sich unter dem früher beschriebenen Geräusch, so wird dasselbe vom Telephon in der letztgenannten Stellung in gleichem Rythmus wiedergegeben. Ist der galvanische Gasstrom durch Einschaltung grosser Widerstände discontinuirlich und der Condensator abgehängt, so gibt das Telephon im Schliessungsbogen bestimmte Töne. Ihre Schwingungszahl fällt mit derjenigen der Partialentladungen der Kette zusammen und ist meist sehr gross. Das Telephon pfeift nicht selten oder gibt das Gesumme einer Mücke. Ist endlich der Strom

1) Hittorf, Dritte Mittheilung. p. 600.

nicht discontinuirlich, sondern blos in der Intensität wechselnd, stellt der Magnet des Galvanometers sich nicht scharf ein, sondern schwankt innerhalb gewisser Grenzen unregelmässig hin und her, so rauscht und knarrt das Telephon, gibt aber keine bestimmten Töne.

7. Telephon und Condensator stehen in Bezug auf Empfindlichkeit sich ganz gleich. Um jedoch Täuschungen bei Benutzung so feiner Hülfsmittel zu verhindern, muss man stets darauf bedacht sein, die galvanische Kette selbst in vollkommener Ordnung zu halten, und darf keine schlechten Verbindungen in derselben dulden. Jede mangelhafte Contactstelle, die so leicht bei der grossen Zahl von Elementen vorkommt, lässt den Strom veränderlich werden und bringt Telephon und Condensator in Unruhe. Die sämmtlichen Kohlen meiner Kette sind an den Verbindungsstellen, wie schon früher erwähnt, galvanisch verkupfert und dann verzinnt und stehen durch angelöthete Kupferdrähte mit den ebenfalls am oberen Ende verzinnten Zinkdrähten in bester leitender Verbindung. Dennoch stellen sich zuweilen mangelhafte Berührungen ein, nämlich, wenn die Kohlen feine Risse haben. Dann zieht sich die Lösung durch Capillarwirkung manchmal bis zum Kupferüberzuge in ihnen hinauf und löst denselben. Man erkennt solche Fehler sogleich, wenn man die Gasstrecke ausschaltet und die Kette blos durch die Widerstandssäule und das Telephon schliesst: das Geräusch des letzteren zeigt dieselben an. Die mangelhafte Contactstelle verräth sich meist durch ein Fünkchen, welches hier entsteht, wenn durch Ausschluss des Widerstandes ein starker Strom in der Kette veranlasst wird.

8. Nach der vielfachen Benutzung darf ich die Bunsen'sche Tauchbatterie ebenso warm empfehlen und als die praktischste aller jetzt vorhandenen galvanischen Combinationen für die Untersuchung der Gasleitung erklären, wie ich einst für das Silbervoltameter Poggendorff's, als das beste Hülfsmittel zur quantitativen Bestimmung der Electrolyse, auf Grund meiner Erfahrungen eingetreten bin.[1]) Nur wenn

1) Hittorf, Pogg. Ann. 98. p. 3. 1856.

die Kette als Tauchbatterie eingerichtet ist, lässt sich der gute Zustand in jedem der vielen Elemente conserviren. Die Spannungsdifferenz, welche diese Kette auf ihren unverbundenen Polen besitzt und die so bequem durch den Condensator bestimmt wird, bleibt noch nach längerer Benutzung derselben Lösung constant. Der Gehalt an freier Chromsäure muss bereits sehr vermindert sein, damit der erste Ausschlag kleiner wird. Auch die Constanz der stetigen Ströme in den Gasen ist meist befriedigend, da gewöhnlich grosse Widerstände in die Bahn aufgenommen und daher geringe Intensitäten benutzt werden. Erst wenn letztere gross sein müssen, ist diese Constanz nicht mehr erreichbar, da der relativ geringe Gehalt an Chromsäure dann den Bedarf des Stromes an der Oberfläche der Kohle nicht mehr deckt.

Seit der Abfassung meiner dritten Mittheilung habe ich die Zahl der Elemente auf 2400 vermehrt, von welchen 2000 Stück 30 cm hohe Cylindergefässe zur Aufnahme der Lösung besitzen.

9. Ausser den genannten Fehlern in der Kette kann die eingeschaltete Widerstandssäule[1]) Rauschen des Telephons verursachen. Uebersteigt nämlich die Stromdichte in derselben eine gewisse Grenze, so leitet die Lösung des Jodcadmiums in Amylalkohol nicht mehr blos electrolytisch, sondern es treten in derselben auf der Bahn des Stromes zahlreiche äusserst feine Gasbläschen auf, welche aus Zersetzungsproducten des Amylalkohols bestehen und schön grün phosphoresciren. Bei diesem Vorgange, über den ich, wie über das Gesammtverhalten der Jodcadmiumlösung bald eine besondere Abhandlung veröffentlichen werde, schwankt die Intensität des Stromes sehr, und Messungen werden unmöglich. Er wird einfach vermieden, indem man der Säule einen grösseren Querschnitt gibt, wenn die Stärke des Stromes nicht geändert werden darf.

10. Anstatt des Telephons habe ich in die Verbindungsdrähte des Condensators mit den Electroden der Gasstrecke auch mehrmals ein empfindliches Electrodynamometer auf-

1) Hittorf, vgl. die dritte Mittheilung. p. 559.

genommen. Dasselbe ist absolut ruhig, wenn der Strom stetig und der Condensator unverändert geladen bleibt. Starke Ablenkungen treten dagegen durch die alternirenden Ströme ein, wenn Entladungen des Condensators statthaben.

Sollte jemand durch das geschilderte Verhalten des Condensators, des Telephons und des Electrodynamometers von der Continuität des Gasstromes noch nicht überzeugt worden sein, so verweise ich denselben auf den folgenden Paragraph, welcher ein noch schlagenderes Argument für dieselbe bringen wird.

§ 2. Benutzung des Condensators und Galvanometers zur Bestimmung von Spannungsdifferenzen.

11. Der Condensator hat mir nicht nur dazu gedient, die Stetigkeit des Gasstromes unzweifelhaft festzustellen; viel wichtiger wird derselbe dadurch, dass er so bequem, schnell und genau die Spannungsdifferenz zweier Querschnitte der Gasstrecke zu bestimmen gestattet. Obgleich ein halbes Jahrhundert verflossen ist, seit Faraday in der dritten Reihe seiner Experimentaluntersuchungen (1833) den Condensator in Verbindung mit dem Galvanometer zuerst zur Messung der Electricitätsmenge gebrauchte, so ist doch diese Methode immer nur auf einzelne Untersuchungen beschränkt geblieben und nicht in allgemeine Verwendung gekommen. Sie eignet sich aber, besser wie irgend eine andere zur Messung der Spannungsdifferenzen von beliebiger Grösse, wenn dieselben in stationären Strömen, also bei reichen Electricitätsquellen auftreten. Denn es lässt sich alsdann dem Condensator jede beliebige Empfindlichkeit ertheilen; er wird für die Messung der schwächsten, wie der stärksten electromotorischen Kräfte gleich geeignet, da man Grösse und Dicke seines Dielectricums denselben anpassen kann.

12. Für die Versuche der dritten Mittheilung gebrauchte ich einen Condensator, dessen Dielectricum wohlgetrocknetes, mit Paraffin getränktes Papier war. Nachdem ich später in dem Hartgummi (Ebonit) einen schlechteren festen Leiter (den schlechtesten, den ich bis jetzt gefunden) erkannt, habe ich von letzterem 19 Platten, 0,6 mm dick und 60 × 40 cm gross,

zwischen Stanniolbelegen, deren wirkende Fläche 50 × 30 cm beträgt, als Condensator benutzt. Sie liegen zwischen zwei starken Brettern isolirt und sind durch kräftige Schrauben zusammengepresst. Bei jener Dicke widerstehen sie der Spannungsdifferenz sämmtlicher Elemente (2400) und zeichnen sich vortheilhaft vor anderen Isolatoren dadurch aus, dass sie nicht hygroskopisch sind.[1])

13. Für die Messung der Ladungen dieses Condensators diente mir stets ein Meyerstein-Meissner'sches Galvanometer aus 18900 Windungen und einem Widerstande von 3582 S.-E., welches in der Folge als Galvanometer I bezeichnet wird. Sein einfacher Magnet blieb der vollen Richtkraft der Erde unterworfen. Neben seinem Drahte war eine Säule der Lösung von JCd in Amylalkohol, deren Durchmesser 10 mm, deren Länge 80 cm betrug, und welche einen Widerstand von ungefähr 3,000000 S.-E. besass, in den Schliessungsbogen aufgenommen.

14. Eine einfache Vorrichtung, welche Fig. 1 darstellt, gestattete, rasch die Belege des Condensators abwechselnd mit den Querschnitten der Strombahn, deren Spannungsdifferenz bestimmt werden sollte, und mit den Enden jenes Schliessungsbogens in leitende Verbindung zu setzen. In einer Ebonitplatte sind nämlich vier mit Quecksilber gefüllte Gruben, von denen zwei (*ab*) stets mit den beiden Querschnitten der Strombahn, zwei (*cd*) mit dem Schliessungsbogen durch Kupferdrähte communiciren. Zwischen denselben befindet sich eine bewegliche kleinere Ebonitplatte (*A*), welche als Wippe dient. An ihren Längsseiten sind Kupferstreifen befestigt, deren Enden $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ bei passender Neigung in die benachbarten Quecksilbernäpfchen tauchen. In die Mitte dieser Streifen sind zwei dicke Kupferdrähte (*e* und *f*) eingeschraubt, welche durch biegsame Drähte mit den Belegen des Condensators verbunden bleiben und, in Ebonitlagern liegend, die Drehaxe der Wippe abgeben.

1) Die gefirnissten Gläser, welche ich früher als Isolatoren meiner Apparate gebraucht habe, wurden später sämmtlich durch Gegenstände von Ebonit ersetzt. Dadurch erzielte ich in meinen im Erdgeschoss liegenden Arbeitsräumen eine weit bessere Isolation.

15. Ein Daniell'sches Element, welches aus einer *U*-Röhre ohne Diaphragma construirt war und als Flüssigkeiten concentrirte Lösungen von $ZnSO_4$ und $CuSO_4$, sowie als Metalle amalgamirtes Zink und Kupfer besass, gibt obigem Condensator eine Ladung, welche den Ausschlag von 11,8 mm an dem Galvanometer I erzeugt. Die Ladung eines Elementes meiner Tauchbatterie bringt den Ausschlag von 22,2 mm hervor. Wird gemäss neueren Bestimmungen[1]) jener Daniell gleich 1,06 Volt gesetzt, so beträgt die electromotorische Kraft meines Elementes nahezu 2 Volt.

Die grosse Zahl von Elementen, welche für die Bildung des Gasstromes nöthig ist, gibt obigem Condensator Ladungen, deren Ausschläge weit über den Bereich der Meterscale hinausgehen. Daher war der Draht des Galvanometers I bei diesen Bestimmungen von einem passend gewählten Neusilberdrahte, welcher neben der JCdlösung den Schliessungsbogen bildete, abgezweigt. Ich habe mich oft überzeugt, dass die Ausschläge, welche so erhalten werden, genau proportional mit der Zahl der Elemente, die zur Ladung benutzt sind, sich verhalten. 200 Elemente geben so als ersten Ausschlag 66 mm. Ein Ausschlag von 100 mm entspricht demnach einer Spannungsdifferenz von 303 meiner Elemente oder von 606 Volt.

16. Um alles, was auf die Messungen Bezug hat, an einer Stelle zu vereinigen, füge ich hier hinzu, wie die Stromintensitäten aus den Ablenkungen der von mir benutzten Galvanometer in diejenigen, deren Einheit das Ampère ist, umgerechnet wurden. Durch das Silbervoltameter bestimmte ich nämlich für drei Ströme verschiedener Intensität die Menge des Silbers, welches sie in einer Stunde abschieden; sie verzweigten sich hierbei zwischen dem Drahte des Galvanometers I und denjenigen Längen des 1,1 mm dicken Platindrahtes eines Rheostaten, welche bei den Messungen später benutzt wurden. Die Veränderungen, welche während der Dauer jeder Messung der magnetische Meridian erfuhr, wurden an einem zweiten Magnet beobachtet und die Ablenkungen des Galvanometers von denselben unabhängig ge-

1) v. Beetz, Leitfaden der Physik. 7. Aufl. p. 175. 1883.

macht. Mit F. Kohlrausch[1]) ist angenommen, dass ein Ampère in der Minute 0,0678 g Ag reducirt. Da der Spiegel des Galvanometers 4300 mm von der Scala entfernt war, so durften die Stromstärken proportional den Ablenkungen (in mm der Meterscale) gesetzt werden.

Tabelle I.

Die Stromstärke $i \cdot 10^6$ beträgt in Ampère Einheiten,

wenn die Ablenkung 1 mm ist am:			und der Galvanometerdraht abzweigt von:
Galv. I	Galv. II	Galv. III	
—	10000	—	einem Kupferdraht (*a*)
—	6831	—	einem Kupferdraht (*b*)
—	1436	—	einem Platindraht (4 mm Durchmesser)
1518	217	—	2 × 2 cm } Rheostatdraht
889	127	—	2 × 4 „ } (1,1 mm
285	40,7	—	2 × 14 „ } Durchmesser)
19,2	—	17,94	1 S.-E.
9,6	—	8,97	2 „
4,8	—	3,59	5 „
2,4	—	1,794	10 „
1,21	—	0,897	20 „
0,484	—	0,359	50 „
0,24	—	0,1797	100 „
0,124	—	0,0952	200 „
0,0543	—	0,0448	500 „
0,0305	—	0,0282	1000 „
0,0185	—	0,0197	2000 „
0,0114	—	0,01486	5000 „
0,00665	—	0,003 85	unverzweigt

Wenn das Galvanometer I zur Bestimmung der Ladung des Condensators diente, musste ein anderes Galvanometer für die Messung der Stärke des Gasstromes benutzt werden. Als solches gebrauchte ich in den meisten Fällen ein älteres Weber'sches mit dickem Kupferdraht und einer kleinen Zahl von Windungen. Es wird als Galvanometer II bezeichnet. Wenn bei schwachen Strömen seine Empfindlichkeit nicht genügte, wurde ein Galvanometer III substituirt,

1) F. Kohlrausch, prakt. Physik. IV. Aufl. p. 299.

das 10300 Windungen dünnen Kupferdrahtes von 1440 S.-E. Widerstand besass und aus der festen Rolle meines Electrodynamometers hergerichtet war. In der Tabelle I sind die Intensitäten der Ströme, welche Ablenkungen von 1 mm an den genannten Galvanometern hervorbringen, wenn sie sich zwischen dem Drahte derselben und den dort angegebenen und später benutzten Drähten verzweigen, übersichtlich zusammengestellt.

17. Vermittelst der Zahlen, welche Nr. 15 enthält, lässt sich sogleich die Spannungsdifferenz der Electroden einer vom stetigen Strome durchflossenen Gasstrecke aus dem Ausschlage des Condensators erkennen und mit derjenigen, welche die benutzte Zahl galvanischer Elemente im ungeschlossenen Zustande besitzt, vergleichen. Dadurch ergibt sich, dass stets nur ein Theil, unter Umständen blos ein kleiner Bruchtheil der gesammten electromotorischen Kraft der Kette für jenen Vorgang in Anspruch genommen ist. Die Leiter, welche neben der Gasstrecke die Bahn abgeben, benutzen, wie kaum bemerkt zu werden braucht, den Rest, damit der gewonnene Strom in ihnen besteht. Bei dieser Vergleichung muss natürlich berücksichtigt werden, dass die electromotorische Kraft der geschlossenen Kette, insbesondere wenn die Lösung bereits lange benutzt wurde, stets etwas kleiner ist, als sie im offenen Zustande erscheint.

18. Die schwachen Electricitätsquellen, welche früher zum Studium des electrischen Verhaltens der Gase dienten, gestatteten, da sie keine stetigen Ströme liefern, nur diejenigen Spannungsdifferenzen zu bestimmen, welche die Leiter unmittelbar vor dem Auftreten des Funkens besitzen, welche also zur Einleitung der Entladung in der zwischenliegenden Gasschicht nöthig werden. Diese sind aber von jenen wesentlich verschieden, stets und nicht selten beträchtlich grösser und von Verhältnissen abhängig, welche auf jene keinen Einfluss mehr haben. Die vielen Experimentaluntersuchungen, welche bis in die neueste Zeit den Zusammenhang zwischen Schlagweite und Spannungsdifferenz der Leiter ergründen wollten, sind sämmtlich ohne allgemeines Resultat geblieben. Die Gesetzmässigkeit und Formel, welche der eine Physiker

fand, erwiesen sich dem anderen als mehr oder weniger unrichtig, weil sie nur den in den betreffenden Versuchen benutzten Gestalten und Dimensionen der Electroden angehören und bei Aenderung letzterer sich ebenfalls ändern.

Es bestehen viel grössere Aussichten, allgemeine Gesetze zu erkennen, wenn wir die Spannungsdifferenzen, welche während des stetigen Stromes vorhanden sind, aufsuchen. Diese sind so gut wie unabhängig von der Gestalt und den Dimensionen der Leiter; bei derselben Dichte in derselben Gasstrecke liefern dann kugelförmige und spitze Electroden fast die nämlichen Zahlen, während die Spannungen, welche zur Einleitung der Entladung nöthig sind, bekanntlich sehr von einander abweichen.

19. Nimmt man nur soviel Elemente, dass ihre Spannungsdifferenz wenig grösser, als diejenige ist, welche die Electroden der gegebenen Gasstrecke während des stetigen Stromes annehmen, so findet der Durchgang des Stromes nicht von selbst statt, auch wenn der äussere Schliessungsbogen nur aus der Gasstrecke und ihren unumgänglich nöthigen Metallelectroden besteht. Je nachdem eben letztere eine verschiedene Gestalt haben, z. B. Kugeln, Scheiben oder Spitzen sind, wird die Zahl der Elemente, welche hinzuzufügen sind, grösser oder kleiner.

Es gibt jedoch ein einfaches Mittel, das Herschel zuerst anwandte, durch welches man den Durchgang des Stromes bei einer Elementenzahl, deren Spannungsdifferenz wenig die unumgänglich nöthige überschreitet, veranlassen kann. Man bewirkt nämlich durch eine andere Quelle von grösserer Spannung den momentanen Durchgang der Electricität durch die Gasstrecke, während ihre Electroden mit den Polen jener Elemente in Verbindung stehen. Sind die Gasmolecüle durch ersteren momentan in den leitenden Zustand gebracht, so können die galvanischen Elemente denselben unterhalten und lassen den Strom fortdauern. Die geringste Unterbrechung hebt ihn aber sogleich auf; man muss, um ihn herzustellen, denselben Kunstgriff wiederholen.

Es kann wohl nicht einfacher und überzeugender dargethan werden, dass ein solcher Durchgang

des galvanischen Stromes durch Gase keine Summe von Partialentladungen ist, die durch kleine endliche Zeiträume von einander getrennt sind, und bei denen die Gasmolecüle abwechselnd den leitenden und nichtleitenden Zustand annehmen!

Für den genannten Zweck benutze ich gewöhnlich als Electricitätsquelle die Holtz'sche Maschine und lade damit die bekannte Doppelflasche derselben. Letztere erhält als Schliessungsbogen ein Funkenmikrometer und die bezügliche Gasstrecke. Während die Maschine gedreht wird, variire ich den Abstand der Kugeln des Mikrometers, bis bei den Funkenübergängen solche Spannungen auf den Electroden der Gasstrecke sich bilden, dass, trotzdem gleichzeitig die Leitung durch die galvanische Kette besteht, dennoch ein theilweiser Durchgang durch das Gas erfolgt. Die galvanischen Elemente lassen dann denselben stetig fortdauern, und die Drehung der Holtz'schen Maschine wird eingehalten. Um den Durchgang starker Ströme einzuleiten, musste manchmal die kleine Doppelflasche durch eine Flasche mit grösseren Belegen ersetzt werden, indem ein kräftigerer Funke nöthig war.

20. Damit kein Missverständniss aus der Beschreibung meiner Versuche entstehen kann, schicke ich ihr in der Fig. 2 eine Skizze der Anordnung voraus, welche gewöhnlich benutzt wurde. Der negative Strom der Tauchbatterie (A) geht, wie in der dritten Mittheilung, durch dieselben zwei Platindrähte eines Rheostaten (B), welche durch den Quecksilberschieber s auf eine der in den Tabellen I angegebenen Längen begrenzt waren. Von dem Rheostaten zweigt sich der Draht des Galvanometers II ab, welches zur Messung der Stromstärke dient. Aus dem Rheostaten gelangt der Strom in die Widerstandssäule (C), welche stets die Lösung von JCd in Amylalkohol ist und zwischen zwei amalgamirten Cadmiumplatten liegt. Von letzteren ist die obere verschiebbar und bildet die Anode. Auf die Widerstandsröhre folgt der Commutator (D). Er besteht aus einer Ebonitplatte mit vier Quecksilbergruben, von welchen α und β mit den Polen der Tauchbatterie communiciren, und zwar β durch

eine Drahtleitung, welche das Telephon I enthält. Die Gruben γ, δ stehen in Verbindung mit den Electroden der Gasstrecke (*F*). Durch abwechselndes Einsetzen zweier Ebonitstücke, von welchen das eine (*D*) zwei parallele, das andere (*D'*) zwei gekreuzte Kupferdrähte besitzt, kann die Richtung des Stromes in der Gasstrecke umgekehrt werden.

Von den Electroden der Gasstrecke führen zwei Drähte, eine Widerstandssäule (*J*) und das Telephon II (*E'*) zu den Quecksilbernäpfchen (*a b*) der in Nr. 14 beschriebenen Wippe (*K*), welche mit den Belegen des Condensators (*L*) stets communicirt. Die beiden anderen Näpfchen der Wippe (*cd*) vermitteln die Entladung des Condensators durch die Jodcadmiumlösung (*M*) und den Neusilberdraht (*N*). Von letzterem zweigt sich der Draht des Galvanometers I ab, welches durch seinen ersten Ausschlag die Grösse der Ladung bestimmt.

Die Electroden der Gasstrecke stehen ausserdem mit den Kugeln eines gewöhnlichen Funkenmikrometers (*G*) und denjenigen der Doppelflasche (*H*) einer Holtz'sche Maschine in leitendem Zusammenhange.

§ 3. Erörterung der Bedingungen, unter denen der galvanische Gasstrom stetig ist, und der Condensator seine Ladung behält.

21. Während in einem metallischen und in einem polarisationsfreien electrolytischen Leiter die kleinste Spannungsdifferenz einen electrischen Strom unterhält, darf letztere für eine Gasstrecke von niederer Temperatur, soll der Durchgang der Electricität erfolgen, nicht unter einer gewissen Grösse liegen. Solange sie kleiner ist, sind die kalten Gase vollkommene Isolatoren. Nichts ist weniger begründet, als die noch immer von vielen Physikern geglaubte Annahme Coulomb's, dass eine solche schwache Ladung eines Leiters durch Zerstreuung in die umgebende Luft allmählich entweiche. In der Wirklichkeit ist der Verlust stets durch die Leitung zur Erde, welche der Träger entweder auf seiner Oberfläche durch die Wasserhaut oder im Innern gestattet, bedingt.

Ich habe bereits in § 6 meiner vorigen Mittheilung die Belege für letztere Behauptung zusammengestellt.

22. Bezüglich der dort angeführten Thatsache, dass der Dampf des Quecksilbers, solange seine Temperatur die Glühhitze nicht überschreitet, sich wie die gewöhnlichen Gase verhält, versuchte der seitdem verstorbene Physiker Herwig den fehlerhaften Versuch, aus welchem er das Gegentheil gefolgert hatte, zu vertheidigen und das negative Resultat, welches bei meiner Anordnung erhalten wird, durch Wasserstoffgas, welches hier dem Dampfe des Metalles beigemengt bleibe, zu erklären.[1]) Wenn man das Quecksilber in dem Gefässe in lebhaftem Sieden erhält, werden jedoch in der Nähe seiner Oberfläche, in welcher die Drahtenden sich befanden, alle Theilchen des Gases, welches ursprünglich hier vorhanden ist, durch den fortwährend sich bildenden Dampf verdrängt und ersetzt. Dass ausserdem die Gegenwart eines nichtleitenden Gases die Leitungsfähigkeit eines leitenden nicht aufhebt, wie Herwig statuirt, zeigen die Versuche mit der Bunsen'schen Flamme, welche ich in meiner ersten und zweiten Mittheilung beschrieben habe. Der Dampf des Kaliums, welcher der Flamme mitgetheilt wird, erhöht das Leitungsvermögen der Gasstrecke, welche zwischen den eingetauchten Platinösen liegt, um mehr als das Zweihundertfache. Das ist ganz unmöglich, wenn Herwig's Annahme begründet wäre. Wir haben hier analoge Verhältnisse, wie bei der Electrolyse der Salzlösungen, bei welcher die schlechtleitenden, fast isolirenden Wassertheilchen die Fortpflanzung des Stromes durch die Salztheilchen nicht verhindern. Vertauscht man in der Flamme den Dampf des Kaliums gegen denjenigen des Quecksilbers, bringt man statt des Salzes des erstgenannten Metalles ein solches des Quecksilbers hinein, so ist die Ablenkung des Galvanometers viel kleiner. Weit schlechter leitet daher der Dampf des Quecksilbers in der Temperatur der Bunsen'schen Flamme.

Die Thatsache, dass der Quecksilberdampf unterhalb der Glühhitze ein Isolator ist, wurde seit der Veröffentlichung meiner dritten Mittheilung von zwei Seiten bestätigt.

Maxwell hat nämlich meinen Versuch mit demselben

1) Herwig, Wied. Ann. 9. p. 77. 1880.

Resultate wiederholt, indem er ihn so modificirte, dass der eine Draht in das flüssige Quecksilber tauchte, während das Ende des anderen in der Nähe seiner Oberfläche im Dampfe lag.[1]) Ferner hat Blake im Laboratorium von Helmholtz festgestellt, dass der Dampf, den eine electrisirte Schicht von Wasser und von Quecksilber bei lebhafter Verdunstung aus ihrer Oberfläche entwickelt, keine Spur Electricität an eine parallele, in der Nähe befindliche Metallplatte, auf welcher er sich condensirte, und welche mit einem sehr empfindlichen Thomson'schen Electrometer in leitender Verbindung stand, übertrug.[2])

23. Zu jener im Anfange dieses Paragraphen erwähnten Bedingung, damit der Durchgang der Electricität durch eine Gasstrecke von niederer Temperatur erfolge, kommt, wenn derselbe stetig sein soll, eine zweite hinzu, nämlich, dass das Leitungsvermögen des übrigen Schliessungsbogens der Spannungsdifferenz, welche die Gasstrecke demselben übrig lässt, eine Stromintensität hervorzubringen gestattet, bei welcher die von den electrisch erregten Gasmolecülen an ihre Umgebung einseitig verlorene Energie in der nämlichen Zeit denselben zugeführt wird. Die metallischen und electrolytischen Molecüle haben durch ihre stets bestehenden Bewegungsverhältnisse und durch ihre Constitution immer Leitungsvermögen. Den Gasmolecülen dagegen muss solches erst ertheilt und, nachdem es entstanden, unterhalten werden. Denn dieser neue Zustand der Gasmolecüle verschwindet sogleich, sowie der Strom unterbrochen wird, und in diesem Zustande geben dieselben an ihre Umgebung durch Leitung und Strahlung mehr Energie ab, als sie durch die stets vorhandenen Wärmebewegungen von dort erhalten. Ist daher auch für die gegebene Gasstrecke die nöthige Spannungsdifferenz vorhanden, findet aber keine genügende Zufuhr von Energie statt, so bildet sich kein stationäres Gleichgewicht zwischen Verlust und Gewinn; der Strom im Gase wird nicht stetig, sondern besteht aus einer grossen Zahl von Partialentladungen, welche durch kleine aber endliche Zeiträume voneinander getrennt

1) Maxwell, An Elementary Treatise on Electricity p. 115. 1881.

2) Blake, Wied. Ann. 19. p. 518. 1883.

sind. Es dient für diese Entladungen in erster Linie diejenige Electricität, welche an der Oberfläche sämmtlicher Leiter die Polarisation des umgebenden Dielectricums, meistentheils also der Luft, bewirkt und daher derjenigen des Condensators entspricht.

24. Erst mit einer gewissen Intensität erscheint daher der Strom in den Gasen unter gewöhnlichen Verhältnissen stetig und bleibt stetig, wenn sie zunimmt.

Dieser Grenzwerth der Intensität lässt sich im Versuche scharf erkennen. Solange nämlich Partialentladungen bestehen, tönt das im Schliessungsbogen der Kette aufgenommene Telephon und gibt in der Schwingungszahl seines Tones den Rythmus derselben wieder. Das Bild, welches das leuchtende Gas im rotirenden Spiegel erzeugt, ist, wenn das Licht durch einen schmalen der Rotationsaxe parallelen Spalt gegangen, ein Gitter. Endlich erscheint dann die Entladung in der Röhre unruhig und wird durch die Influenz eines genäherten Leiters im Aussehen stark verändert.

Sowie der Strom stetig geworden, ist das Telephon still; das Bild im rotirenden Spiegel wird ein ununterbrochen leuchtender Bogen, und die Ablenkung durch Influenz findet nicht mehr statt. Die Intensität, bei welcher der Durchgang der Electricität stetig wird, ist abhängig von der Dichte des Gases und nimmt mit letzterer zu. So waren bei der Spannkraft des Stickstoffes von 0,4 mm Quecksilber bereits Ströme von 0,00008 Ampère stetig (s. Tabelle X_a). Bei 4,4 mm Druck nahmen sie bei 0,0002 Ampère (Tabelle VIII_a) und bei 15,3 mm erst bei 0,0008 Ampère (Tabelle XXVII) Stetigkeit an.

Wir werden im § 8 finden, dass es die Verhältnisse des negativen Glimmlichtes sind, welche in den verdünnten Gasen die Stetigkeit erst mit einer gewissen Intensität dem Strome gestatten. Haben wir dieselben dort im Versuche entfernt und unschädlich gemacht, so erscheinen die allerschwächsten Gasströme bereits stetig.

25. Werden mit den Electroden der Gasstrecke die Belege eines Condensators leitend verbunden, so verhält sich derselbe folgendermassen. Solange der Strom unstetig ist,

ladet und entladet der Condensator sich in langsamerem oder schnellerem Rythmus, je nach der Grösse seiner Capacität und der Zufuhr von Electricität. Anstatt des Lichtes der schwachen, sich rasch folgenden Partialentladungen tritt nun in der Glasröhre in langsamerer Folge dasjenige der Entladungen des Condensators auf, welches bei grösserer Capacität desselben bekanntlich ganz verschieden von ersterem sein kann. Ist in den Verbindungsdrähten des Condensators ein Telephon aufgenommen, so secundirt dasselbe das Geräusch der raschen Entladung, welches die Veränderung im Dielectricum des Condensators erzeugt.[1])

Wenn die Verbindung der Belege des Condensators mit den Electroden der Gasstrecke durch die besten Leiter, durch kurze Metalldrähte, bewirkt ist, so hören die Entladungen desselben in vielen Fällen ohne weiteres nicht auf, wenn diejenige Intensität des Stromes eingetreten ist, welcher vollkommene Stetigkeit entspricht. Um die Ladung des Condensators alsdann beständig zu machen, musste ich, wie in der dritten Mittheilung (p. 570) angegeben, die Stärke des Stromes weit über diese Grenze steigern. Dies geschah am einfachsten, indem die Länge der eingeschalteten Widerstandssäule allmählich verkürzt wurde, bis das Ziel erreicht, also Condensator wie Telephon stille geworden war. Nachdem dieser Zustand eingetreten, erhielt er sich auch für bedeutend schwächere Intensitäten, wenn letztere ohne Unterbrechung des Stromes hergestellt wurden, was wiederum durch Hinaufbewegen der Cadmiumplatte in der Jodcadmiumlösung sich einfach erreichen liess.

Diese Methode, welche ich zuerst fand, hat den grossen

1) G. Wiedemann ist in der dritten Auflage seiner schätzbaren Lehre von der Electricität (2. p. 106) geneigt, das Geräusch meines Condensators aus den electrostatischen Anziehungen der Belege abzuleiten. Beachtet man jedoch, dass die weichen Stanniolblätter und die dielectrischen Platten durch Schrauben möglichst stark zusammen gepresst liegen, und dass jedes Blatt mit Ausnahme der beiden äusseren zwischen zwei entgegengesetzt electrischen Blättern sich befindet, also nach entgegengesetzten Richtungen in jedem Punkte nahezu gleichstark gezogen wird, so dürfte diese Erklärung den Verhältnissen, wie sie hier bestehen, nicht entsprechen.

Uebelstand, dass man den Strom manchmal, bevor die Entladungen des Condensators aufhören, bis zu einer Intensität steigern muss, bei welcher die Kathode der Gasstrecke, wenn ihr Metall nicht strengflüssig ist, durch die bedeutende Temperatur, welche das Glimmlicht annimmt, schmilzt oder jedenfalls auf der Oberfläche stark verändert wird.

Ich habe daher später dieses Verfahren nicht mehr angewendet, nachdem ich ein viel besseres gefunden, welches bereits in der Skizze der Versuchsanordnung Fig. 2 berücksichtigt wurde. In die Verbindung des Condensators mit den Electroden der Gasstrecke wird nämlich ein leicht zu verändernder Widerstand aufgenommen. Ich benutze eine Säule jener Lösung von Jodcadmium in Amylalkohol zwischen amalgamirten Cadmiumplatten, welche einen Durchmesser von 10 mm hat. Berührt die bewegliche Cadmiumplatte die feste, so ist die Leitung metallisch und möglichst gut. Zieht man erstere in die Höhe, so lässt sich dieselbe innerhalb weiter Grenzen beliebig verschlechtern und die Entladung des Condensators verzögern.

Bei Benutzung dieser einfachen Vorrichtung macht man dieselbe Erfahrung, die oben besprochen ist. Dauern nämlich bei metallischer Verbindung des Condensators mit den Gaselectroden die Entladungen desselben fort, nachdem längst der Strom der Kette diejenige Intensität erreicht hat, bei welcher ohne Condensator Stetigkeit besteht, so zieht man die Cadmiumplatte langsam in die Höhe: bei einer gewissen Länge der Säule werden die Entladungen aufhören. Nachdem dieser Zustand eingetreten, kann man den Widerstand wieder vermindern und die Cadmiumplatte meistens bis zur Berührung der anderen herablassen, also beste metallische Verbindung herstellen, ohne dass die Entladungen wiederkehren.

Dies gelingt aber nicht in allen Fällen, und zwar im allgemeinen dann nicht, wenn die Intensität des Stromes sich derjenigen nähert, bei welcher Unstetigkeit eintritt. Dann darf die Jodcadmiumlösung nicht unter eine gewisse Länge verkürzt werden, wenn die Ladung des Condensators sich erhalten und bestimmbar werden soll. Man kann sich leicht

durch den Versuch überzeugen, dass die Grösse der Condensatorladung, der Theorie entsprechend, vollkommen unabhängig ist von der Grösse des Widerstandes, den die leitenden Verbindungen der Belege mit den Gaselectroden besitzen.

26. Ein stetiger Strom von derselben Intensität lässt sich in einer Gasstrecke, wie in den Metallen und Electrolyten in der verschiedensten Weise gewinnen. Man kann die Zahl der Elemente über die kleinste, welche nöthig ist, hinaus beliebig wählen, wenn nur in den Schliessungsbogen ein Widerstand von passender Grösse hinzugefügt wird. Wie nun auch die bestimmte Stromintensität hervorgebracht ist, derselben entspricht in jeder Hinsicht der nämliche Zustand der Gasmolecüle. Das Gas zeigt sowohl um die Electroden, wie zwischen denselben dasselbe Licht und Ansehen; ebenso erhält der Condensator dieselbe Ladung: Die Electroden besitzen also dieselbe Spannungsdifferenz.

27. Zu den Versuchen dieser Mittheilung benutzte ich meistens als Gas Stickstoff, während früher Wasserstoff mit Vorliebe verwendet wurde. Die Verhältnisse, welche uns beschäftigen, sind zwar allen Gasen gemeinsam und von der chemischen Natur derselben unabhängig. Der Stickstoff hat aber vor dem Wasserstoff den Vorzug, dass er von den Metallen, welche als Kathoden benutzt werden müssen, in geringerem Maasse occludirt wird. Ich habe die Luft in den meisten Fällen vermieden, weil der Sauerstoffgehalt bei den Erwärmungen, die der Strom erzeugt, die Electroden oxydiren und durch die schlechten Leiter, welche er in den Oxyden auf der Oberfläche erzeugt, stören kann. Die Gewinnung des Stickstoffes ist sehr bequem. Eine mit zwei Glashähnen an den Enden versehene und an der Quecksilberpumpe befestigte Glasröhre enthielt auf einem Porcellanschiffchen weissen Phosphor. Durch Erhitzen desselben wird das zwischen den geschlossenen Hähnen befindliche Luftvolumen leicht von seinem Sauerstoff befreit. Durch Oeffnen des Hahnes, welcher der Pumpe zunächst liegt, tritt der Stickstoff in die bereits evacuirten, für den Versuch bestimmten Röhren. Um eine neue Quantität Stickstoff zu

gewinnen, schliesst man diesen Hahn, öffnet den anderen, welcher Luft eintreten lässt, und wiederholt den angegebenen Vorgang.

§ 4. Die Spannungsdifferenz zweier Querschnitte des Gases im sogenannten positiven Theile der Strombahn ist unabhängig von der Intensität des stetigen Stromes, vorausgesetzt, dass die Art der Leitung ungeändert bleibt.

28. Ich beginne mit einer Reihe von Versuchen, welche den Leser sogleich mitten in die Sache führen und das beim Durchgange des electrischen Stromes charakteristische Verhalten der Gase in den Hauptzügen darlegen. Daran wird sich die Erörterung der Einzelheiten am besten anknüpfen lassen und durch diesen Zusammenhang Uebersichtlichkeit und Interesse bewahren.

Eine cylindrische Glasröhre[1]) vom Durchmesser $5^1/_2$ cm und der Länge von 437 mm (Fig. 3) hatte als Electroden, die in der Axe lagen, zwei Aluminiumdrähte (*a* und *c*) von 2 mm Dicke. Die Länge der Anode (*a*) war 2 cm, diejenige der Kathode (*c*) 7 cm. Ausserdem waren fünf dünnere Aluminiumdrähte ($^1/_2$ mm dick) senkrecht gegen die Axe eingekittet. Ihre Abstände von einander sind in der Figur angegeben. Um je zwei dieser sieben Drähte beim stetigen Durchgange des Stromes rasch nach einander mit den Belegen des Condensators leitend verbinden und die Spannungsdifferenz derselben bestimmen zu können, communicirten sie durch Kupferdrähte mit Quecksilbergruben, welche in einer quadratischen Ebonitplatte (Fig. 3a) gebohrt waren. Der Buchstabe, welchen jedes Näpfchen trägt, ist derjenige des Aluminiumdrahtes der Glasröhre, mit welchem er leitend verbunden war. Die Näpfchen *m* und *n* communiciren durch Kupferdrähte und die Säule JCdlösung mit den Näpfchen *a* und *b* der beschriebenen Wippe (Fig. 2). Um die Spannungen zweier der sieben Aluminiumdrähte den Belegen des Condensators mitzutheilen, brauchten blos ihre Quecksilbergruben durch zwei Kupferdrähte, von welchen jeder an einem

1) Die Glasgefässe, welche in dieser Mittheilung beschrieben werden, stammen aus der Werkstätte von Fr. Müller (Dr. Geissler's Nachfolger) in Bonn.

Ebonitstücke befestigt war, mit den Näpfchen *m* und *n* verbunden zu werden. Neben der Gasstrecke mit den Electroden *ac* war eine Säule Jodcadmiumlösung von 17 mm Durchmesser in den Schliessungsbogen der Tauchbatterie aufgenommen. Eine Länge derselben von 100 mm besass einen Widerstand von ungefähr 129 000 S.-E. Dadurch, dass man die Zahl der galvanischen Elemente und die Länge der Widerstandssäule variirte, entstanden stetige Ströme in der Gasstrecke, deren Intensitäten bis zum Verhältniss von 1:46 gesteigert wurden.

Tabelle II.

Spannkraft des Stickstoffes 0,6 mm.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.	4.
Zahl der Elemente	500	500	500	600
Länge in mm der JCd-Lösung (17 mm)	708	200	100	100
Abl. des Galv. II abgezweigt, von 2 × 14 cm Rheost.)	6	20	32—31	79—77
Mittlere Stromstärke i. 10^6 (A.-E.)	244	814	1282	3175
Erster Ausschlag des Galv. I von der Ladung des Condensators.				
1. durch die Spannungsdiff. *ac* (Electr.)	133	132	133,5	141,5
2. „ „ „ *ab*	22	22,5	22	21,5
3. „ „ „ *bd*	14	13	13	12
4. „ „ „ *de*	13	13	13	14
5. „ „ „ *ae*	52	50	49	47
6. „ „ „ *fg*	—	2,25	3	4

Nr. des Versuches	5.	6.	7.	8.
Zahl der Elemente	700	800	900	1000
Länge in mm der JCd-Lösung (17 mm)	100	100	100	100
Abl. des Galv. II abgezweigt, von 2 × 14 cm Rheost.)	128-127	177-167	217-215	280-270
Mittlere Stromstärke i. 10^6 (A.-E.)	5189	7000	8791	11192
Erster Ausschlag des Galv. I von der Ladung des Condensators				
1. durch die Spannungsdiff. *ac* (Electr.)	150	157	165	178
2. „ „ „ *ab*	21	21	21	21
3. „ „ „ *bd*	12,5	12	12	12,25
4. „ „ „ *de*	14	13,5	12	12,5
5. „ „ „ *ae*	47	47	47	47
6. „ „ „ *fg*	3,75	4	3,25	3

Das Galvanometer II, dessen Draht von 2 × 14 cm Rheost. abzweigte, mass die Stromstärken. Die Tabelle II (p. 727) gibt die gewonnenen Zahlen übersichtlich wieder.

Zur Erläuterung der Tabelle mögen die folgenden Bemerkungen dienen. Die aufgeführten Zahlen sind directe Ergebnisse des Versuches. Es sind keine Mittelzahlen, da jeder Versuch nur einmal angestellt wurde. Die Dauer des Stromes während desselben war ungefähr 5 Minuten. Wären die von mir benutzten Galvanometer mit stärkerer Dämpfung ausgestattet gewesen, so würde eine kürzere Zeit genügt haben. Die Aenderung, welche die Stromstärke während jener Dauer erleidet, ist in der Tabelle jedesmal angegeben. Bei der Umrechnung in Ampère-Einheiten wurde der Mittelwerth benutzt.

Im Versuche Nr. 1 erfolgte der Durchgang des Stromes nicht von selbst, sondern bedurfte der Hülfe des Funkens der Doppelflasche. Es bedeckte zuerst einige Augenblicke das blaue Glimmlicht die ganze Oberfläche des negativen Drahtes (7 cm), und das positive Licht reichte nur bis zum Drahte *e*, sodass hier schon der dunkle Raum begann. Dieser Zustand, dem eine grössere Ablenkung des Galvanometers II entsprach, dauerte nur kurze Zeit. Das Glimmlicht verkürzte sich auf die Länge von ungefähr $1^1/_2$ cm, während das positive Licht sich bis zum Drahte *f* ausdehnte. Dieser Zustand war beständig, und ihm gehören die Zahlen der Tabelle an.

Bei den anderen Stromintensitäten endigte das positive Licht stets vor dem Drahte *f*. Mit der Zunahme der Stromstärke wuchs selbstverständlich Licht- und Wärmeentwickelung. Im Versuche Nr. 2 bedeckte das Glimmlicht etwa 6 cm und von Nr. 3 an die ganze Oberfläche der Kathode. Beide Ströme Nr. 2 und 3 und ebenso Nr. 4 mussten noch durch den Funken eingeleitet werden. Als die Zahl der Elemente 700 geworden, fand der Durchgang von selbst statt.

In den drei ersten Versuchen hatte das Glimmlicht dieselbe Dicke. Von Nr. 4 an, wo die Kathode demselben keine weitere Ausdehnung gestattete, wuchs es immer mehr mit der Zunahme der Stromstärke in der Dicke und fluthete in den

Versuchen Nr. 7 und 8 durch den ganzen Raum zwischen Kathode und Glaswand. Gleichzeitig vergrösserte sich die Spannungsdifferenz der Electroden *ac*, welche in den drei ersten Versuchen so gut wie constant geblieben war.

Wie die Zahlen der Tabelle lehren, wachsen mit der Stromstärke jetzt aber nur die Spannungsdifferenzen der Electroden *ac*; diejenigen der verschiedenen Strecken des positiven Lichtes bleiben so gut wie constant. Die Spannungsdifferenz der Strecke *ae* ist stets nahezu die Summe derjenigen von *ab*, *bd*, *de*.

Die Strecken *bd* und *de*, welche in der Länge fast gleich waren, haben auch nahezu gleiche Spannungsdifferenzen, während die Strecke *ab*, welche den positiven Metalldraht *a* mit seinem Lichte enthält, obgleich sie an Länge kleiner ist, eine grössere Spannungsdifferenz besitzt. Die Drähte *fg* lagen in allen Versuchen im sogenannten dunklen Raume, der sich vor dem negativen Glimmlicht findet. Die Gastheilchen zwischen denselben blieben stets dunkel. Diesem Zustande in der Strecke *fg* entsprach bei gleicher Länge eine drei- bis viermal kleinere Spannungsdifferenz, wie den leuchtenden *bd* und *de* zukommt.

In allen Versuchen blieb die Röhre durch einen Hahn geschlossen. Das Gas derselben zeigte am Schlusse dieselbe Spannkraft, wie am Anfange. Die Kathode hatte nicht merklich occludirte Gase abgegeben; sie war vorher schon oft für andere Ströme benutzt worden.

29. Das Verhalten der Gasstrecke, welche den sogenannten positiven Theil des Stromes bildet, tritt deutlich in der Tabelle hervor. Während bei einem metallischen und electrolytischen Leiter die Spannungsdifferenz zweier Querschnitte proportional mit der Stromstärke wächst, bleibt sie in dem Gase, wenn seine Dichte keine Aenderung erfährt, constant. Wollte man für den positiven Theil der Gasstrecke bei den verschiedenen Stromstärken die Länge eines Drahtes substituiren, ohne dass die Intensität des Stromes eine Aenderung erfährt, so müsste dieselbe letzterer umgekehrt proportional genommen werden.

Wir können daher auch sagen: Das Leitungsver-

mögen der positiven Gasstrecke nimmt proportional der Stromstärke zu, wenn seine Dichte ungeändert bleibt.

Die Spannungsdifferenz der Electroden *ac* zeigt diese Constanz nicht. Da dieselbe aus der Summe der Spannungen aller Querschnitte sich zusammensetzt, da ferner diejenigen im positiven Theile unverändert bleiben, so kommen die für die Electroden *ac* gefundenen Verschiedenheiten blos auf Rechnung des negativen Glimmlichtes. Wir können erst später näher hierauf eingehen, wenn wir in den §§ 5, 6, 7 ein grösseres Versuchsmaterial über das negative Glimmlicht gesammelt haben.

Es verdienen noch die Veränderungen, welche das positive Licht in der Umgebung der Drähte *b*, *d*, *e* in dem Augenblick erfährt, wo letztere mit den Belegen des Condensators verbunden werden, erwähnt zu werden. Dann zeigt sich nämlich an dem Drahte, welcher für den Strom nach dem Condensator als Kathode dient, eine dunkle Schicht, wie beim Glimmlicht; das helle positive Licht wird scheinbar abgestossen. Sowie die Ladung des Condensators vollzogen ist, tritt das positive Licht zurück und nimmt das gewöhnliche Ansehen wieder an.

30. Die Spannungsdifferenz derselben Strecke des positiven Theiles der Strombahn nimmt mit der Dichte des Gases stetig ab. Um dies festzustellen, wurde die Spannkraft des Stickstoffes in der Glasröhre, Fig. 3, auf 0,2 mm erniedrigt. Die Tabelle III (p. 731) enthält die gefundenen Zahlen.

Die Tabelle bedarf zum Verständniss nach den eingehenden Erörterungen der vorigen nur weniger Bemerkungen. Solange die Zahl der Elemente unter 500 blieb, musste der Durchgang des Stromes durch den Funken der Doppelflasche eingeleitet werden. Das positive Licht reichte in allen Versuchen nahe bis an den Draht *f*. Nur beim stärksten Strom (Nr. 6) endigte es schon in der Mitte von *ef*. Das negative Glimmlicht bedeckte schon in Nr. 2 die ganze Kathode und wächst von da an mit der Stromstärke in der Dicke. Es fluthete in Nr. 4 bereits bis zur Glaswand und reichte in

Nr. 6 bis zur Mitte von *gf*. Die gleichzeitige Zunahme der Spannungsdifferenz der Electroden *ac* tritt deutlich hervor.

Tabelle III.

Spannkraft des Stickstoffes 0,2 mm.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Zahl der Elemente	360	400	500	500	600	800
Länge in mm der JCd-Lösung (17 mm Durchm.)	708	708	708	100	100	100
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost.)	5	10,5-10	20	58—56	90—87	155-135
Mittlere Stromstärke i. 10⁶ (A.-E.)	203	418	814	2320	3602	5900
Erster Ausschlag des Galv. I von der Ladung des Condensators						
1. durch die Spannungsdiff. *ac* (Electr.)	94,5	96	101	123,5	138,5	167,5
2. " " " *ab*	13,5	14	14	13	14	13
3. " " " *bd*	4	4	4,75	4,5	4	4
4. " " " *de*	4	4	4	4,25	4	4
5. " " " *ae*	—	25	25	24	23	22
6. " " " *fg*	1,5	1	1	unbestimmbar		

Das Gas war dreimal dünner, wie in der vorigen Versuchsreihe. Dieser Abnahme in der Dichte entspricht eine nahezu proportionale Abnahme der Spannungsdifferenz auf den Strecken *bd*, *de* des positiven Lichtes. Für die Strecke *ab*, welche das Metall der Anode enthält, besteht diese Beziehung nicht. Hier bleibt die Spannungsdifferenz grösser.

31. Um das Verhalten des positiven Lichtes bei noch weiterer Abnahme der Gasdichte zu verfolgen, war die Röhre Fig. 3 nicht geeignet. Der Zwischenraum zwischen Kathode und Glaswand ist nämlich in derselben zu klein und die Kathode zu kurz. Die Spannungsdifferenz wird hier bei grösseren Verdünnungen für das negative Glimmlicht so bedeutend, dass Unstetigkeit des Stromes eintritt, und Gegenströme in sehr störender Weise sich geltend machen. Bei den Messungen, welche in § 9 meiner vorigen Mittheilung aufgeführt sind, waren die benutzten Röhren mit diesem Fehler bezüglich der Beschaffenheit der Kathode behaftet. Ich habe die Zahlen daher später, weil sie zum Theil unrichtig waren, zurückgenommen.[1])

1) Hittorf, Wied. Ann. 8. p. 671. 1879.

In noch höherem Grade, wie bei Benutzung der galvanischen Kette, machen sich diese Gegenströme, auf welche schon Plücker auf-

Es wurde die Röhre gegen eine andere (Fig. 4) vertauscht, welche aus zwei verschieden weiten Theilen bestand. Der für das positive Licht bestimmte hatte den Durchmesser 4 cm, während derjenige, welcher die Kathode enthielt, 12 cm weit war. In der Axe liegende, eingeschmolzene Platindrähte dienten hier als Electroden; die negative war 15 cm, die positive 3 cm lang. Es waren nur zwei Platindrähte (*b d*) als Sonden senkrecht gegen die Axe für die Untersuchung des positiven Lichtes eingeschmolzen.

War dieses grosse Glasgefäss an meiner Quecksilberpumpe befestigt, so sank die Spannkraft des Gases, welches in demselben und in den bis zum Haupthahne der Pumpe reichenden Verbindungsröhren enthalten war, nachdem es in das durch Herablassen des Quecksilbers entstandene Vacuum durch Oeffnung jenes Hahnes sich ausgedehnt hatte, jedesmal im Verhältniss von 1:0,7103. Durch zweimaliges Herablassen wurden Spannkraft und Dichte des Gases nahezu auf die Hälfte gebracht ($0,7103^2 = 0,5045$). Solange die Quecksilbersäule des Manometers eine directe Bestimmung der Spannkraft mit dem Kathetometer gestattete, wurde sie gemacht. Die noch kleineren benutzten Spannkräfte wurden aber aus jenem Verhältniss berechnet. Es sind die so bestimmten Spannkräfte als unsicher durch ein Fragezeichen unterschieden. Es werden nämlich aus dem negativen Drahte und von der Oberfläche des Glases Gastheilchen vom Strome frei gemacht und lassen die Voraussetzung, welche der Rechnung zu Grunde liegt, nicht bestehen. Man erkennt diese Gase auch an der Aenderung der Farbe, mit welcher der Inhalt der Röhre bei den grössten Verdünnungen leuchtet. Statt des gelbrothen positiven und des blauen negativen Lichtes des Stickstoffes tritt dann weisses Licht auf, welches neben Linien des ersten Spectrums des NN solche von HH, CO und Hg zeigt.

merksam gemacht hat, geltend, wenn man bei den grossen Verdünnungen, welche die Quecksilberpumpe gestattet, den Inductionsstrom des Ruhmkorff'schen Apparates, der so beträchtliche Spannungsdifferenzen erzeugen kann, benutzt. Meine Mitarbeiter, die sich dieser Electricitätsquelle allein bedienen, sind dadurch vielfach getäuscht und zu unhaltbaren Hypothesen veranlasst worden.

Tabelle IV.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.		9.		10.		11.		12.
Spannkraft des Stickstoffes in mm	0,700	0,35	0,175	0,088	0,044	0,022	0,011?	0,0055?		0,0029?		0,0014?		0,0007?		0,00035?
Zahl der Elemente	600	600	600	600	600	600	600	600	800	800	1000	1000	1200	1200	1400	2200
Länge in mm der JCd-lösung (17 mm weit)	100	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	400
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rh. abgezw.)	72—69	52—50	45—43	35—32	23—22	12	8	0	15	0	20	0	20	0	27	0
Mittl. Stromstärke i. 10^6 (in Ampère-Einheiten)	2870	2076	1791	1360	916	488	326	—	610	—	814	—	814	—	1100	—
Erster Ausschl. d. Galv. I von der Lad. des Cond. durch die Spannungsdifferenz																
1. *ac* (Elect.)	151	140	145	157	168	178	184	—	242	—	298	—	352	—	422	—
2. *ab*	21	15	12	9,5	8	7	7	—	7	—	8	—	8,5	—	8,75	—
3. *bd*	30	19	12	8	5	4,25	4	—	4	—	3,75	—	2,5	—	2,25	—
4. *ad*	51	34	24	17,5	13	11,25	11	—	11,5	—	12	—	11,5	—	10,5	—

Die Tabelle IV vereinigt die mit dieser Röhre gewonnenen Zahlen. In jedem Versuche wurde die Dichte des Gases durch zweimaliges Herablassen des Quecksilbers nahezu auf die Hälfte derjenigen, die im vorangehenden bestanden hatte, gebracht.

Im Versuche Nr. 1 war die Dichte des Stickstoffes wenig grösser, wie bei den Bestimmungen der Tabelle II. Die Spannungsdifferenz der in das positive Licht tauchenden Drähte *bd* beträgt 30; da sie den Abstand 80 mm voneinander hatten, so würde für eine Strecke 43,3 mm, wie sie in der Röhre der Tabelle II bestand, die Spannungsdifferenz 16,3 gewesen sein. In den fünf ersten Versuchen erfolgte der Durchgang des galvanischen Stromes von selbst; in den anderen musste er durch den Funken der Doppelflasche eingeleitet werden.

Die Kathode war in allen Versuchen ganz mit Glimmlicht umgeben, das schon in Nr. 4 durch den ganzen Radius der weiten Röhre bis zur Glaswand fluthete. Bei den grösseren Verdünnungen hatte die Röhre das Ansehen, welches in der Figur 4_a skizzirt ist, in der die heller leuchtenden Theile durch Schraffirung von den weniger hellen unterschieden sind. Der positive Theil zeigte eine regelmässige Aufeinanderfolge von helleren und weniger hellen Schichten, deren Zahl sich mit der Verdünnung verminderte, indem die Länge jeder einzelnen Schicht wuchs. Bei den äussersten Verdünnungen war hier Schichtung nicht mehr vorhanden.

Aus den Zahlen der Tabelle IV ergibt sich das interessante Resultat, dass die Spannungsdifferenz der Querschnitte *bd* des positiven Lichtes mit der Dichte des Gases zwar abnimmt, aber langsamer, als letztere, und einem Grenzwerthe sich zu nähern scheint. Die Spannungsdifferenz der Strecke *ab*, welche das Metall der Anode enthält, hat schon in Nr. 5 ihren kleinsten Werth erreicht. Die Spannungsdifferenz der Drähte *ad* ist wieder stets die Summe von *ab* und *bd*. Die Spannungsdifferenz der Electroden *ac* nimmt rasch mit der Verdünnung zu, da die Kathode schon im Versuche Nr. 1 ganz mit Glimmlicht bedeckt ist und keine weitere Ausdehnung demselben gestattet. Zuletzt genügte

die electromotorische Kraft meiner sämmtlichen Elemente nicht mehr, um den vom Funken eingeleiteten Durchgang der Electricität fortzusetzen.

32. Würde man die Röhre um die Kathode noch weiter, die Kathode selbst noch länger nehmen, so würde der stetige Durchgang des Stromes, wie § 6 zeigen wird, mit meiner Elementenzahl noch bei grösserer Verdünnung erreichbar sein. Um in dieser Art die Versuche noch weiter auszudehnen, müsste man aber auch, sollen dieselben nicht zu zeitraubend werden, dem Behälter der Quecksilberpumpe einen entsprechend grösseren Inhalt geben. Ich erwarte aber von einer solchen Fortsetzung dieser Versuche kein wesentlich anderes Resultat, als in der Tabelle IV enthalten ist. Die Spannungsdifferenz der leuchtenden positiven Strombahn kann sich nicht bis ins Unendliche mit fortschreitender Verdünnung vermindern, sie muss einen Minimalwerth in diesen Versuchen schon deshalb erreichen, weil kein Mittel bekannt ist, um den Dampf des Quecksilbers aus der Röhre auszuschliessen. Wie bereits in meiner ersten Mittheilung (p. 31) ausgesprochen wurde, sind wir von der Herstellung eines absoluten Vacuums noch weit entfernt. Das Spectrum des electrischen Lichtes, welches die verdünntesten Röhren liefern, lehrt, dass dasselbe der Phosphorescenz der Gase NN, HH, CO, Hg entstammt. Diese bleiben daher noch immer die alleinigen Träger des Stromes und ich glaube nicht, dass wir berechtigt sind, mit Edlund hier dem hypothetischen Aether die Fortpflanzung des Stromes zu übertragen. Da wir im Versuche höchstens einen nur mit Quecksilberdampf gefüllten Raum gewinnen, so können wir nicht entscheiden, wie sich das absolute Vacuum gegen die Electricität verhält.

Dasselbe suchte einst H. Davy[1]) durch Substitution eines schwerflüchtigen und leichtflüssigen Metalles, des Zinns anstatt des Quecksilbers, zu erreichen. Er erhielt aber in Röhren mit ausgekochtem Quecksilber grössere Verdünnungen, wie in denjenigen mit Zinn. Die Ursache erkannte er richtig in der Luft, welche das Metall stets occludirt und beim Erwärmen theilweise abgibt.

1) H. Davy, Phil. Trans. 1822. p. 64.

33. Die Bestimmungen der Tabelle IV sind ganz im Einklange mit dem Resultate, zu welchem ich § 3 meiner ersten Mittheilung bei Benutzung des Inductionsstromes gelangte. Die grossen Spannungen, welche bei den äussersten Verdünnungen die Electricität besitzen muss, damit der Durchgang durch engere Röhren erfolgt, sind allein durch die Verhältnisse des negativen Glimmlichtes bedingt. Für die Bildung des positiven Lichtes wird ein um so kleinerer Bruchtheil der gesammten Spannungsdifferenz verwendet, je weniger dicht das Gas ist. Die Spannungsdifferenz der 12 cm langen leuchtenden Strecke *ad*, welche dem Condensator die Ladung 10,5 gemäss Tabelle IV zuletzt ertheilte, besitzen, wie Nr. 15 lehrt, 32 Elemente meiner Tauchbatterie. Wir werden § 8 finden, dass wirklich eine solche Zahl von Elementen in dieser verdünnten Strecke einen stetigen Strom und Leuchten des Gases gibt, wenn wir das Hinderniss an der Kathode zu entfernen gelernt haben.

34. Führt man die Bestimmungen, welche die Tabellen II und III enthalten, bei grösseren Dichten der Gase in der $5^1/_2$ cm weiten cylindrischen Röhre (Fig. 3) aus, so begegnet man Verhältnissen, welche jene Constanz der Spannungsdifferenz auf der positiven Bahn verhindern. Es wird nämlich dann der Zustand der Gastheilchen mit der Stärke des benutzten Stromes ein wesentlich anderer. Dieselbe Gasstrecke bleibt bei schwachem Strome dunkel und wird erst bei stärkerem leuchtend. Im ersteren Falle nimmt sie aber eine beträchtlich kleinere Spannungsdifferenz in Anspruch, wie in letzterem. Diese wichtige Thatsache ist uns schon bei der Strecke *fg*, die stets im sogenannten dunklen Raume lag, begegnet. Je grösser die Gasdichte und je weiter die Röhre, desto mehr variirt mit der Stromstärke die Ausdehnung dieses dunklen Raumes oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Länge des positiven Lichtes, welches stets an der Anode beginnt. Die ganze Strecke, welche zwischen den Electroden liegt, kann bei hinreichend schwachem Strome dunkel bleiben, indem blos auf der Oberfläche der Anode positives Licht und um die Kathode Glimmlicht sich zeigen. Lässt man dann die Stromstärke wachsen, so dehnt sich das positive Licht von

der Anode weiter aus und füllt, je grösser erstere wird, eine desto längere Strecke der Röhre aus. Der dunkle Raum wird daher in demselben Maasse kleiner. Er verschwindet zuletzt bei genügender Intensität, sodass eine zusammenhängende Lichtmasse den ganzen Zwischenraum der Electroden füllt.

Aenderungen in der Länge des positiven Lichtes treten oft von selbst während der Dauer des Stromes ein und sind stets von Aenderungen der Spannungsdifferenz und der Stromstärke begleitet. Zwei Versuchsreihen mit Stickstoff von 1,5 und 3,95 mm Spannkraft, der in der Röhre Fig. 3 eingeschlossen war, sollen dieses Verhalten näher erläutern.

Tabelle V.

Spannkraft des Stickstoffes 1,5 mm.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Zahl der Elemente	700	800	900	900	1000	1200
Länge in mm der JCd-Lös. (17 mm weit)	100	100	100	708	100	100
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost. abgezweigt)	27	78-100	135-143	32	188-210	365-400
Mittlere Stromstärke $i \cdot 10^6$ (A.-E.)	1099	3622	5657	1302	8099	15568
Erster Ausschlag des Galv. I von der Ladung des Condensators						
1. durch die Spannungsdiff. *ac* (Electr.)	206,5	210-189	208-198	180	213-197	208-198
2. „ „ „ *ab*	34	33	33	38	35	33
3. „ „ „ *bd*	28	28	27	29	29	29
4. „ „ „ *de*	30	30	29	18	30	28
5. „ „ „ *fg*	5	8	9	6	10	8,5

Im Versuche Nr. 1 reichte, nachdem der Funke den Durchgang eingeleitet hatte, der positive Büschel bis in die Mitte der Strecke *ef*, und das Glimmlicht umgab 3 cm der Kathode.

Im Versuche Nr. 2 hatte zuerst, nachdem der Durchgang durch den Funken veranlasst war, das positive Licht dieselbe Länge, verkürzte sich aber alsdann allmählich bis zum Drahte *e*. In demselben Grade, als das positive Licht sich verkürzte, dehnte sich das blaue Glimmlicht weiter aus und bedeckte zuletzt die Kathode auf der ganzen Länge (7 cm). Mit dieser Aenderung parallel nahm die Ablenkung des Galvanometers II von 78 mm bis 100 mm stetig zu. Die

Spannungsdifferenz der Electroden *ac*, die anfangs gleich 210 gefunden war, betrug am Schlusse des Versuches blos 189.

Im Versuche Nr. 4 wurde der Strom der 900 Elemente, der in Nr. 3 das Galvanometer II bis 143 mm abgelenkt hatte, durch Verlängerung der Widerstandssäule auf 708 mm so geschwächt, dass die Ablenkung nur 32 mm betrug. Dadurch erhielt das Glimmlicht, welches in Nr. 3 den ganzen negativen Draht umhüllt hatte, nur die Länge 25 mm und der positive Büschel, der über die Mitte von *ef* sich erstreckt hatte, reichte nun eben über den Draht *d*. Die Strecke *de* wurde grösstentheils dunkel, und ihre Spannungsdifferenz sank auf 18. Der Durchgang des Stromes der 900 Elemente musste in beiden Fällen durch den Funken eingeleitet werden.

In Nr. 5, wo ebenfalls noch die Hülfe des Funkens nöthig war, reichte der positive Büschel anfangs fast bis *f* und verkürzte sich dann bis *e*. Gleichzeitig stieg die Stromstärke von 188 bis 210, und die Spannungsdifferenz der Electroden (*ac*) sank von 213 auf 197. Die Kathode blieb hier stets ganz mit Glimmlicht bedeckt.

Erst bei 1200 Elementen fand der Durchgang von selbst statt. Auch hier reichte das positive Licht anfangs bis *f* und verkürzte sich bis *e*, indem die Ablenkung des Galvanometers zunahm und die Spannungsdifferenz der Electroden abnahm, wie die Tabelle angibt.

36. Noch lehrreicher ist in Bezug auf diese Aenderungen die Versuchsreihe der Tabelle VI. (p. 739).

Der Strom der galvanischen Elemente musste stets durch den Funken eingeleitet werden. In Nr. 1—3 blieb das Gas der Röhre überall dunkel, nur an den Electroden leuchtete es. Die Anode *a* hatte auf der Oberfläche eine dünne Hülle positiven Lichtes. Der negative Draht zeigte blaues Glimmlicht, das in Nr. 1: 1 cm, in Nr. 2: 2 cm, in Nr. 3 etwa 3 cm desselben bedeckte. In Nr. 3 konnte man aber den Anfang einer Büschelbildung an der Anode wahrnehmen.

Infolge dieses Nichtleuchtens ist die Spannungsdifferenz der Strecken *bd*, *de* trotz der grösseren Dichte des Stickstoffes bedeutend kleiner wie in der Tabelle V.

In Nr. 4 reichte der positive Büschel eben über *b*. Da-

her steigt die Spannungsdifferenz der Strecke *bd* auf 25, während diejenige von *de* und *fg*, welche dunkel bleiben, unverändert sind. Das blaue Glimmlicht ist hier ungefähr 2 cm lang.

Tabelle VI.

Spannkraft des Stickstoffes 3,95 mm bei der Temp. 12° C.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Zahl der Elemente	700	700	700	800	900	1000	1200
Länge in mm der JCd-Lösung (17 mm weit)	390	200	100	100	100	100	100
Abl. d. Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost. abgezweigt)	38-34	47-53	57,5-60	60-62	69-70	87	136-150
Mittlere Stromst. $i.10^6$ (A.-E.)	1465	2035	2391	2483	2830	3541	5820
Erster Ausschlag des Galv. I von d. Ladung des Condens.							
1. durch d. Spannungsd *ac* (El.)	166-168	175-168	190-188	212-208	238-232	255	292-285
2. „ „ „ *ab*	—	—	—	—	63	60	79
3. „ „ „ *bd*	16,5	18	18,5	25	43	61	56,5
4. „ „ „ *de*	17,5	18	17	18	20	26	62
5. „ „ „ *fg*	10	10,5	11,5	12	13	13	12,5

In Nr. 5 erreicht der positive Büschel die Mitte von *bd*. Die Spannungsdifferenz der Strecke *ab* ist 63, diejenige von *bd* 43. Das Glimmlicht bedeckt 2 cm der Kathode.

In Nr. 6 füllt das positive Licht die ganze Strecke *ad* aus. Diejenige von *de* nimmt zu auf 26. Das blaue Glimmlicht war 25 mm lang.

In Nr. 7 reicht der positive Büschel bis zum Drahte *e*. Die Spannungsdifferenz erscheint auf der Strecke *de* grösser, wie auf *bd*. Diejenige der Strecke *ab*, welche das Metall der Anode einschliesst, wird sehr gross. Das blaue Glimmlicht war 35 mm lang.

37. Die Veränderungen im Zustande der Gastheilchen, welche die Constanz der Spannungsdifferenz zweier Querschnitte im positiven Stromtheile verhindern, lassen sich durch genügende Verkleinerung des Durchmessers der Röhre vermeiden. Ueberhaupt wird jene Constanz der Spannungsdifferenz blos da zu erwarten sein, wo man im Stande ist, die Dichte des Gases an jeder Stelle der Röhre trotz der Aenderung der Stromstärke unverändert zu erhalten. Da

mit der Stromstärke aber Wärmentwickelung und Ausdehnung des Gases variiren, so wird diese Bedingung nur dann bestehen, wenn auf jeden Theil des in der Röhre abgeschlossenen Gasvolumens die nämliche Stromdichte kommt. Man wird also nur eine Röhre, welche überall gleichen Querschnitt hat, nehmen und muss Sorge tragen, dass derselbe gleichmässig an allen Stellen vom Strome durchflossen ist. Aber selbst so wird diese Bedingung im absoluten Sinne nicht erfüllt sein. Denn einmal werden die Gasschichten in der Nähe der Wand und an der Anode stärker abgekühlt, wie diejenigen in der Mitte der Röhre. Sodann findet, was schlimmer ist, in der Glashülle um die Kathode eine viel grössere Wärmeentwickelung statt, wie in denjenigen Theilchen, welche mit positivem Lichte phosphoresciren.

38. Hierzu gesellt sich eine andere Schwierigkeit, die besonders störend wird, wenn man mit engen geschlossenen Glasröhren, wie hier nöthig ist, arbeitet, und auf welche ich schon in der vorigen Mittheilung die Aufmerksamkeit gelenkt habe. Die bedeutende Wärme des Glimmlichtes theilt sich nämlich dem Metall der Kathode mit und verändert den Gehalt desselben an occludirten Gasen. Meistens werden occludirte Gase frei, vermehren die Dichte in der Röhre und vermindern die Intensität des Stromes. Die Ablenkung des Galvanometers nimmt dann ununterbrochen ab, und der Strom unterbricht sich nicht selten selbst.

Es kann auch der umgekehrte Verlauf sich einstellen, dass die Kathode neue Gastheilchen occludirt, dadurch die Dichte vermindert und dann eine Zunahme der Stromstärke herbeiführt. Dieser Fall tritt gewöhnlich ein, wenn man die Kathode vorher im Vacuum erhitzt und den grösseren Theil ihrer occludirten Gase ausgetrieben hat. Da diese Verhältnisse mit jedem Wechsel der Stromstärke sich anders gestalten, so ist es nicht möglich, übereinstimmende Resultate zu gewinnen. Nichts hat mir bei dieser Untersuchung soviel Mühe gemacht und dieselbe so verzögert, als die genannte Schwierigkeit.

Vergebens habe ich alle brauchbaren Metalle und leitenden Substanzen als Kathoden durchprobirt. Die edlen,

wie die unedlen, die schwer- wie die leichtschmelzenden, die krystallinischen wie die nicht krystallinischen verhalten sich in dieser Hinsicht gleich. Graham hat in seiner bekannten Arbeit über die Occlusion der Gase nur edle Metalle und einige schwerflüssige, wie Kupfer und Eisen, berücksichtigt und gibt am Schlusse der Abhandlung[1]) an, dass die krystallinischen Metalle, wie Antimon, keine Gase enthalten. Aber dies ist nicht richtig. Auch beträgt die Menge der Gase, welche die Metalle occludiren, mehr als Graham bestimmte. Es ist mir nie gelungen, durch noch so langes Glühen im Vacuum ein Metall vollkommen von seinen occludirten Gasen zu befreien.

Dieses Verhalten, welches lange jede Bestimmung bei grösserer Dichte in engen Röhren vereitelte, habe ich zuletzt dadurch einigermassen unschädlich gemacht, dass ich das Volumen der Kathode gegenüber demjenigen der Röhre möglichst klein wählte. Die Kathode in den engen Röhren bildet ein Platindraht von 0,2 mm Durchmesser. Denselben noch dünner zu wählen, ist unpraktisch, weil dann das Platin zu rasch durch das heisse Glimmlicht auf die umgebende Glaswand als Dampf übergeht.

Bei Benutzung einer solchen geringen Masse für die Kathode tritt die hohe Temperatur in den berührenden Schichten des Glimmlichtes sehr deutlich hervor, indem schon bei schwachen Strömen das Platin zum Glühen kommt, während dasjenige der Anode die Temperatur wenig ändert. Selbst bei dieser kleinen Kathode macht das aus derselben austretende Gas noch Störungen, insbesondere wenn sie zuerst benutzt wird. Ich pflege sie einige Zeit durch den stärksten Strom, den ich anzuwenden beabsichtige, glühend zu erhalten, entferne die Gase durch die Pumpe und fülle für den eigentlichen Versuch das Röhrchen mit frischem Stickstoff.

39. Die Röhrchen, welche ich für dichtere Gase gebraucht habe, besassen die Einrichtung Fig. 5. Durch ein Capillarrohr und einen Dreiweghahn (D) liess sich ihr Inhalt mit der Quecksilberpumpe und einem Barometer B in

1) Graham, Pogg. Ann. **129**. p. 576. 1866.

Verbindung setzen, sowie in sich abschliessen. Das Barometer controlirte, ob die Spannkraft des Gases im Röhrchen durch den Strom eine Aenderung erfahren hatte.

In das senkrechte Capillarrohr war ein 0,2 mm dicker Platindraht (a) als Anode eingekittet. Der ebenso dünne negative Draht c wurde von einem dicken Silberdrahte (γ) gehalten, der eine dickwandige Glasröhre ausfüllte. Silberdraht und dickwandige Glasröhre waren mit feinem Siegellack eingekittet und wurden durch Wasser in dem Gefässe (δ) kalt gehalten. Damit das heisse Glimmlicht nicht mit dem Glase in Berührung kommen und störenden Natriumdampf bilden konnte, war ein dünnes Scheibchen Speckstein (s) eingeschoben. W. Siemens[1]) hat bekanntlich zuerst dieses Mineral für electrische Zwecke verwerthet. Es enthält keine Alkalien, lässt sich auf der Drehbank verarbeiten und ist ein sehr schlechter Leiter.

Zwei Paare 0,2 mm dicker Platindrähte bd und fg waren senkrecht gegen die Axe so eingeschmolzen, dass die inneren Enden jedes Paares nur einen Abstand von 1 mm hatten. Sie dienten hier als Sonden zur Bestimmung der Spannungsdifferenzen der Querschnitte des positiven Lichtes. Eine andere Verwendung werden sie später finden.

In dem Quecksilberbehälter, in welchem das Barometerrohr (B) stand, befanden sich noch zwei andere gleich weite Barometerröhren, welche ebenfalls mit der Pumpe communicirten. Von diesen war das eine möglichst leer gepumpt und durch einen Hahn abgeschlossen. Das Quecksilber des anderen stand unter dem Drucke des in der Versuchsröhre und der Pumpe enthaltenen Gases und machte letzteren bestimmbar.

Das Glasröhrchen für die Versuchsreihe, welche Tabelle VII zusammenfasst, hatte folgende Dimensionen: Durchesser 4,7 mm, Länge der Anode 5 mm, der Kathode 13 mm. Abstände ab: 23 mm, bf: 22 mm, fc: 45 mm.

Wenige Bemerkungen sind zur Erklärung der Tabelle nöthig. 1200 Elemente bewirkten ohne Hülfe des Funkens den Durchgang des Stromes; die kleinere Zahl bedurfte derselben.

1) W. Siemens, Pogg. Ann. **159.** p. 120. 1876.

Tabelle VII.

Spannkraft des Stickstoffes 6,85 mm.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Zahl der Elemente	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1100	1040	1100	1040
Länge in mm der JCd-Lösung (17 mm)	200	300	400	500	600	750	750	750	1480	1480
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rh.)	127—122	93—92	72	60—59	51	43	34	27	21	16
Mittl. Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	5067	3765	2930	2422	2076	1750	1384	1099	855	651
Erster Ausschl. des Galv I von der Ladung des Condensators										
1. durch d. Sp.-Diff. *bf*	48	50	49	47	47	47	48	49	46,5	46
2. „ „ „ *ab*		57	57	56	56	56	56	57	53	53
3. „ „ „ *af*		104	105	103	103	103	104	105	100	99
4. „ „ „ *ac* (El.)	272	255	252	248	245	243	240	238	225	225

Die Kathode war bei allen Stromstärken ganz mit Glimmlicht bedeckt. Infolge davon nimmt die Spannungsdifferenz desselben mit der Intensität des Stromes zu.

Das positive Licht war stets ungeschichtet und reichte bis 12 mm vor dem Glimmlichte. Diese Strecke war dunkler Raum. Die Spannungsdifferenzen der positiven Strecken *ab* und *bf* bleiben bei allen Stromstärken so gut wie ungeändert; diejenige von *ab*, welche die Anode enthält, ist wieder bei ungefähr gleicher Länge grösser. Die Spannungsdifferenz der Strecke *af* ist die Summe derjenigen von *ab* und *bf*.

§ 5. Verhalten des negativen Glimmlichtes der Gase von geringer Dichte.

40. In den Bemerkungen zu den Versuchsreihen der Tabellen II, III, VII wurde bereits die Thatsache hervorgehoben, dass das negative Glimmlicht bei der Zunahme der Stromstärke sich stetig über eine grössere Fläche der Kathode ausdehnt. Solange ihm dies möglich ist, bleibt seine Dicke, wie seine Spannungsdifferenz so gut wie unverändert. Sobald jedoch die ganze Kathode damit bedeckt ist,

fluthet es mit wachsender Stromstärke geradlinig weiter, und gleichzeitig steigt seine Spannungsdifferenz.

Um dieses Verhalten des negativen Lichtes, welches so sehr von demjenigen des positiven abweicht, eingehender zu verfolgen, wurden zwei cylindrische Glasröhren (Fig. 6) von gleichem Durchmesser (6 cm), aber sehr verschiedener Länge gleichzeitig an der Quecksilberpumpe so befestigt, dass ihre Axen senkrecht standen. Die längere Röhre (I) hatte in ihrer Axe als Kathode einen 2 mm dicken, 48 cm langen Aluminiumdraht, dessen inneres Ende durch einen Ring von Glas, in welchen ein seitwärts eingekitteter Glasstab endigte, ging und dem so eine feste Lage gegeben war. Um die Berührung des heissen Glimmlichtes mit dem Glase und die Bildung von störendem Natriumdampfe daselbst zu verhindern, war zwischen dem Glasringe über dem Drahte eine dünne Hülse von Speckstein (*m*) von 1 cm Länge geschoben. Die beschriebene Kathode (*c*) trennte ein kleiner Abstand (2 cm) von einem gleichdicken Aluminiumdrahte (*a*), der 2 cm lang war und als Anode diente. In der kurzen Röhre (II) ragte der negative Aluminiumdraht von gleicher Dicke nur 6 mm aus der Specksteinplatte und der Glasröhre, welche ihn sonst überall bedeckten. Die Anode und ihr Abstand von der Kathode waren ganz wie in der langen Röhre. Es lagen also zwei in allen Beziehungen gleiche Behälter vor, die nur durch die sehr verschiedene Länge ihrer Kathoden von einander abwichen. Damit die Erwärmung, welche das Glimmlicht stärkerer Ströme bewirkte, die Siegellackkittungen der Kathode nicht schmelzen konnte, waren dieselben von einem Gefäss mit Wasser umgeben.

In den Schliessungsbogen, welcher dieselbe Zahl galvanischer Elemente und dieselbe Länge der Widerstandssäule enthielt, wurde abwechselnd eine der beiden Röhren eingeschaltet. Für jede Röhre stellte ich die Stromintensität durch die Ablenkung des Galvanometers II, die Spannungsdifferenz der Electroden durch die Ladung des Condensators und endlich die Beschaffenheit des Glimmlichtes fest.

Die gewonnenen Resultate sind wieder in Tabellen übersichtlich zusammengestellt.

Tabelle VIII.

Spannkraft des Stickstoffes 4,4 cm. Temp. 15,3° C.

Nr. des Versuches	1.		2.		3.	
Zahl der Elemente	220		300		400	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm weit)	100		50		50	
Röhre	I	II	I	II	I	II
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rh. abgezw.)	20	23,5	118	97	222	172-177
Mittl. Stromst. $i.10^6$ in A.-E.	814	956	4803	3948	9085	7102
Erster Ausschl. d. Galv. I durch den Condens. Spannungsd. d. Electr.	61	59	64 . 65	69 . 70	72 . 73	85 . 84
Länge des Glimml. in cm	0,3	0,3	1,5	0,6	1,5	0,6

Nr. des Versuches	4.			5.		6.	
Zahl der Elemente	600			600		800	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm weit)	50			25		25	
Röhre	I	II		I	II	I	II
Abl. des Galv. II (von 2 × 4 cm Rh. abgezw.)	215	115-125	v. 2×2 cm Rh. abgez.	245-240	97-100	335-330	—
Mittl. Stromst. $i.16^6$ in A.-E.	27305	15240		52622	21374	72152	—
Erster Ausschl. d. Galv. I durch den Condens. Spannungsd. d. Electr.	66 . 64	115.105		63 . 65	127.123	63 . 64	140
Länge des Glimml. in cm	15+1,5	0,6		20+1,5	0,6	23+1,5	0,6

In den Versuchen Nr. 1 und 2 musste der Durchgang des Stromes durch den Funken der Doppelflasche eingeleitet werden. In den anderen erfolgte er von selbst.

Nr. 1 lehrt, dass die beiden Aluminiumdrähte, welche die Kathoden abgaben, obgleich sie aus demselben Drahtstücke genommen waren, nicht ganz gleichartig sind. Diejenige der kurzen Röhre war etwas günstiger für die Bildung des Glimmlichtes.

Dieser Vortheil geht schon in Nr. 2 verloren; hier bedeckte das Glimmlicht auf der langen Kathode das Ende derselben, so weit es aus der Specksteinhülse hervortritt

(1,5 cm). Die kurze Kathode (0,6 cm) gestattet diese Ausdehnung nicht. Das Glimmlicht fluthet von derselben weiter ab und nimmt eine grössere Spannungsdifferenz in Anspruch. Die Stromstärke ist infolge dessen kleiner.

Nr. 3 ist von Interesse dadurch, dass hier die Specksteinhülse die Verlängerung des Glimmlichtes der langen Kathode verhinderte und auf die nämliche Fläche (1,5 mm) beschränkte. Dadurch wird die Zunahme der Spannungsdifferenz von 64,5 auf 72,5 bedingt.

Von Nr. 4 an ist die Specksteinhülse für die Ausdehnung des Glimmlichtes auf der langen Kathode kein Hinderniss mehr. Die Spannungsdifferenz sinkt zurück auf die frühere Grösse und erhält sich so gut wie constant. Wird die Tauchbatterie herabgelassen, so erscheint das Glimmlicht zuerst nur auf dem aus der Hülse hervortretenden Ende, tritt aber im nächsten Augenblicke oberhalb des Specksteins auf und wächst rasch auf diejenige Länge, welche für die benutzten Verhältnisse des Schliessungsbogens constant bleibt. Seine Dicke bleibt unverändert. Auf der kurzen Kathode fluthet dagegen das Glimmlicht, dem eine grössere Fläche einzunehmen versagt ist, immer weiter vom Drahte ab. Seine Dicke ist in Nr. 4 schon 1 cm. Indem es eine stetig wachsende Spannungsdifferenz in Anspruch nimmt, wird der Unterschied der Stromstärken in den beiden Röhren immer grösser.

In Nr. 1 bis 4 war positives Licht nur auf der Oberfläche der Anode, der Zwischenraum der Electroden blieb dunkel. Von Nr. 5 an füllt er sich mit schwachem Lichte.

In Nr. 6 strahlt das Glimmlicht der kurzen Kathode durch den ganzen Zwischenraum bis zur Glaswand. Seine Temperatur ist so hoch, dass der Draht in wenigen Augenblicken zu einer glühenden Kugel schmolz. Es konnte nur eben die Ladung des Condensators bestimmt werden.

Ueberblicken wir die ganze Tabelle, so ergibt sie, dass das Glimmlicht auf der langen Kathode, welche seine Ausdehnung gestattet, bei Stromstärken, die bis zum 90fachen wachsen, sowohl bezüglich der Dicke und Temperatur, wie seiner Spannungsdifferenz unverändert bleibt. Dagegen steigt die Spannungsdifferenz des Glimmlichtes, welches auf der kurzen Kathode

dieselbe Fläche einnimmt, von 59 bis 140. Dieser Zunahme geht parallel eine Zunahme in der Dicke und Temperatur.

Die Unterschiede werden selbstverständlich im Versuche um so grösser, je kleiner die freie Oberfläche der einen Kathode genommen wird. In meiner ersten Mittheilung hatte ich sie auf den Querschnitt des Drahtes beschränkt. Ich habe diese Anordnung hier nicht gewählt, weil sonst die Zahl der mir zur Verfügung stehenden Elemente bei den grösseren Verdünnungen zur Strombildung nicht genügt hätte.

41. In der Röhre mit der langen Kathode wurde noch das Verhalten bei schwächeren Strömen festgestellt. Die andere Röhre würde dasselbe ergeben haben, da das Glimmlicht jetzt nur das letzte Ende des negativen Drahtes bedeckt.

Tabelle VIII$_a$.

Spannkraft des Stickstoffes 4,4 mm.

Nr. des Versuches	1.		2.	3.	4.	5.
Zahl der Elemente	300		400	600	600	600
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm weit)	720	(4 mm weit)	160	160	300	400
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 Rh.)	12,5		5,5	13	6	2
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	509		224	529	244	81
Erster Ausschl. des Galv. I durch den Condens. (Spannungsdiff. d. Electroden)	52		—	53	—	unstetig

In Nr. 1 erfolgte der Durchgang nur mit Hülfe des Funkens. Um einen grösseren Widerstand in der Strombahn zu erhalten, wurde von Nr. 2 an die Säule der Jodcadmiumlösung von 17 mm Durchmesser durch eine solche von 4 mm ersetzt. Als ihre Länge in Nr. 2 bei 400 Elementen 160 mm war, blieb der Strom nur stetig und das Telephon still, wenn der Condensator abgehängt war. Selbst wenn die Widerstandssäule (*J* Fig. 2) in der Leitung zum Condensator die grösste Länge hatte, welche zur Verfügung stand (700 mm), blieb letzterer nicht mehr geladen. Die Stromstärke 0,000 224 A.-E. liegt nämlich dem Grenzwerthe, bei welchem der Durchgang unstetig wird, ganz nahe. Die Spannungsdifferenz der Electroden konnte daher nicht be-

stimmt werden. Die Zahl der Elemente wurde auf 600 vermehrt. Hier blieb der Condensator noch geladen, wenn eine Säule der Jodcadmiumlösung (J Fig. 2) in die Verbindung seiner Belege mit den Electroden aufgenommen war. Als aber in Nr. 4 die 4 mm weite Jodcadmiumlösung auf 300 mm verlängert wurde und die Ablenkung des Galvanometers II wieder auf 6 mm kam, liess sich wie in Nr. 2 die Ladung des Condensators nicht mehr bestimmen, da er sich stets entlud. Wurde endlich in Nr. 5 die 4 mm weite im Schliessungsbogen befindliche Jodcadmiumlösung über 400 mm verlängert, so sank die Ablenkung des Galvanometers II plötzlich auf 2 mm. Der Strom war, auch wenn der Condensator abgehängt war, discontinuirlich. Das Telephon tönte sehr hoch. Demnach liegt für Stickstoff von 4,4 mm Spannkraft die Grenze, bei der die Ströme ihre Stetigkeit verlieren bei 0,0002 A.-E. Bei diesen discontinuirlichen Strömen ist der kleine Abstand der Electroden mit schwachem gelbrothem positivem Lichte gefüllt, während bei den stetigen Strömen dasselbe erst mit hoher Intensität hier auftritt.

Je verdünnter das Gas in der Röhre ist, eine desto grössere Fläche bedeckt bei derselben Stromstärke das Glimmlicht auf der langen Kathode. Als Belege hierfür sollen die folgenden Versuchsreihen dienen, welche in denselben zwei Röhren in ganz gleicher Weise angestellt wurden.

42. Tabelle IX.

Spannkraft des Stickstoffes 1,1 mm. Temp. 15,3° C.

Nr. des Versuches . . .	1.		2.		3.		4.	
Zahl der Elemente . . .	240		300		340		400	
Länge in mm der JCd-Lös. (17 mm)	50		50		50		50	
Röhre	I	II	I	II	I	II	I	I[illegible]
Ablenk. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost.) . . .	120	55	208	88—85	270	111,5-110	372	139
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	4884	2238	8466	3521	10989	4508	15140	56[illegible]
Erster Ausschl. des Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	46	61	47	73	48	79 . 80	49,5	90,[illegible]
Länge des Glimml. in cm.	8 + 1,5	0,6	14 + 1,5	0,6	16 + 1,5	0,6	21 + 1,5	0,[illegible]

(Fortsetzung von Tabelle IX).

Nr. des Versuches . . .	5.		6.		7.		8.
Zahl der Elemente . . .	500		600		700		800
Länge in mm der JCd-Lös. (17 mm)	50		50		50		50
Röhre	I	II	I	II	I	II	I
Ableit. des Galv. II (von 2 × 4 cm Rheost. abgezw.)	175	63	227,5	78,5	280	96—93	332
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	22225	8001	28893	9970	35560	12001	42164
Erster Ausschl. des Galv. I auf d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	51,5	106	54	127,5	55,5	149	57
Länge des Glimml. in cm	25 + 1,5	0,6	31 + 1,5	0,6	34 + 1,5	0,6	38 + 1,5

Der Durchgang des galvanischen Stromes erfolgte in allen Fällen der Tab. IX von selbst. Das Glimmlicht dehnte sich bei dieser geringeren Gasdichte mit der Zunahme der Stromstärke rascher auf der langen Kathode aus und ändert dabei nicht merklich wieder seine Dicke (etwa 4 mm). Die Spannungsdifferenz wächst blos von 46—57. Auf der kurzen Kathode von 6 mm Länge reichen die Strahlen des Glimmlichtes in Nr. 7 bis über $^3/_4$ des Röhrenradius. Die Spannungsdifferenz wächst bis 149.

43. Tabelle X.

Spannkraft des Stickstoffes 0,4 mm. Temp. 15,5° C.

Nr. des Versuches . . .	1.		2.		3.		4.	
Zahl der Elemente . . .	240		240		240		240	
Länge in mm der JCd-Lös. (17 mm)	720		380		200		100	
Röhre	I	II	I	II	I	II	I	II
Ablenk. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost.) . .	9	4,5	17	7	31	9	60	12
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	366	183	692	285	1262	366	2442	488
Erster Ausschl. des Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	46	57	46	61	47	65	47	69
Länge des Glimml. in cm	2 + 1,5	0,6	4 + 1,5	0,6	8 + 1,5	0,6	15 + 1,5	0,6

(Fortsetzung von Tabelle X.)

Nr. des Versuches	5.		6.		7.
Zahl der Elemente	300		300		300
Länge in mm der JCd-Lös. (17 mm)	100		50		25
Röhre	I	II	I	II	I
Ablenk. des Galv. II (von 2×14 cm Rheost.)	100	22	193	32	400
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	4070	895	7855	1302	16280
Erster Ausschl. des Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	47	84 . 82	49	85	53
Länge des Glimml. in cm	26+1,5	0,6	41+1,5	0,6	48 (ganz)

Um die Grenze für die Stetigkeit des Stromes zu erhalten, wurden grössere Widerstände, nämlich die 4 mm weite Jodcadmiumlösung in den Schliessungsbogen aufgenommen und nachfolgende Versuche angestellt.

Tabelle X_a.

Spannkraft des Stickstoffes 0,4 mm. Temp. 15,5° C.

Nr. des Versuches	1.		2.		3.		4.
Zahl der Elemente	240		240		240		240
Länge in mm der JCd-Lösung (4 mm weit)	110		150		180		350
Röhre	I	II	I	II	I	II	
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rh.)	5	4	3	3	2	2	unstetig
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	203	163	122	122	81	81	
Erster Ausschlag des Galv. I v. d. Ladung des Condens. durch die Sp. d. Electroden	47	52	48	50	48	49	
Länge des Glimmlichtes in cm	1,5	0,5	1,5	0,6			

Der Durchgang des Stromes erfolgt stets von selbst.

Der Grenzwerth des stetigen Stromes ist bei dieser geringeren Dichte des Gases kleiner, etwa 0,00008 A.-E.

Die Spannungsdifferenz der Electroden bleibt in der langen Röhre fast constant (46—49) für Stromstärken, die innerhalb 1 und 100 liegen. Erst in Nr. 7 der Tabelle X, nachdem das Glimmlicht die ganze Kathode eingenommen hatte, beginnt sie zu steigen (53), dagegen erhèbt sich die

Spannungsdifferenz des Glimmlichtes mit constant bleibender Fläche von 49 bis 85.

44. **Tabelle XI.**

Spannungsdifferenz des Stickstoffes 0,15 mm. Temp. 16° C.

:. des Versuches . . .	1.		2.		3.		4.		5.	
ıhl der Elemente . . .	220		220		220		220		220	
ınge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	720		380		200		100		50	
öhre	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
blenk. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost.) . .	6	3	13	3,5	22	4	43	5	81	5
romstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	244	122	529	143	895	163	1750	203	3297	203
·ster Ausschl. d. Galv. II v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	47	58	47	62	47	65	48	67	48	67
ınge des Glimml. in cm	5 + 1,5	0,6	9 + 1,5	0,6	18 + 1,5	0,6	35 + 1,5	0,6	48 (ganz)	0,6

:. des Versuches . . .	6.		7.		8.		8.		1a.		1b.
ıhl der Elemente . . .	220		300		400		400		220		220
ınge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	25		25		25		25	(4 mm weit)	120		200
öhre	I	II	I	II	II		I		I	II	—
blenk. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost.) . .	136	5,5	310	17,5	38	v. 2×4 cm Rh. abgez.	175	v. 2×14 cm Rh. abgezw.	2,5	2	1
romstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	5535	224	12617	712	1547		22225		102	81	unstet. Strom
·ster Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	50	67	60	90	119		69		47	50	—
änge des Glimml. in cm	ganz	0,6	ganz	0,6	0,6		ganz		1,5	0,6	—

Der Durchgang des Stromes erfolgte stets von selbst. 200 Elemente versagten den Strom, auch wenn der Funke benutzt wurde.

Schon bei der Stromstärke (81 = 0,0033 A.-E.) bedeckte bei dieser geringen Gasdichte das Glimmlicht die ganze 48 cm lange Kathode. Die Spannungsdifferenz war bis zu dieser Intensität constant geblieben, wuchs aber dann rasch, da keine weitere Ausdehnung auf der Fläche möglich war.

Auf der kurzen Kathode kommt die Spannungsdifferenz bald derjenigen nahe, welche die benutzte Elementenzahl

überhaupt besitzt. Daher bleiben in Nr. 4, 5, 6 trotz der Verkürzung der Widerstandssäule Spannungsdifferenz der Electroden und Stromstärke fast constant, erstere 67, letztere 5 bis $5^1/_2$. Erst als in Nr. 7 die Zahl der Elemente vermehrt wurde, stiegen beide Grössen. Hier reichen die Strahlen des Glimmlichtes der kurzen Kathode bereits bis an die Glaswand.

Der Grenzwerth des stetigen Stromes liegt hier noch unterhalb 0,00008 A.-E. Das Telephon summte wie eine Mücke, als der Strom discontinuirlich geworden war.

45. Tabelle XII.

Spannkraft des Stickstoffes 0,068 mm.

Nr. des Versuches	1.	2.		3.		4.		5.	
Zahl der Elemente	220	220		220		300		400	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	380	200		100		50		50	
Röhre	I	I	II	I	II	I	II	I	II
Ablenk. des Galv. II (von 2×14 cm Rheost.)	6,5	11	1	19	1,25	102	3	185	7,5
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	265	448	41	773	51	4151	122	7529	305
Erster Ausschl. des Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	57	57	66	57	67	68	92	80	123
Länge des Glimml. in cm	10+1,5	15+1,5	0,6	26+1,5	0,6	48 ganz	0,6	48 ganz	0,6

Die Spannkräfte des Stickstoffes, welche kleiner als 0,1 mm sind und nicht mehr mit dem Kathetometer direct sich bestimmen lassen, wurden auf dem früher beschriebenen Wege (Nr. 31) ermittelt.

Der Strom der 220 Elemente konnte nur mit Hülfe des Funkens in der Gasstrecke mit kurzer Kathode erhalten werden. Die Zahlen der Tabellen entsprechen ganz den Bemerkungen zu der vorigen und bedürfen daher keiner weiteren Erklärung.

46. Tabelle XIII.

Spannkraft des Stickstoffes 0,018 mm.?

Nr. des Versuches	1.		2.		3.	
Zahl der Elemente	400		600		800	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		100		100	
Röhre	I	II	I	II	I	II
Ablenk. des Galv. II (von 2×14 cm Rheostat)	19	0	108	3	203	8
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	773	—	4396	122	8262	326
Erster Ausschl. des Galv. I von d. Ladung des Condens. durch die Spannung d. Electroden	116	—	135	190	156	245
Länge des Glimml. in cm	15+1,5	—	48 (ganz)	0,6	48 (ganz)	0,6

In Nr. 1 erfolgte der Durchgang des galvanischen Stromes nur mit Hülfe des Funkens durch die lange Röhre; bei der kurzen versagte dieses Mittel.

In Nr. 2 und 3 ist die lange Kathode auf der ganzen Oberfläche mit schwachleuchtendem Glimmlicht bedeckt, das fast bis zur Glaswand strahlt. Da wo die Strahlen endigen, dicht an der Glaswand, erscheint in der langen Röhre gelbliches positives Licht, während früher, als die Kathodenstrahlen diese Länge noch nicht erreicht hatten und von der Glaswand weiter entfernt blieben, an dieser Stelle der dunkle Raum war.

47. Tabelle XIV.

Spannkraft des Stickstoffes 0,008 mm?

Nr. des Versuches	1.	2.		3.		4.	
Zahl der Elemente	600	800		1000		1200	
Länge in mm der JCd-Lösung (17 mm)	100	100		100		100	
Röhre	I	I	II	I	II	I	II
Abl. des Galv. II (von 2×14 cm Rheost.)	0	46	0	119—100	0	165—155	0
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	—	1872	—	4470	—	6512	—
Erster Ausschl. des Galv. I von d. Ladung des Condens. durch die Spann. d. Electroden	—	221	—	242—255	—	265—285	—
Länge des Glimml. in cm	—	18+1,5	—	25+1,5	—	25+1,5	—

600 Elemente versagten den Strom in beiden Röhren auch bei Benutzung des Funkens. In der Gasstrecke mit langer Kathode konnte mit Hülfe des Funkens durch 800 Elemente (Nr. 2) ein Strom erhalten werden, in derjenigen mit kurzer aber nicht. Das positive Licht der Röhre I ist nicht mehr gelbroth oder gelb, wie bei grösseren Spannkräften des Stickstoffes, sondern weiss. Das Spectroskop zeigt die zwei gelben und die grüne Linie des Quecksilberdampfes und die Banden von CO. Das weisse positive Licht geht von der Anode nach der Glaswand und verläuft dicht an derselben neben der dunklen Schicht des Glimmlichtes, die hier fast den ganzen Radius der Röhre einnimmt.

In Nr. 3 und 4 erfolgte bei 1000 und 1200 Elementen der Durchgang des Stromes in der Gasstrecke mit langer Kathode von selbst; dagegen vermochte selbst der Funken ihn nicht zu bewirken in der Strecke mit kurzer. Die Länge des Glimmlichtes erscheint bei 1200 Elementen nicht wesentlich grösser, wie bei 1000 Elementen. Es rührt dies, wie wir im nächsten Paragraphen feststellen werden, von der Schwierigkeit her, welche die Bildung des positiven Stromtheiles in dem Raume findet, den die dunkle Schicht des Glimmlichtes einnimmt. Letztere füllte nämlich hier den ganzen Zwischenraum zwischen Draht und Glaswand aus.

48. Tabelle XV.

Spannkraft des Stickstoffes 0,0035 mm?

Nr. des Versuches	1.	2.
Zahl der Elemente	1200	1400
Länge in mm der JCd-Lös. (17 mm)	100	100
Röhre	I	I
Abl. des Galv. II (von 2 x 14 cm Rheost.)	0	50—105
Ausschl. des Galv. I von der Ladung des Condens. durch die Spann. d. Electr.	—	380—340

Hier gaben 1200 Elemente in der Gasstrecke mit langer Kathode auch bei Benutzung des Funkens keinen Strom.

Bei 1400 Elementen führte dieses Mittel noch zum Ziele. Im Anfange war das negative Glimmlicht auf das Ende der Kathode beschränkt; seine Strahlen brachten die dasselbe

umgebende Glaswand zum Phosphoresciren und erzeugten hier den bekannten grünleuchtenden Ring. Allmählich dehnte sich das Glimmlicht bis ungefähr zur Hälfte der Länge der Kathode aus; gleichzeitig verstärkte sich der Strom und die Spannungsdifferenz nahm ab. Jetzt lief, wie in den Bemerkungen zur vorigen Tabelle geschildert ist, dicht an der Glaswand ein breiter Streifen positiven Lichtes entlang der dunklen Schicht des Glimmlichtes und parallel der Kathode. Der Strom selbst ändert nämlich durch die Wärmeentwickelung den Zustand der Röhre; er macht Spuren von Gas an der Glaswand und hauptsächlich aus der Kathode frei und verringert dadurch den Grad der Verdünnung.

49. Auf dem festgestellten Verhalten des Kathodenlichtes in Verbindung mit der § 4 gefundenen Eigenthümlichkeit des positiven Theiles der Strombahn basirt die Fähigkeit der stetigen Ströme, zwischen neben einander liegenden Gasstrecken von geringer Dichte sich zu verzweigen. Die Gasstrecken, zwischen welchen die Theilung erfolgen soll, müssen selbstverständlich die Bedingung erfüllen, dass sie den Durchgang der Electricität bei derselben Spannungsdifferenz gestatten, da anderenfalls nur diejenige durchflossen wird, welche die kleinere fordert. Bei Spannkräften, die grösser als 2 mm sind, gelang es mir nicht, den gleichzeitigen Durchgang des galvanischen Stromes zu bewirken, wie sehr ich mich auch bemühte die Gasstrecken bezüglich der Länge und der Beschaffenheit ihrer Electroden gleich zu machen. Der galvanische Strom verhält sich hier ganz wie der Inductionsstrom des Ruhmkorff'schen Apparates, dessen Verzweigungen in § 3 meiner ersten Mittheilung benutzt und ausführlich besprochen wurden. Ich darf daher hier auf diese Erörterung verweisen.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

II. Ueber electrische Entladungen in Gasen; von Eilhard Wiedemann.

(Hierzu Taf. VII Fig. 1—14.)

In einer Reihe von früheren Arbeiten[1]) habe ich das Verhalten von Gasen unter dem Einflusse electrischer Entladungen nach verschiedenen Richtungen einer Untersuchung unterworfen. Der vorliegende Aufsatz[2]) enthält eine Fortsetzung jener Versuche und behandelt: 1) den Einfluss der Einschaltung von Widerständen zwischen den Polen der Maschine und den Electroden des Entladungsrohres auf die Erscheinungen in demselben; 2) die Erscheinungen, welche bei verschiedenem Abstande der Electroden auftreten; 3) Messungen über die Erwärmung des Gases an verschiedenen Stellen der Entladung; 4) Ablenkung der positiven Lichtsäule; 5) das Verhalten der Entladung unter dem Einflusse des Magneten; 6) den Versuch einer Hypothese über das Wesen der Kathodenstrahlen, sowie 7) über die positive Entladung und die Schichtenbildung; 8) weitere Beobachtungen über den Einfluss des Magnetes; 9) Verhalten schlechter Leiter als Kathode; 10) Abhängigkeit des Entladungspotentials von der Gestalt der Electroden; und 11) Bemerkungen über die Behandlung der Influenzmaschinen.

Bei der grossen Complicirtheit der Phänomene konnten früher die einzelnen Erscheinungen derselben noch nicht streng auseinander gehalten werden, wie z. B. das bei etwas höheren Drucken auftretende Glimmlicht, die bei den niederen Drucken sich bildenden Kathodenstrahlen u. s. f. Auch sind eine Reihe interessanter Thatsachen wohl beobachtet worden, bei vielen derselben war es aber aus obigem Grunde nicht möglich den inneren Zusammenhang

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **5.** p. 200. 1878; **6.** p. 298 1879; **9.** p. 157. 1880; **10.** p. 202. 1880. Die Glasapparate sind auch für die Untersuchung von Hrn. Glasbläser Götze angefertigt worden.

2) Den wesentlichen Inhalt desselben habe ich bereits auf der Naturforscherversammlung in Freiburg in der physikalischen Section am 26. September 1883 vorgetragen.

festzustellen, wodurch selbstverständlich das Verdienst der ersten Forscher in keiner Weise beeinträchtigt wird. Erst allmählich traten die einzelnen Punkte mehr in den Vordergrund; indess ist es auch jetzt noch häufig schwierig, in den Darstellungen dieselben genau zu erkennen. Ich habe mich in dem von mir besprochenen Gebiet bemüht, diese Verhältnisse möglichst genau zu unterscheiden und die Bedingungen klar zu legen, unter welchen die Phänomene auftreten.

Um für die Auseinandersetzungen die Begriffe zu fixiren, möchten wir folgende Bezeichnungen vorschlagen. Die Erscheinungen sind am besten an Röhren mit plattenförmigen Electroden wahrzunehmen, weil hier alle sich bildenden verschiedenartigen Schichten senkrecht zur Rohraxe liegen.

Ist k (Fig. 3) eine Kathode, so lagert sich um diese eine von Licht fast entblösste Partie, welche wir dunklen Kathodenraum nennen; an sie schliesst sich eine nach der Kathode scharf begrenzte Schicht b, die helle Kathodenschicht. Nach der Anode zu geht von ihr ein immer verwaschener werdendes Licht bp, wir nennen dieses Glimmlichtstrahlen. Die Glimmlichtstrahlen sind von der positiven geschichteten Lichtsäule, deren erste Schicht p sei, durch einen dunklen Raum hp, den Trennungsraum geschieden. Das ganze wird von den von der Kathode k ausgehenden Kathodenstrahlen lm durchsetzt.

1. Einfluss der Einschaltung von Widerständen.

Die Versuche wurden in der Weise angestellt, dass der eine Pol der Influenzmaschine zur Erde abgeleitet wurde, während der andere mit der einen Electrode der Röhre verbunden war; die andere Electrode war dann durch die Spiralen eines Galvanometers zur Erde abgeleitet. Zwischen die Entladungsröhre und die Pole der Maschine oder zwischen die Entladungsröhre und die Erde konnten Widerstände eingeschaltet werden. Dieselben bestanden aus langen Glasröhren, welche mit Schellack überzogen und mit destillirtem Wasser gefüllt waren, in das ein Zu- und ein Ableitungsdraht tauchte. Die Entladungen wurden in einem mit mässiger Geschwindigkeit rotirenden Spiegel untersucht.

Meist zeigte sich, dass, mochten Widerstände eingeschaltet sein oder nicht, bei gleichem Gang der Maschine der Ausschlag des Galvanometers derselbe blieb, dass also die in der Zeiteinheit durch das Entladungsrohr hindurch geführte Electricitätsmenge die gleiche war.

Für die Zahl der Entladungen ergab sich aber, dass dieselbe bei Einschaltung der Widerstände eine beträchtlich grössere wurde als ohne eine solche, und zwar bei den allerverschiedensten Drucken. Bei Entladungsröhren in der gewöhnlichen Form der Spectralröhren sind die Entladungen stets discontinuirlich. Bei weiten Entladungsröhren und plattenförmigen Electroden und, wenn das Gas die Dichte hat, bei der nur ein kleines Potential zur Entladung nöthig ist, erschien oft bei Einschaltung der Widerstände das Bild im Spiegel continuirlich und löste sich nach Ausschaltung derselben in eine Reihe getrennter Bilder auf.

Hatte man mit und ohne eingeschaltenen Widerstand discontinuirliche Entladungen, so ergab sich in beiden Fällen das von G. Wiedemann und R. Rühlmann[1]) gefundene Resultat:

„War die positive Electrode mit der Maschine verbunden, die negative zur Erde abgeleitet, so war die Zahl der Entladungen stets kleiner als bei der entgegengesetzten Art der Verbindung; die zur Einleitung einer Entladung nöthige Electricitätsmenge war also im ersten Falle grösser als im letzteren."

Dabei war es gleichgültig, welcher von beiden Polen der Maschine der positive, und welcher der negative war. Eine Umwechselung der Pole der Maschine konnte stets durch blosses Anhalten und Wiederingangsetzen derselben erzielt werden.

Der Einfluss des Einschaltens von Widerständen auf die Zahl der Entladungen erklärt sich folgendermassen.

Zur Einleitung einer Entladung an einer metallischen Electrode muss auf derselben die Electricität mit einer ganz bestimmten Dichte aufgehäuft sein. Sind auf Leitern, die

1) G. Wiedemann u. R. Rühlmann, Pogg. Ann. 145. p. 235, 344. 1872.

mit der Electrode verbunden sind, Electricitätsmengen vorhanden, so können diese, wenn einmal die Entladung eingeleitet ist, und sie hinlänglich schnell zur Electrode gelangen, schon bei einem geringeren Potential die Electrode verlassen, als zur Einleitung der Entladung selbst nöthig ist. Eine solche aufgehäufte Electricität ist aber bei den grossen Influenzmaschinen in hohem Grade, bei den kleineren in geringerem Masse vorhanden. Auf den Zuleitungsdrähten zu den Polen, auf den Kämmen der Maschine und den diesen benachbarten Theilen der Glasplatten werden zwischen je zwei Entladungen beträchtliche Electricitätsmengen aufgespeichert, welche, sobald einmal an der Electrode ein Abfluss derselben eintritt, nachströmen und gleichfalls das Entladungsrohr durchfliessen. Sind die Leitungen metallisch, so ist der Zufluss ein sehr schneller, die Zeit, die vom Uebergange von der Maschine bis zu der Electrode verstreicht, ist im Verhältniss zu der ja stets endlichen, wenn auch unmessbar kleinen Zeitdauer der Entladung klein und es geht diese ganze Electricitätsmenge auf einmal hindurch. Dadurch sinkt aber die Dichte auf dem ganzen mit der Electrode verbundenen Leitersysteme auf Null und es dauert längere Zeit, bis dieselbe durch die Maschine wieder so hoch gesteigert ist, dass eine neue Entladung eintreten kann. Bei Einschaltung von grossen Widerständen wird die Electricität nur langsam der Electrode zuströmen, wenn einmal eine Entladung eingetreten ist. Die Dichte sinkt daher sehr schnell an der Electrode, und nur geringe Electricitätsmengen können als „Nachschub" der zuerst austretenden Electricitätsmenge folgen. Dafür wird aber die auf der Maschine angehäufte und zur Electrode hinströmende Electricität sehr bald wieder, auch ohne dass grosse Mengen neuer erzeugt werden, dort die Dichte auf die zur Entladung nöthige Höhe gebracht haben. Die Zahl der Entladungen muss im letzteren Falle daher bei gleicher Gesammtintensität des Stromes eine sehr viel grössere sein als im ersteren, da sich bei letzterem bei jeder Entladung nur die auf der Electrode und ihrer nächsten Umgebung befindliche Electricität ausgleicht, im ersteren hingegen die auf einem viel grösseren Bereich befindliche.

Die Maschine selbst wirkt daher wie eine Art von schwachem Condensator.

Da aber bei Einschaltung von Widerständen und ohne solche der von meinem Vater über die Unterschiede zwischen positiver und negativer Electricität gefundene Satz gültig ist, so kann sein Resultat nicht von Unregelmässigkeiten im Gang der Maschine, von einem verschiedenen Verhalten der Kämme u. s. w. herrühren, indem diese durch die Condensatorwirkung ausgeglichen werden müssen.

Wir können die Entladung bei Einschaltung von Widerständen als die „normale“ bezeichnen und die bei ihr übergehende Electricitätsmenge ebenfalls als eine „normale“ auffassen, weil es eben diejenige ist, die gerade unter den Versuchsbedingungen an der Electrode angehäuft werden muss, um eine Entladung hervorzubringen.

Da wir weiter beobachten, dass stets dann, wenn ohne Einschaltung von Widerständen die Entladung eine ungeschichtete ist, eine Schichtung durch Einschaltung von Widerständen erzielt werden kann, so können wir auch sagen: „Die geschichtete Entladung entspricht der normalen Entladung“ und da die Schichten offenbar einer regelmässigen Entladung zu ihrer Ausbildung bedürfen, so folgt weiter, dass in der normalen Entladung auch die Entladungen in ihrer einfachsten Form vor sich gehen.

Ganz dem obigen entsprechend finden wir, dass, wenn einmal mit oder ohne Einschaltung von Widerständen Schichten sich gebildet haben, diese verschwinden, sobald eine Funkenstrecke eingeschaltet wird; dadurch wird die bei jeder Entladung übergehende Electricitätsmenge vermehrt.

Die Schichtung bildet sich nach zahlreichen Versuchen, unter denen freilich manche Abweichungen vorkamen, im allgemeinen am besten aus, wenn die negative Electrode mit der Maschine, die positive durch einen grossen Widerstand mit der Erde verbunden ist. Ergaben sich Abweichungen von diesem Satz, so zeigte sich stets, dass die unter den eben angeführten Bedingungen meist zahlreicheren Entladungen weniger zahlreichen Platz gemacht haben. Woran dies lag,

konnte bei den vielfachen störenden Momenten nicht immer mit Sicherheit ermittelt werden.

So treten z. B. sehr eigenartige Erscheinungen auf, wenn man den Gang der Maschine im hohen Grade verlangsamt, also die Elelectricitätszufuhr sehr vermindert. Ist der Druck so niedrig, dass der dunkle Kathodenraum etwa 2 cm dick ist, während die Glimmlichtstrahlen selbst durch den Trennungsraum (s. w. o.) von der positiven Entladung geschieden ist oder auch gar kein positives Licht im Rohr mehr zu sehen ist, und lässt man dann allmählich die Maschine langsamer und langsamer gehen, so wächst aus der positiven Electrode positives Licht heraus, das negative Licht dehnt sich beträchtlich aus bis die Grenzen des positiven und negativen Lichtes verschmelzen. Der Zustand lässt sich beliebig lange erhalten.

Da die oben besprochenen Versuche gezeigt hatten, dass die Entladungen mit einer Influenzmaschine nicht ohne weiteres den einfachsten Entladungsmechanismus darstellen, so musste untersucht werden, ob die zuerst von G. Wiedemann und R. Rühlmann[1]) und mir[2]) aufgestellten Sätze über die Unabhängigkeit der Erwärmung der Gase von der Röhrenweite und der hindurchgehenden Electricitätsmenge auch noch für den Fall gelten, dass man durch Ausschaltung von Widerständen die sich bei jeder Entladung ausgleichende Electricitätsmenge vermehrt. Wird nachgewiesen, dass für ein weites und ein enges Rohr die Ein- und Ausschaltung von Widerständen die entwickelten Wärmemengen nicht wesentlich beeinflusst, so ist damit auch nachgewiesen, dass, wenn diese beiden Röhren hinter einander geschaltet würden, auch auf jeder Längeneinheit unabhängig vom Querschnitt gleiche Wärmemengen producirt werden würden.

Die Versuche sind genau in derselben Weise angestellt wie diejenigen, welche ich[3]) in einer früheren Abhandlung beschrieben habe.

---

1) G. Wiedemann u. R. Rühlmann, Pogg. Ann. 148. p. 35, 252. 1876.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 202. 1880.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. 10. p. 202. 1880.

Dabei wurden einmal die gesammten entwickelten Wärmemengen und die innerhalb des Verbindungsstückes der Räume um die Electroden erzeugten (bei Spectralröhren im Capillarrohre) ermittelt. Versuche über die Erwärmung an den Electroden selbst sollen später folgen.

p bedeutet den Druck, *m W* bedeutet mit Widerstand, *o W* ohne Widerstand, *F*, dass kein Widerstand, aber eine 5 mm lange Funkenstrecke eingeschaltet war, ein + resp. —, dass die positive, resp. negative Electrode mit der Maschine verbunden war, ein *o*, dass beide mit derselben verbunden waren, *x* bedeutet wieder wie früher einen sehr niedrigen, *xx* einen noch niedrigeren Druck. Die Zahlen unter +, —, *o* sind Grössen, die den in der Zeiteinheit durch gleiche Ströme erzeugten Wärmemenge proportional sind. Es handelt sich ja hier nur um die relativen, nicht aber um die absoluten Werthe.

Gesammterwärmung. Das Entladungsrohr bestand aus zwei kleinen Kugeln von 12 mm Durchmesser, welche durch ein 40 mm langes Capillarrohr verbunden waren.

	$p = 9,75$			$p = 1,9$			$p = x$		
	+	—	*o*	+	—	*o*	+	—	*o*
W	—	—	2,92	3,11	3,08	—	7,33	6,59	—
o W	—	—	3,27	3,52	3,23	3,43	8,36	6,80	6,54
f	—	—	10,10	5,0	5,08	—	12,31	—	—

Aus diesen Zahlen geht hervor, dass die Gesammterwärmung sich nicht sehr ändert, wobei indess eine geringe Zunahme wahrzunehmen ist, wenn man dieselbe Electricität in einer immer kleiner werdenden Anzahl von Entladungen überführt. Das Ausschalten des Widerstandes entspricht dem Einschalten einer Funkenstrecke, doch ist die Erwärmung durchaus nicht entsprechend der dadurch hervorgerufenen kleineren Zahl der Entladungen grösser. Es gelten daher hier dieselben Betrachtungen, welche ich bereits in diesen Annalen[1]) gegeben habe.

Erwärmung in dem die Electroden verbindenden Rohr. 1) Erwärmung in einem Capillarrohr von 1 mm Durchmesser:

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 11. p. 218. 1883.

	p = 12,9		p = 2		p = x		p = xx	
	+	−	+	−	+	−	+	−
W	10,8	13,0	4,5	5,85	2,52	1,90	2,0	1,46
oW	11,5	9,7	5,13	6,10	1,73	2,64	1,8	1,95
f	—	—	—	—	3,85	4,20	3,86	4,0

Demnach sind auch hier die Erwärmungen mit und ohne Widerstand nahezu gleich und wiederum nimmt mit Abnahme der Zahl der Entladungen im Allgemeinen die Erwärmung etwas zu. Dies ist ganz regelmässig der Fall, wenn man die Entladungen der negativen Electricität ins Auge fasst. Bei der Betrachtung der positiven hingegen zeigt sich bei niedrigen Drucken ein Minimum der Erwärmung. Die positive Entladung verhält sich also auch hier weniger regelmässig.

2) Erwärmung in einem Rohr von 4 mm Durchmesser:

	p = 12,7		p = 6,4	5,9	6,4	5,9
	+	−	+		−	
W	—	—	3,5	—	6,4	—
oW	8,3	11,1	4,5	—	6,4	6,3
f	—	—	—	6,8	—	9,0

	p = 0,8		p = x	
	+	−	+	−
W	1,6	1,6	0,6	0,8
oW	1,3	1,6	1,0	0,8
f	2,0	2,4	1,5	1,2

Das Resultat ist hier im allgemeinen das nämliche wie bei der engeren Röhre. Mit abnehmender Zahl der Entladungen nimmt die Erwärmung für gleiche Electricitätsmengen zu, indess relativ nur wenig.

Nehmen wir aber die Zahlen im ganzen und grossen und beachten, dass besonders bei niedrigen Drucken die Einschaltung von Widerständen die Zahl der Entladungen fast unmessbar vermehrt, so ergibt sich auch bei Einschaltung von Widerständen:

1) **Die Wärmeentwickelung in einem Gase durch eine hindurchgehende Electricitätsmenge ist fast unabhängig davon, ob diese in einer oder vielen Entladungen übergeht.**

2) Daraus folgt dann aber auch in Verbindung mit dem früheren Resultat ohne weiteres, dass bei zwei hinter einander geschalteten Röhren von verschiedenem Querschnitt auf der Längeneinheit gleiche Wärmemengen entwickelt werden: mögen auch Widerstände eingeschaltet sein und dadurch die Entladungszahl vergrössert werden. Es werden ja die Erwärmungen in der engen und in der weiten Röhre kaum durch die Einschaltung der Widerstände verändert und da sie, wenn keine solchen vorhanden sind, gleich sind, so müssen sie es auch in den anderen Fällen sein.

Für die normale Entladung gelten also dieselben Gesetze, wie für die gewöhnlich untersuchte.

Hieran anschliessend sei noch Folgendes bemerkt.

Von verschiedenen Seiten, so vor allem von meinem Vater und mir selbst, ist auf gewisse Vorzüge der elektrischen Influenzmaschinen gegenüber den Inductorien und den grossen galvanischen Batterien bei der Untersuchung der Entladungen in Entladungsröhren aufmerksam gemacht worden. Unsere Ansicht gründete sich darauf, dass bei den Influenzmaschinen jedesmal nur diejenige Electricitätsmenge sich entlade, welche nöthig sei, um unter den an der Electrode und im Rohr vorhandenen Verhältnissen das Potential zu erzeugen, welches erforderlich ist, um die Entladung einzuleiten.

Dass diese Anschauung nicht vollkommen richtig ist, ergibt sich aus dem Obigen. Trotzdem haben die Influenzmaschinen für eine Reihe von Untersuchungen, vor allem spectroscopischer Natur, Vorzüge vor den anderen Electricitätsquellen, und zwar nicht allein vor den Inductorien, sondern auch den galvanischen Batterien, indem es bei diesen nie möglich ist, eine grosse Electricitätsmenge in disruptiver Entladung hindurchzusenden, ohne doch Condensatoren etc. einzuschalten, wodurch die Verhältnisse sich stets in hohem Grade compliciren. Bei den Influenzmaschinen genügt die einfache Einschaltung von Funkenstrecken.

2) Erscheinungen bei verschiedenem Abstande der Electroden.

Von Wichtigkeit ist es, die Erscheinungen verfolgen zu können, die eintreten, wenn man den Abstand der Kathode

und Anode innerhalb sehr weiter Grenzen ändert. Wesentlich ist es, dass man dabei das Gefäss, in dem sich die Electroden befinden, nicht öffne. Denn mit jedem solchen Oeffnen treten andere Drucke ein, und derjenige Druck, unter welchem die ersten Bestimmungen ausgeführt worden sind, ist, vor allem, wenn es sich um sehr niedrige Drucke handelt, in gleicher Weise nie wieder zu erzielen.

Um Versuche in der eben angegebenen Richtung auszuführen, habe ich folgenden Apparat (Fig. 1) construirt.

A ist das Entladungsrohr, das bei *q* mit der Luftpumpe communicirt, *α* ist eine fest eingeschmolzene Electrode, die in früher beschriebener Weise[1]) mit der Maschine verbunden wird; eine zweite Electrode, die aber gewöhnlich isolirt ist, befindet sich bei *δ*. An das untere Ende von *A* ist der äussere Theil *e* eines weiten Schliffes angeschmolzen. Der innere Theil *d* desselben befindet sich an dem einen Ende eines *U*-Rohres *BC*, dessen längerer Schenkel *B* etwa 900 mm und dessen kürzerer *C* etwa 500 mm lang ist; an der Biegung ist ein Hahn *h* angebracht, bei *ε* ist ein Platindraht eingeschmolzen. Kautschukbänder um *ss′* und *tt′* verbinden die beiden Theile des Schliffes in der früher[2]) beschriebenen Art. Das *U*-Rohr wird zunächst mit soviel Quecksilber gefüllt, dass dasselbe in beiden Schenkeln etwa 400 mm hochsteht.

Als zweite Electrode dient meist die Platte *β*, die auch durch eine Spitze etc. ersetzt werden kann. Ihre Befestigung und Verbindung mit der Maschine und Bewegung wird in folgender Weise bewerkstelligt.

In das eine Ende eines passend langen, engen Glasrohres wird ein dünner Platindraht eingeschmolzen und das im Innern des Glasrohres befindliche Ende mit etwas Quecksilber bedeckt. In dieses taucht das Ende eines Aluminiumdrahtes, der die ganze Länge der Röhre durchsetzt und auf den oben die Platte aufgeschraubt ist. Bei dieser Anordnung war also gleichsam der ganze Zuleitungsdraht zur Electrode mit Glas umhüllt. In anderen Fällen liess

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 206. 1880.
2) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 209. 1880.

man den Metalldraht unbedeckt. Der die Electrode tragende Stab schwamm nun mit seinem unteren Ende im Quecksilber in dem Schenkel *B*. Durch Zugiessen von Quecksilber in *C* oder Ablassen aus *h* konnte derselbe gehoben oder gesenkt, also die Electrode β der Platte α genähert oder von ihr entfernt werden. Zur Sicherung der Bewegungen musste man dem Stabe noch eine Führung geben. Das einfachste wäre scheinbar gewesen, das Rohr *B* so eng zu wählen, dass der Stab sich gerade in demselben auf- und niederschieben konnte. Aber nicht nur in diesem Falle, sondern auch dann, wenn viel weitere Röhren gewählt wurden, und der Stab überhaupt mit der Wand in Berührung kommen konnte, traten so starke Capillarwirkungen auf, dass eine regelmässige Bewegung sich nicht erzielen liess. Desshalb wurde um den unteren Theil des Stabes ein mit ihm durch eine Spur Wachs fest verbundenes, sternförmig ausgeschnittenes Platinblech gelegt und ihm ausserdem noch dadurch eine sicherere Führung gegeben, dass man auf das obere Ende von *d* eine Platte *c* legte, die in der Mitte ein so grosses Loch hatte, dass der Stab eben hindurch ging. Um die Electrode β in den Raum *A* einzuführen, wurde entweder der Querschnitt des Schliffes *d* grösser als der Querschnitt der Platte gemacht oder man schnitt das Rohr *A* zunächst entzwei, steckte die Platte in *A* mit dem sie tragenden Stab von oben durch *c* hindurch und schmolz dann das Rohr zusammen.

In α und ε resp. in α und δ taucht man die Poldrähte der Maschine.

Um den Rhythmus der Entladungen im Entladungsrohre zu verfolgen, was an den Lichterscheinungen in diesem selbst infolge seiner grossen Weite, vor allem, wenn die Entladungen unregelmässig erfolgen resp. sich auf einzelne Theile des Rohres beschränken, schwierig ist, empfiehlt es sich, ausser dem weiten Rohr noch ein zweites Rohr in den Stromkreis einzuschalten, man wählt dazu am besten eines von der Gestalt Fig. 2. Dasselbe ist aus einem weiteren Rohr durch Zusammenfallenlassen des mittleren Theiles vor dem Gebläse hergestellt. Das Rohr ist so weit evacuirt, dass es dem durchgehenden Strom einen minimalen Widerstand ent-

gegensetzt, *a* und *b* sind plattenförmige Electroden, sie bieten (s. w. u.) dem Strom einen geringeren Widerstand als Spitzen. Die gezeichnete Stellung ist ihnen gegeben, damit man sich stets leicht über die Stromrichtung orientiren kann. Der mittlere Theil des Rohres wird im rotirenden Spiegel beobachtet. Bei seiner relativ grossen Helligkeit und seinem geringen Querschnitt lässt sich leicht ein Urtheil über das schnellere oder langsamere Aufeinanderfolgen der Entladungen gewinnen.

Wir setzen bei den folgenden Versuchen stets voraus, dass die Evacuation sehr weit getrieben ist, so dass ein langer dunkler Raum die Kathode umgibt.

Lässt man einer negativen Platte *k* (*α* der Figur) eine positive Electrode *a* (*β* der Figur) entgegenschwimmen, die aus einem Drahte hergestellt ist, welcher bündig mit dem ihn umgebenden und in das Quecksilber tauchenden Glasrohr abgeschnitten ist, so treten folgende Erscheinungen auf:

Befindet sich *a* in grosser Entfernung von *k*, so ist auf *a* eine Kuppe positiven Lichtes vorhanden und Schichten lagern sich zwischen *a* und die Glimmlichtstrahlen, von denen schon die erste den Querschnitt der Röhre ganz erfüllt und stark gekrümmt ist. Schwimmt *a* in die Höhe, so ändern die Schichten nicht ihre Lage, verschwinden aber eine nach der anderen, sobald sie von der positiven Electrode durchbrochen werden; dies ist auch bei der letzten, der Kathode zunächst liegenden Schicht der Fall. Sobald das Drahtende diese durchsetzt hat, ist auf dem Ende des Drahtes *a* nur noch ein kleines Büschel positiven Lichtes zu sehen. Auch dieses wird kleiner und kleiner, ohne indess je ganz zu verschwinden, das positive Licht strömt so lange nach oben, bis das Ende der positiven Electrode die Grenze des dunklen Kathodenraumes um die negative Electrode durchbrochen hat, dann fluthet es auf einmal nach unten, wie ein kleiner leuchtender Wasserfall. Steigt die Anode noch etwas höher und nähert sich der negativen Platte, so hört die Entladung auf von ihr auszugehen und findet in äussert unsteter Weise

zwischen dem oberen Ende der Quecksilbersäule im *U*-rohr und *k* statt.

Ich fand also übereinstimmend mit Herrn Goldstein, dass, wenn eine positive Electrode sich der negativen nähert, zunächst das Ende der positiven Säule unverändert bleibt. Während er aber angiebt, dass, wenn man den positiven Pol dem negativen auf eine Entfernung nähert, welche gleich oder kleiner ist, wie das der vorhandenen Dichte entsprechende Intervall zwischen dem negativen Pol und der ersten positiven Schicht das positive Licht überhaupt verschwindet, so ergaben mir meine vielfach wiederholten Versuche, dass auf der positiven Electrode eine kleine Kuppe positiven rothgelben Lichtes erhalten bleibt, selbst dann, wenn die Electrode das Ende des positiven Lichtes auch weit überschritten hat. Nur allmählich wird sie kleiner und kleiner. Es scheint, als ob diese an der positiven Electrode anliegende Kuppe fest mit derselben verbunden ist.

Während sich die Art der Vereinigung von positivem und negativem Lichte am besten mit Electroden der eben angegebenen Form verfolgen lassen, so treten einige andere Erscheinungen weit deutlicher hervor, wenn man als bewegliche positive Electrode auch eine Platte wählt.

Lässt man die Anode der Kathode entgegenschwimmen, so sind alle Erscheinungen regelmässig, so lange die erstere noch nicht in den dunklen Raum um die Kathode gedrungen ist, d. h. es verschwindet Schicht auf Schicht und nachdem die letzte durchsetzt ist, bleibt eine kleine positive Lichtkuppe auf der Platte, die mit ihr in die Höhe steigt, aber allmählig immer kleiner wird. Tritt aber die Platte in den dunklen Raum, so beobachtet man stets eine Deformation der Kathodenschichten, das blaue Licht wird hinter die Kathode getrieben, während es sich sonst nur vor derselben befindet und an der Wand bildet sich ein schmaler Streifen positiven Lichtes, wie ihn auch Hittorf[1]) bei grosser Annäherung von Kathode und Anode beobachtet hat. Die Kathodenstrahlen selbst, die gewöhnlich von der Mitte der Ka-

1) Hittorf, Pogg. Ann. **136.** p. 1 u. 197. 1869.

thode ihren Ursprung nehmen, werden ganz an den Rand derselben gedrängt, von dem sie wie ein Strahlenkranz ausgehen, während die Mitte der Kathode vollkommen dunkel erscheint[1]); Kathode und Anode ziehen sich ferner mit grosser Kraft an. Hat man sie einmal in Berührung gebracht und will man sie wieder trennen, so springen zwischen ihnen Funken über, während die Kathode dabei auf und nieder schwirrt.

Geht die Maschine sehr langsam, so treten, sobald die blaue Kathodenschicht durchbrochen ist, plötzlich ganz unregelmässige Entladungen auf, während deren grünes Licht an einzelnen Stellen des Rohres aufblitzt, gerade wie wenn man ein Rohr soweit evacuirt hat, dass überhaupt die Entladungen nur schwierig das Gas durchsetzen.

Einen Aufschluss über diese letzteren Erscheinungen verschafften Versuche, bei denen man die Pole der Influenzmaschine auf einen kleinen Abstand, etwa auf 3—5 mm näherte, und nun die untere Electrode an die andere herantreten liess. Sobald sich dieselben bis auf einen hinlänglich kleinen Abstand genähert hatten, geht ein Funkenstrom zwischen den Polen der Maschine über, während das Rohr dunkel erscheint. Lässt man dann den Abstand der Electroden zunehmen, so tritt plötzlich die Entladung wieder im Rohr ein, während zwischen den Polen der Maschine keine Electricität übergeht.

Schaltet man ausser dem Untersuchungsrohr noch die Vergleichsröhre ein, so sieht man, wenn die Funken zwischen den Polen der Maschine übergehen, in derselben an den Stellen, wo bei dem gewöhnlichen Durchgang der Entladung positives Licht auftritt, die Wände stark grün leuchten und umgekehrt. Es rührt dies daher, dass bei der Nähe der beiden Platten in dem Hauptentladungsrohre dieselben sich

1) Dieser Versuch zeigt, dass die Kathodenstrahlen durchaus nicht in der Richtung der Kraftlinien verlaufen. Letztere stehen bei zwei parallelen Platten senkrecht auf denselben und in dem zwischen ihnen gelegenen Raume findet auch der schnellste Abfall des Potentiales statt; nichtsdestoweniger gehen aber die Kathodenstrahlen vom Rande der Platten aus.

wie ein Condensator verhalten, sie werden allmählig geladen. bis plötzlich die Entladung zwischen den Polen der Maschine auftritt und die gesammte, etwa die negative Electricitätsmenge, die auf der einen Electrode der Röhre aufgehäuft war, sich auf einmal durch das kleine Rohr rückwärts entlädt und dadurch das grüne Licht erzeugt.

Aus den besprochenen Versuchen folgt, dass in weit evacuirten Räumen die Entladung zwischen einer positiven und negativen Electrode, falls der Abstand unter eine gewisse Grenze gesunken ist, um so schwerer vor sich geht, je näher sie aneinander stehen.

Dies Resultat wurde bestätigt und ergänzt durch folgenden Versuch. Zwei Entladungsröhren (Fig. 4 a u. 4 b) werden zu gleicher Zeit mit der Pumpe verbunden und zwar wurde hier statt der gewöhnlich benutzten Töpler'schen eine Geissler'sche Pumpe verwendet. Die Röhren waren je 26 mm weit und 39 mm lang; in beide waren Electroden aus Aluminiumdraht eingeschmolzen, die bis auf einen 1 mm langen Theil mit Glas umhüllt waren. In dem einen Rohre *a* standen die Electroden 1 mm weit auseinander, in dem anderen *b* 20 mm weit. Die Röhren wurden nebeneinander in den Stromkreis der Inflenzmaschine geschaltet.

Bei hohen Drucken gingen die Entladungen nur in *a* über, bei niedrigen von etwa 5 mm und weniger gleichzeitig in beiden Röhren, bei noch niedrigeren allein in *b* und bei sehr starker Evacuation nur in *a*. Wurde in diesem Falle das Quecksilbergefäss der Pumpe gehoben und dadurch das in der Kugel derselben vorhandene Gas wieder in die Entladungsröhren gedrängt, so erfolgte die Entladung wieder in *b* und nicht in *a*. Das Verhalten bei hohen und mittleren Drucken folgt ohne Weiteres aus den gewöhnlichen Anschauungen, bei hohen Drucken macht sich die Influenz der beiden Electroden auf einander und die zwischen gelagerte Gasschicht geltend, bei mittleren verschwindet der Widerstand in der positiven Lichtsäule gegenüber demjenigen im negativem Licht; in der That unterscheiden sich ja bei den mittleren Drucken die beiden Röhren nur durch eine verschiedene lange positive Schicht, die keinen wesentlichen

Einfluss auf das Potential ausübt, das zur Entladung nöthig ist, so dass also in beiden Röhren gleichzeitig die Entladungen vor sich gehen können. Bei dem dritten oben erwähnten Druck hat sich der die Kathode umgebende dunkle Raum in dem die nahe aneinander stehenden Electroden enthaltenden Rohr so weit ausgebreitet, dass er die Anode vollkommen umhüllt. Dadurch wird dem Durchgang der Electricität ein grosser Widerstand entgegengesetzt und die Entladung geht durch das Rohr mit den weiter von einander abstehenden Electroden, in welchem der dunkle Kathodenraum noch nicht bis zur positiven Electrode reicht. Bei einer noch weiteren Evacuation umhüllt der dunkle Kathodenraum auch die Anode im Rohre *b* und nun müssen wieder die Entladungen leichter in dem Rohre mit den nahe aneinander stehenden Electroden übergehen, da hier ein kleinerer Theil des dunklen Raumes zu durchbrechen ist.

Aus den oben aufgeführten Versuchen ergeben sich demnach folgende zwei wichtige Resultate:

1) Der dunkle Kathodenraum setzt der positiven Entladung einen grossen Widerstand entgegen.

2) Die Vereinigung der positiven und negativen Electricität findet in den Glimmlichtstrahlen statt.

Schon Hittorf[1]) hat aus Versuchen mit nahe aneinander stehenden Electroden auf die Existenz von Widerständen in der Nähe der Kathode geschlossen. Da er aber nicht den Abstand der Electroden veränderte, so konnte er noch nicht die für die Erklärung der Erscheinungen maassgebende Stelle der Widerstnde bestimmen.

3. Erwärmung des Gases in verschiedenen Abständen von der Kathode.

Eine ganze Reihe von Versuchen wurde unternommen, um den Abfall der Erwärmung von dem negativen Pol nach der positiven Electrode hin zu untersuchen.

Dazu wurde zunächst eine bereits von G. Wiedemann und

1) Hittorf, Pogg. Ann. **136.** p. 1 u. 197. 1869.

R. Rühlmann[1]) zu anderen Zwecken benutzte Methode verwandt. Die Löthstelle eines Thermoelementes, das aus zwei an den Enden aneinander gelötheten Eisen- und Neusilberdrähten bestand, wurde durch eine Feder gegen die äussere Wand der Röhre gedrückt, und man las die Ausschläge an einem stark astasirten Galvanometer ab. Diese geben ein Maass für die Erwärmung des Glasrohres, und letztere ist wiederum nahezu proportional der Erwärmung der benachbarten Gasschichten. Die Versuche stellte man stets so an, dass das Thermoelement von der Electrode fort nach dem positiven Licht und über dasselbe hin und dann wieder in entgegengestztem Sinne verschoben wurde; erst wenn die Ausschläge constant waren, wurden die Zahlen aufgeschrieben. Im folgenden sind stets die Unterschiede der Ausschläge A über einer Stelle des positiven Lichtes und den in verschiedenen Entfernungen E von der Kathode beobachteten eingetragen.

Als Maass für den Druck diente die Länge des dunklen Kathodenraumes.

In den Curven sind die Abscissen die Abstände von der Kathode, die Ordinaten die Galvanometerausschläge.

I. Eine erste Versuchsreihe wurde mit einem 25 mm weiten Rohr ausgeführt, das Glas war sehr dünnwandig, die Electroden waren kreisförmige Platten (Fig. 5).

Sehr weit evacuirt, dunkler Raum von etwa 37 mm, schwach erkennbar grünes Licht. Grenze des positiven Lichtes 210 (Curve a).

E	A	E	A	E	A
0	27	60	22	210	9
13	20	90	23	250	3
32	17	122	22	290	0
42	17	160	18		

Dunkler Raum 30 mm, kein grünes Licht, Grenze des positiven Lichtes bei 220. (Curve b.)

1) Pogg. Ann. **45.** p. 35. 1872.

E	*A*	*E*	*A*	*E*	*A*
0	19	70	23	190	9
11	17	108	20	220	3
32	17	160	13	280	0

Dunkler Raum 20 mm, kein grünes Licht, Grenze des positiven Lichtes bei 200. (Curve c.)

E	*A*	*E*	*A*	*E*	*A*
0	23	70	18	140	5
20	17	95	13	200	4
32	19	105	10	280	0
48	17				

Dunkler Raum 14 mm, Grenze des positiven Lichtes bei 120. (Curve d.)

E	*A*	*E*	*A*	*E*	*A*
0	26	40	12	150	1
14	22	62	8	260	0
22	20	100	2		

Dunkler Raum 8 mm, Anfang des positiven Lichtes ca. 75. (Curve e.)

E	*A*	*E*	*A*	*E*	*A*
0	17	52	2	111	1
8	11	75	1	125	0
20	6				

II. Engere Röhre 18 mm weit (Fig. 6). Dunkler Raum 14 mm. Es tritt grünes Phosphorescenzlicht auf, und zwar schon an der Grenze des dunklen Raumes, indes kann dieses nicht von den Kathodenstrahlen erzeugt werden, da diese nur von einem kleinen Theile der Kathode ausgehen und ein sehr wenig divergirendes Strahlenbündel bilden, das jedenfalls in einem Abstand von 14 mm noch nicht die Röhrenwandungen schneidet.

Die Grenze zwischen positivem und negativem Licht ist nicht zu bestimmen. Auch treten keine Schichten auf.

Fig. 6f gibt die erhaltenen Werthe wieder, die horizontalen Dimensionen sind in der Zeichnung doppelt so gross und die verticalen halb so gross als in den vorhergehenden.

E	A	E	A	E	A
0	38	44	95	130	11
8	47	65	66	170	3
14	71	100	25	222	0
30	100				

Dunkler Raum etwa 10 mm, (Curve g).

E	A	E	A	E	A
0	51	40	112	130	11
10	71	60	86	180	2
16	92	100	32	220	0
22	102				

Dunkler Raum 8 mm. Nicht geschichtete Entladung. (Curve h.)

E	A	E	A	E	A
0	25	25	40	85	0
4	32	40	21	120	0
12	42	65	5		

Dunkler Raum 4 mm.

E	A	E	A	E	A
10	13	20	7	125	0
5	15	70	2		

Der Gang der Curven und Zahlen ist in dieser zweiten Röhre ganz analog demjenigen, welchen wir bei der ersten Röhre gefunden haben.

III. Noch engeres Rohr, 11 mm weit. Dunkler Raum 11 mm.

E	A	E	A	E	A
0	37	25	53	110	4
6	43	60	20	190	0
10	55				

Dunkler Raum 8 mm.

E	A	E	A	E	A
0	39	23	29	70	9
6	44	33	22	110	3
13	39	55	7		

Dunkler Raum 6 mm.

E	A	E	A	E	A
0	16	18	19	80	5
6	21	40	7	150	0

Dunkler Raum 3 mm.

E	A	E	A	E	A
0	22	15	9	120	0
2	19	65	6		

Da auch bei diesem Rohr der Gang ebenso wie bei den vorigen ist, so theile ich keine Curven mit.

Alle die obigen Versuche ergeben, dass bei niederen Drucken, bei denen der dunkle Raum der Kathoden deutlich ausgebildet ist, folgendes gilt:

Die Wärmeproduction in der electrischen Entladung steigt erst ganz langsam von der positiven Electrode aus, dann schnell, um innerhalb der Glimmlichtstrahlen ein Maximum zu erreichen, von dort nimmt sie weiter bis zu einem relativen Minimum innerhalb des dunklen Raumes um die Kathode ab, dem aber weit höhere Erwärmungen entsprechen, als im positiven Lichte vorhanden sind. An der Kathode selbst erreicht, wie besondere Versuche zeigen, die Wärmeproduction sehr hohe Werthe.

Steigt der Druck, so rücken mit Abnahme der Länge des dunklen Kathodenraumes und Verkürzung der Glimmlichtstrahlen das Maximum und Minimum der Erwärmung immer näher zusammen, bis sie endlich mittelst der experimentellen Hülfsmittel nicht mehr getrennt werden können.

Um den in der oben angegebenen Weise erhaltenen, durch die Curven veranschaulichten, eigenthümlichen Gang der Erwärmung noch weiter zu prüfen, wurde folgende Vorrichtung benutzt. An das obere Ende des gewöhnlich die Electrode tragenden Schwimmers (Fig. 1) wurde ein Thermometer mit seiner Scala nach unten angeschmolzen, dasselbe hatte die Gestalt (Fig. 7). Der Quecksilberbehälter *a* ist cylindrisch 5 mm breit und 17 mm lang. Horizontal über

demselben ist zum Schutze gegen die Kathodenstrahlen ein kleiner Glimmerschirm *b* befestigt, den ein Paar um die Einschnürung *c* des Thermometers gelegte Platindrähte tragen. Da es sich bei den Messungen aber nicht um Temperaturen des Gases, sondern um die in der Zeiteinheit abgegebenen Wärmemengen handelt, so musste die Temperaturerhöhung in gleichen Zeiten beobachtet werden, wenn sich das Thermometer an verschiedenen Stellen des Rohres befand. Natürlich musste man dabei auch Correctionen für die Ausstrahlung und Zuleitung anbringen, dies geschah mittelst Beobachtungen vor dem Oeffnen und nach dem Schliessen des Stromes in der gewöhnlichen Weise.

Die Messungen wurden an einem etwa 140 mm weiten und 500 mm langen Rohre ausgeführt. Der dunkle Raum hatte eine Länge von ungefähr 35 mm.

Die folgende Tabelle gibt eine Uebersicht der bei drei Versuchsreihen (I, II, III) gefundenen Zahlen. Die einzelnen Reihen sind nicht unter einander dem absoluten Werthe nach vergleichbar.

E bedeutet den Abstand von der Electrode, *W* die beobachtete Temperaturerhöhung in einem beliebigen Maasse (meist in $^1/_{1000}{}^0$ in 1 Min. bei einem Strom von 100 mm Ausschlag).

I		II		III	
E	*W*	*E*	*W*	*E*	*W*
170	68	160	100	170	60
135	72	130	112	40	125
85	93	82	110	20	40
55	78	60	100	10	48
32	73	30	62		
20	45	14	20		
11	45				
5	54				

Berührte das Glimmerblatt die Electrode, so trat eine sehr starke Erwärmung ein.

Der Gang der Wärmeproduction, wie er sich aus den Messungen des Thermometers ergibt, ist also ganz derselbe, wie derjenige, welcher aus denjenigen mit dem Thermoelemente folgt. Von einem Minimum in der positiven Ent-

ladung steigt sie zu einem Maximum, sinkt dann zu einem Minimum, um an der Kathode selbst wiederum ein Maximum zu erreichen.

Die Ursachen des eben beschriebenen Ganges der Erwärmung sind nicht ohne weiteres zu bestimmen, indess lassen sich folgende Betrachtungen anstellen.

Für irgend einen von einem Strome durchflossenen Körper gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho,$$

wo V das Potential an irgend einer Stelle, ϱ die Dichte an derselben bedeutet. Hat man ein Rohr, dessen Axe die x-Axe ist, welches der Strom gleichmässig erfüllt, so wird nach der bekannten Voraussetzung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \text{also} \ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -4\pi\varrho.$$

In gewöhnlichen Leitern ist nun $\varrho = 0$, also $\partial V/\partial x$ constant oder für die Längeneinheit $V_0 - V_1 =$ constant, wo die Constante proportional dem Widerstande w ist, also wenn a eine absolute Constante bedeutet, wird:

$$V_0 - V_1 = aw.$$

Auf gleiche Längen müssen daher auch bei gleichem Widerstande gleiche Wärmeproductionen stattfinden. Findet man, dass die Wärmeproduction nicht an allen Stellen eines Rohres constant ist, so liesse sich das einmal, wenn man $\varrho = 0$ setzt, dadurch erklären, dass der Widerstand an verschiedenen Stellen des Rohres sehr verschieden ist.

Zunächst der Electrode hat man aber nach obigem eine sehr starke Wärmeproduction, dieselbe nimmt ab, um innerhalb des dunklen Kathodenraumes ein Minimum zu erreichen, dann steigt sie wieder bis zu einem Maximum innerhalb der Glimmstrahlen und sinkt dann wieder nach dem positiven Lichte zu.

Den Gang der Erwärmung aus der Aenderung des Widerstandes abzuleiten ist also nach unseren früheren Versuchen nicht möglich, gerade an denjenigen Stellen, wo sich der grösste Widerstand der Ausbreitung der positiven Electricität entgegensetzt, zeigt sich nicht die maximale Erwärmung.

Es sind nun noch zwei Möglichkeiten vorhanden entweder 1) es ist ϱ nicht gleich Null, sondern es bewegt sich freie Electricität innerhalb des Rohres oder

2) ein Theil des Potentialgefälles wird an den Stellen, wo die Erwärmung ein Minimum ist, verwendet, um der Electricität eine gewisse kinetische Energie zu ertheilen, die dann an den Stellen der maximalen Erwärmung wieder verloren geht.

Welche von beiden Anschauungen die richtige ist, werde ich aus gesonderten Bestimmungen des Potentials innerhalb des Rohres zu ermitteln suchen.

4. Ablenkung der positiven Lichtsäule.

Für die Ablenkung des empfindlichen positiven Lichtes, wenn man das von der Entladung durchsetzte Rohr mit dem Finger berührt, die bald in einer Anziehung meist unregelmässiger Art, bald in einer gleichförmigen Abbiegung besteht, sind zwei Momente massgebend.

Das eine Moment ist die Veränderung der Vertheilung der freien Electricität auf der Wand der Glasröhre, durch die das Potential an der abgeleiteten Stelle erniedrigt wird und eine Hinbiegung der Entladung nach der betreffenden Stelle nach sich zieht: dies ist besonders bei hohen Drucken der Fall. Das zweite Moment ist die Ausbildung eines dunklen Raumes an der Stelle, wo positive Electricität in einen Leiter einströmt oder gebunden wird. Die Versuche mit der heranschwimmenden Electrode zeigen ja, dass dem Durchgang der positiven Electricität durch den dunklen Raum sich ein grosser Widerstand entgegensetzt und dass die Entladung sich rückwärts umbiegt. Sobald aber an einer Stelle die Wand abgeleitet wird, entsteht dort eine Kathode, Kathodenstrahlen gehen von ihr aus und es zeigt sich auf ihr das eigenthümliche röthliche Licht, naturgemäss muss sich auch um diese Stelle ein dunkler Raum bilden, der dem positiven Licht einen Theil der Röhre zum Durchgang versperrt und um welchen dasselbe dann umbiegt.

Auf ganz ähnlichen Gründen dürfte das Hellwerden einer Röhre beruhen, wenn man die Entladungen so ein-

richtet, dass das Rohr dunkel ist und dann dasselbe mit den Fingern umspannt oder einen Stanniolring herumlegt. Hier wird die ganze Wandung an der betreffenden Stelle zur Kathode und setzt dadurch den Entladungen einen grossen Widerstand entgegen, der natürlich mit einem entsprechenden Energieverlust verbunden ist, und ein helleres Leuchten des Gases nach sich zieht.

Auf dieselbe Ursache möchte ich auch die starken, sonst so sonderbaren Erwärmungen in einem ein Entladungsrohr umgebenden Calorimeter[1]) zurückführen, wenn man starke Entladungen hindurchsendet und einen guten, mit der Erde verbundenen Leiter als calorimetrische Flüssigkeit anwendet. Die gebundenen Mengen Electricität werden besonders bei Einschaltung von Funkenstrecken immer grösser und grösser und dadurch die Bildung der dunklen Räume wesentlich befördert, sodass hier die Widerstände für den Durchgang der Entladung in hohem Grade anwachsen müssen.

5. Einfluss eines starken Magneten auf die Entladung.

Aus den eben erhaltenen Resultaten lassen sich auch Erscheinungen erklären, die eintreten, wenn man die Entladungen dem Einfluss eines starken Electromagneten aussetzt.

Verwandt wird am besten ein cylinderförmiger mit einem spitzen Pol, der durch eine Drahtspirale magnetisirt wird. Bekanntlich wird durch einen solchen Magneten das positive Licht in Curven gelegt, die ungefähr denen entsprechen, welche ein an beiden Enden fester biegsamer Stromleiter annehmen würde, während das Glimmlicht sich so verhält, als ob das eine Ende des Leiters fest wäre.

Ich erzeugte in einem weiten, stark evacuirten Rohre geschichtete Entladungen und rückte allmählich von der positiven Polplatte a aus den einen Pol des eben erwähnten Electromagneten vor. Dann treten zunächst in positivem Licht die bekannten Gestalten auf und die Entladung erscheint durchweg im rotirenden Spiegel continuirlich. Nähert man den Magneten dann weiter dem negativem Pol, so wird das Glimmlicht zur Seite gedrängt, wie man an dem auftretenden grü-

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 224. 1880.

nen Licht an der Wand beobachten kann, und das positive Licht mit seinen Schichten bewegt sich in freilich etwas deformirter Gestalt in den vom Glimmlicht entblössten Raum. Die Form der Entladung gibt die Fig. 8. Die Einbiegung bei *b* entspricht dem darunter befindlichen Magnet.

Kommt der Magnet noch näher an die Kathode und zwar soweit, dass die Zunge *a* gerade bis an die Grenze des dunklen Kathodenraumes reicht, so fällt sie plötzlich herunter, vereint sich an der Stelle, wo die Glimmstrahlen die Wand schneiden mit diesen und die Entladungen werden discontinuirlich, so dass also in diesem Falle ein weit höheres Potential zur Entladung erforderlich ist, als im ersten, oder sich ein bedeutender Widerstand entwickelt.

Diese Versuche scheinen mir zunächst zu beweisen, dass für die Ausbildung und Lage des positiven Lichtes nicht sowohl die Lage des positiven und negativen Poles massgebend ist, als vielmehr die Ausbildung der von dem negativen Pole ausgehenden Glimmlichtstrahlen und dass je nach ihrer Entwickelung und Lage überhaupt die Entladung einen höheren oder geringeren Grad von Discontinuität zeigt.

Die obige Beobachtung über den Uebergang aus der continuirlichen Entladungsform in die discontinuirliche stimmt vollkommen mit den früher gewonnenen Resultaten bei der Annäherung der positiven Electrode an die negative überein. Bezeichnen wir als die positive Richtung der Glimmlichtstrahlen, die von der hellen Kathodenschicht ausgehende, so traten viele Entladungen auf, so lange eine Vereinigung der positiven Electricität in der negativen Richtung mit den Glimmstrahlen stattfinden konnte; sobald das nicht mehr der Fall war, traten weit weniger Entladungen auf. Gerade ebenso ist es hier, so lange die Glimmlichtstrahlen nicht alle von der Axe des Rohres nach der Wand abgebogen sind, kann das positive Licht sich noch mit ihnen in negativer Richtung vereinen. Sobald aber eine vollkommene Abbiegung erfolgt ist, haben wir gerade denselben Fall, wie wenn sich die positive Electrode hinter der hellen Kathodenschicht befindet und die Entladung wird discontinuirlich.

6. Ueber das Wesen der Kathodenstrahlen.

Bereits in meiner ersten Arbeit über electrische Entladungen habe ich gezeigt, dass die Kathodenstrahlen nicht an der Bildung des Stromes und der Ueberführung der Electricität einen wesentlichen Einfluss nehmen können. Die Stromstärke in einem Kreise, in den ein Entladungsrohr eingeschaltet war, blieb nämlich merklich dieselbe, mochte man die Kathodenstrahlen sich frei ausbreiten lassen oder aber durch ein in den Weg gestelltes Glimmblatt auffangen. Neue von Hertz[1]) in anderer Weise angestellte Versuche haben zu ganz demselben Resultate geführt.

Als was sind aber die Kathodenstrahlen aufzufassen?

An den oben citirten Stellen habe ich nachzuweisen gesucht, dass die von Crookes, Puluj und Anderen aufgestellte Anschauung, dass die Kathodenstrahlen in von der Electrode losgerissenen und fortgeschleuderten Theilchen beständen, nicht stichhaltig sei. Weitere Gründe sind von Goldstein[2]) und Hertz angeführt worden. Nichtsdestoweniger beharrt Hr. Puluj in späteren Publicationen, ohne auch nur einen Versuch zu machen, unsere Einwände zu widerlegen, ja vielfach ohne dieselben zu citiren, auf seiner alten Ansicht. Die Fortführung der Theilchen der Electroden längs der Kathodenstrahlen ist eine secundäre Erscheinung, die ebenso wenig mit der Fortpflanzung der ihnen entsprechenden Bewegung zu thun hat, als das Fortfliegen einer Kanonenkugel mit der Ausbreitung des Schalles, der dort durch die Explosion erzeugt wird.

---

1) Hertz, Wied. Ann. **19.** p. 782. 1883.

2) Goldstein, Wied. Ann. **12.** p. 263. 1881. In einem Referat in den Fortschritten der Physik. 1880 über meine Wied. Ann. **10.** p. 802 publicirte Arbeit gibt Hr. Goldstein an, ich hätte fälschlich aus den Versuchen von Wheatstone und von v. Zahn Gründe gegen die Bewegungen in den Kathodenstrahlen angeführt und polemisirt dagegen. Eine aufmerksame Lectüre der betreffenden Stelle zeigt aber, dass meine Betrachtungen nur die Bewegungen in der gewöhnlichen Strombahn betreffen, wie dies z. B. aus der Anmerkung p. 246 hervorgeht: „Dieselben Betrachtungen, welche ich bereits Wied. Ann. **9.** p. 160 zum Nachweis, dass in der Richtung des Stromes keine Fortführung von Theilchen stattfindet, anstellte, hat auch Hr. Goldstein bei der Besprechung der Vorgänge an der negativen Electrode wiederholt angestellt.“

Ich glaube, wir können, im Anschlusse an die früher ausgesprochenen Anschauungen, die sämmtlichen Eigenschaften der Kathodenstrahlen aus der Annahme erklären, dass **die Kathodenstrahlen Lichtstrahlen mit sehr kleiner Schwingungsdauer darstellen.**[1])

1) Aus Versuchen von E. Goldstein[2]), die theils von mir selbst[3]), theils von Spottiswoode und Moulton[4]) bestätigt worden sind, lässt sich nachweisen, dass die Bewegungen in den Kathodenstrahlen in ganz bestimmter Weise gegen die Richtung derselben orientirt sein müssen.

Die Versuche ergaben einmal, dass die Kathodenstrahlen das positive Licht unaufgehalten durchsetzen können, falls ihre Bewegungsrichtung in diejenige des positiven Lichtes fällt und ferner, dass, wenn man eine Stelle der Wand ableitend berührt und dadurch dieselbe dort zur Kathode macht, Schatten der positiven Schichten durch die von der Wand ausgehenden Strahlen entworfen werden. Bei dieser Versuchsanordnung durchsetzen die Kathodenstrahlen die positive Lichtsäule in einer zu ihr senkrechten Richtung. Mit Spottiswoode und Moulton diese Phänomene darauf zurückzuführen, dass in den Schichten grössere Mengen von Materie als in den zwischen ihnen liegenden dunklen Räumen aufgehäuft seien, ist nach den zuerst angeführten Versuchen nicht statthaft. Denn wenn die Kathodenstrahlen die Schichten in longitudinaler Richtung durchsetzen, so müssen sie durch grössere Mengen Materie hindurchgehen, als wenn dies in transversaler Richtung geschieht.

Da also in dem zweiten Falle eine gegenseitige Störung statthat, in dem ersten aber nicht, so ist anzunehmen, dass die Bewegungen der positiven Entladung und der Kathodenstrahlen gegeneinander orientirt sind. Da ferner Störungen

---

1) Dass die Kathodenstrahlen in Aetherwellen bestehen, habe ich schon Wied. Ann. **9.** p. 160 und Wied. Ann. **10.** p. 251 zu begründen gesucht, die Herren Goldstein und Hertz haben sich dieser Ansicht angeschlossen.

2) E. Goldstein, Wien. Ber. **74.** p. 413. 1876. Hr. Goldstein hat keine Schlüsse an seine Versuche geknüpft.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 237. 1880.

4) Spottiswoode und Moulton, Beibl. **7.** p. 725. 1883.

bei Bewegungen besonders dann auftreten, wenn dieselben einander parallel erfolgen, so muss die Bewegung in den Kathodenstrahlen senkrecht zu derjenigen im positiven Lichte sein.

Die Bewegung im positiven Lichte können wir uns hervorgerufen denken durch eine dielectrische Polarisation, welche von der positiven Electrode ausgeht und welcher dann ein Strom von positiver Electricität folgt [1]). Diese Bewegung ist jedenfalls longitudinal, die Bewegung in den Kathodenstrahlen demnach eine transversale.

Als eine Interferenz im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist indess die Absorption der Kathodenstrahlen nicht aufzufassen, sondern als eine Uebertragung der Bewegung auf andere, bereits in derselben Richtung bewegte Theilchen.

2) Wenden wir uns nun zu der Unfähigkeit der Kathodenstrahlen, irgend grössere Schichten von Materie zu durchdringen, d. h. zu der Absorption der Kathodenstrahlen.

Wir finden, dass jeder feste Körper, sei er ein Leiter oder ein Nichtleiter, schon in den allerdünnsten Schichten für die Kathodenstrahlen vollkommen undurchlässig ist.

Hertz hat l. c. nachgewiesen, dass, wenn er in den Weg der Kathodenstrahlen Natrium- oder Quecksilberdämpfe brachte, diese ihrer Weiterverbreitung ein vollkommenes Hinderniss bereiteten und er vermuthet, dass das Nichtauftreten der Kathodenstrahlen bei höheren Drucken in einer Absorption derselben durch die Gase selbst bedingt sei.

Eine Absorption ist für die ultravioletten Strahlen in der Luft von Cornu [2]) auf das Entschiedenste nachgewiesen worden; für Wasserstoff liegen noch keine Versuche vor, doch erscheint eine vermehrte Absorption im Ultraviolett aus spectralanalytischen Gründen wahrscheinlich.

Auch schon a priori ist es wahrscheinlich, dass eine allgemeine Absorption der Lichtstrahlen um so eher eintritt, je kleiner ihre Schwingungsdauer, je grösser also die Zahl der Schwingungen ist, die ausgeführt werden, wenn der Lichtstrahl um eine bestimmte Strecke fortschreitet.

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 250. 1880 und weiter unten.
2) Cornu, C. R. **88.** p. 1285. 1879. Beibl. **4.** p. 40. 1880.

Eine Absorption findet dann statt, wenn zwischen den Schwingungen der Aetherhüllen des Körpermoleküls und denen des freien Aethers in Bezug auf Schwingungsdauer und Schwingungsrichtung gewisse Beziehungen bestehen; es ist klar, dass bei gleichem Zustande des Körpers solche um so häufiger eintreten, je grösser die Zahl der Aetherschwingungen auf der Längeneinheit ist. Dem Product aus der Zahl der Aetherschwingungen auf der Längeneinheit und der Körpermoleküle in der Volumeneinheit muss caeteris paribus die Stärke der Absorption entsprechen. Daher ist die Zahl der Körper, welche im Ultraviolett ein continuirliches Absorptionsspectrum liefern, eine viel grössere, als die Zahl derer, welche die sichtbaren Strahlen und auch das Ultraroth absorbiren. Absehen muss man dabei natürlich von der Absorption bestimmter Strahlengattungen, d. h. der Erzeugung von Absorptionsstreifen.

3) Mit der Absorption der Strahlen hängt unmittelbar zusammen ihre grosse Fähigkeit, Phosphorescenz und Fluorescenz[1]) zu erregen, sowie chemische Zersetzungen einzuleiten. Ein solches Fluorescenz- oder Phosphorescenzlicht der Gase, welche von den Kathodenstrahlen durchsetzt werden, ist es auch, das uns den Weg derselben verfolgen lässt. Die Aetherhüllen der Gasmolecüle, auf welche sie treffen, werden in Schwingungen versetzt und senden dann Licht aus. Da die Kathodenstrahlen an sich eine sehr grosse Energie besitzen, also bei der Absorption eine grosse Energie an die Gase abgeben, so erscheint es nicht wunderbar, dass der Wasserstoff das Linienspectrum und nicht das Bandenspectrum in den Kathodenstrahlen zeigt, dass im Stickstoff eine blaue Färbung überwiegt u. s. f. Mit stark abnehmendem Drucke nimmt die Helligkeit der Kathodenstrahlen ab, weil die Zahl der leuchtenden Gastheilchen sich vermindert.

4) Wir finden, dass da, wo wir eine negative Electrode erzeugen, sei es direct durch Zuführung negativer Elec-

1) Die Ansicht von Hrn. Goldstein, dass die Enden der Kathodenstrahlen, da wo sie eine feste Wand schneiden, sich mit einer Schicht ultravioletten Lichtes bedecken, scheint mir nicht sehr wahrscheinlich.

tricität, sei es, indem wir die Wand an der betreffenden Stelle ableiten und dadurch eine Bindung positiver Electricität hervorrufen, dass sich die metallische Electrode meist und die Glaswand stets mit einem hellen Scheine bedeckt, der bei spectroskopischer Untersuchung die Natriumlinien und die Wasserstofflinien und zwar von diesen vor Allen die rothe zeigt, während in den Kathodenstrahlen selbst, wie erwähnt, die blauen Theile des Spectrums überwiegen.

Im höchsten Grade unwahrscheinlich ist es aber, dass bei den secundären Kathoden an der Wand immer eine so hohe Temperatur erzeugt wird, wie der Dissociation des Wasserdampfes entspricht. Die an der Austrittsstelle der Kathodenstrahlen erzeugten, sehr lebhaften Aetherbewegungen werden wohl auch hier primäre Aetherbewegungen im festen Körper hervorrufen, welche dann erst secundär zu Dissociationen und Temperatursteigerungen führen. Da an der Electrode selbst die Zahl der Theilchen grösser als im Rohr ist und die Wand fortdauernd Energie aufnimmt, so kann dort das Gas selbst nur eine relativ kleinere Energiemenge pro Molecül aufnehmen, als in dem freien Gasraum; daher sind denn auch hier die rothen Wasserstofflinien relativ heller, als in den Kathodenstrahlen selbst.

5) Die von mir aufgefundene[1]) und von Goldstein[2]) als Reflexion der Kathodenstrahlen gedeutete Erscheinung erklärt sich aus der Natur derselben als Lichtstrahlen ohne weiteres.

6) Die von Goldstein[3]) eingehend untersuchte „Deflexion" besteht darin, dass, wenn Kathodenstrahlen an einer anderen Kathode vorbeigehen, sie dort eine Abbiegung, erfahren. Das Phänomen ist ganz ähnlich demjenigen, welches eintreten würde, wenn ein Lichtstrahl an einem Körper vorbeigeht, welcher von einer Atmosphäre mit von innen nach aussen abnehmender Dichte, oder veränderlicher Spannung umhüllt ist. In der That

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 236. 1880.

2) Goldstein, Wied. Ann. **15.** p. 246. 1882.

3) Goldstein, Eine neue Form electrischer Abstossung. Berlin, Springer. 1880. Beibl. **4.** p. 822. 1880.

besteht nach den im Obigen gegebenen Erörterungen über die Widerstände des positiven Lichtes rings um die Electrode ein von innen nach aussen sich verändernder Raum, der sehr wohl solche Ablenkungen von Strahlen erzeugen kann, wenn er von denselben durchsetzt wird.

7) Die mechanischen Wirkungen der Kathodenstrahlen, soweit etwa die Bewegungen von Flächen, auf welche sie treffen, nicht von Wärmewirkungen herrühren, erklären sich aus Maxwell's Entwickelungen, nach denen ein Lichtstrahl an seiner Vorderfront einen Druck ausübt, der numerisch gleich der Energie in der Volumeneinheit ist.

Ich habe früher aus Messungen über die Erwärmung an der Kathode berechnet, einen wie hohen Werth diese Energie besitzen kann; was auch unter anderen daraus folgt, dass bekanntlich im Focus einer halbkugelförmigen Kathode Platinblech zum hellen Glühen, Glas zum Schmelzen gelangt. Bei letzteren Phänomenen ist es sehr wesentlich, dass in den weit evacuirten Räumen die von den Kathodenstrahlen an das Blech abgegebene Wärmemenge nur äusserst langsam durch Convection von der umgebenden Luft fortgeführt wird.

8) Die gegenseitige Abstossung zweier Kathodenstrahlen wie sie von Crookes beobachtet worden ist, und die, wie ich selbst habe constatiren können, unter den von ihm angegebenen Verhältnissen, d. h. bei starken Entladungen, und wenn die Strahlen einen kleinen Winkel miteinander bilden, wirklich eintritt, während bei einem Zusammenstossen unter stumpfem Winkel ein Durchkreuzen sich zeigt, lässt sich aus dem auf die Vorderfläche einer Lichtwelle ausgeübten Drucke ableiten.

9) Die Ablenkung der Kathodenstrahlen durch den Magnet hat schon Hertz (l. l), freilich ohne sich bestimmter darüber zu äussern, mit der Drehung der Polarisationsebene zusammengestellt; ich glaube, dass unter der oben aufgestellten Annahme über die Natur der Kathodenstrahlen sich die beiden Phänomene in der That in einen gewissen Zusammenhang bringen lassen.

Es sei SN (Fig. 9) ein Magnet, durch dessen Axe wir einen

etwa in der Ebene des Papieres schwingenden Lichtstrahl hindurchsenden, dann werden seine Schwingungen, wenn wir vor den Nordpol N einen Glaskörper legen, so abgelenkt, dass ihr oberes Ende nach vorne gedreht wird.

Denken wir uns nun den Strahl statt in der Richtung SN verlaufend, in einer Richtung senkrecht zur Ebene des Papieres fortschreitend, so muss eine ebensolche Drehung stattfinden, denn die Lage der Aetherschwingungen gegenüber dem Magnet bleibt ungeändert. Der Lichtstrahl muss aber stets senkrecht zu der Schwingungsrichtung stehen, wird also diese gedreht, so muss auch der Lichtstrahl gedreht werden, oder er erfährt eine Abbiegung, indem er sich von N aus in die Höhe richtet.

Dass diese Drehungen in Luft bei den gewöhnlichen Lichtstrahlen noch nicht beobachtet worden sind, dagegen bei den Kathodenstrahlen einen so grossen Werth erreichen, lässt sich zum Theil wohl folgendermassen erklären.

Die Drehung der Polarisationsebene α ist unter sonst gleichen Umständen ausgedrückt durch

$$\alpha = \frac{A}{\lambda^2} + \frac{B}{\lambda^4} + \dots$$

wo A, B... Constante sind und λ die Wellenlänge bedeutet.

α erreicht also um so grössere Werthe je kleiner λ ist und steigt viel schneller als dieses selbst.

Doch kann hierin nicht allein der Grund für den Unterschied im Verhalten der Kathoden- und der gewöhnlichen Lichtstrahlen liegen. Wäre die Drehung der Lichtschwingungen gleich gross, wenn sie in der durch sie selbst und den Lichtstrahl gelegten Ebene oder in einer zu dieser senkrechten erfolgt, so müsste dieselbe auch deutlich zu beobachten sein, wenn man eine Säule Faraday'schen Glases äquatorial zwischen die Pole eines kräftigen Electromagnetes legt, die von dem Spalt eines Collimaterfernrohres kommenden Strahlen hindurchsendet und durch ein Beobachtungsfernrohr mit Fadenkreuz auffängt. Versuche in dieser Richtung haben mir aber nur negative Resultate gegeben.

7. Ueber die positive Entladung und die Schichtenbildung.

Noch möchte ich mit einigen Worten einer Anschauung erwähnen, welche ich mir über die Ursache der Schichten gebildet habe, und die für eine Reihe von Erscheinungen an denselben eine Erklärung gestattet und mit deren weiterer Ausführung ich augenblicklich beschäftigt bin.

Um die negative Electrode bildet sich, wie wir sahen, ein Raum aus, in welchem das Gas in einem wesentlich anderen Zustande sich befindet als im übrigen Theile des Rohres. An der positiven Electrode ist eine dielectrische Polarisation vorhanden, welche bei der Entladung eine Veränderung erfährt, diese und nicht etwa eine Schallwelle pflanzt sich fort und ihr folgt dann ein Strom freier Electricität.[1]) Gelangt die sich fortpflanzende dielectrische Polarisation an die Umgebung der Kathode, so wird sie, wie jede Spannung, reflectirt und es entstehen bei dem Rückgang Interferenzen, die nachströmende Electricität findet demnach Stellen maximaler und minimaler Bewegung, in ersterer wird sie sich in anderer Weise verhalten als in letzteren, an ersteren nehmen wir Leuchten des Gases wahr, an letzteren nicht.

Da die Anode selbst stets ein Punkt maximaler Bewegung sein muss, so entspricht ihr eine Schicht, ein heller Punkt, und zwar selbst dann, wenn der Abstand der Anode von den reflectirenden Theilen um die Kathode so klein geworden ist, dass keine sonstigen Interferenzen mehr auftreten können; daher finden wir das Ende der positiven Electrode auch dann noch von einer Lichtkuppe bedeckt, wenn sie bereits die letzte Schicht durchbrochen hat.

Als Ausgangspunkt der Reflexion haben wir aber nicht eine unendlich dünne Schicht aufzufassen, sondern eine solche von beträchtlicher Stärke, die sich von der nach der Kathode zu gelegenen Grenze der hellen Kathodenschicht nach dem positiven Licht hin erstreckt. Je breiter diese Schicht wird, um so breiter müssen auch die Stellen maximaler Bewegung sein, je schmäler um so schärfer; so finden

1) Vgl. hierzu die Ausführungen Wied. Ann. **10.** p. 245 und die Reclamation von W. Siemens, Wied. Ann. **29.** p. 117. 1883.

wir denn auch bei hohen Drucken und schmaler heller Kathodenschicht scharfe Schichten, bei niederen Drucken und breiter Kathodenschicht, verwaschene Schichtungen; auch die Lichtvertheilung in den Schichten erklärt sich hieraus.

Sind an der Anode zu grosse Electricitätsmengen angehäuft oder strömen dieselben zu schnell nach, so bilden sich infolge der unregelmässigen Bewegungen keine Schichten aus.

Die Auffassung von Hrn. Goldstein, dass jede einzelne Schicht sich wie ein Leiterelement mit Anode und Kathode verhält, scheint mir nur eine Umschreibung gewisser in den Schichten beobachteter Erscheinungen zu sein, nicht aber eine Erklärung derselben zu liefern. Die Anode und Kathode der Schicht würde sich nach der obigen Betrachtungsweise auffassen lassen, als Eintritts- und Austrittsstelle von Electricität in Gasschichten in einem eigenthümlichen Bewegungs- oder Spannungszustande.

Es könnte scheinen, als ob sich den obigen Entwickelungen gewisse Schwierigkeiten entgegenstellen, wenn die positive Electrode zur Erde abgeleitet, die negative dagegen mit der Electricitätsquelle verbunden ist.

Ich möchte glauben, dass sich für diesen Fall die Erscheinungen in folgender Weise erklären. Unter dem Einfluss der auf der negativen Electrode aufgehäuften negativen Electricität, resp. ihr entzögenen positiven, entwickelt sich ausgehend von der sie umgebenden hellen Kathodenschicht eine dielectrische Polarisation. Der hohe, experimentell nachgewiesene, Widerstand in der dunklen Kathodenschicht widersetzt sich zunächst der Ausgleichung der Electricität nach der negativen Electrode hin. Die dielectrische Polarisation breitet sich daher nach der positiven Electrode hin aus, wo eine Bindung freier Electricität eintritt. Ist die Spannung derselben hinlänglich hoch angestiegen, so findet die Entladung in der oben erörterten Weise statt. Die in diesem Fall gefundene, weit regelmässigere Ausbildung der Schichten hat ihren Grund in der geringen Menge angehäufter freier Electricität auf der positiven Electrode, die weit regelmässiger abfliesst, als wenn von der Electricitätsquelle stets neue Mengen zu der Electrode hin gelangen.

8. Weitere Beobachtungen über den Einfluss des Magneten auf die Entladungen.

Eine Reihe von Messungen und Beobachtungen galt dem Verhalten der Entladung unter dem Einfluss schwacher Magnete. Dabei bin ich zum Theil zu Resultaten gelangt, die von denen früherer Beobachter abweichen, resp. dieselben ergänzen.

Zu den Versuchen wurde ein 25 mm weites und 410 mm langes Rohr benutzt mit plattenförmigen Electroden, das sehr weit evacuirt wurde.

Die Kathode *k* (Fig. 3) war isolirt mit dem negativen Pol verbunden, die Kathode *a* dagegen durch einen längeren, befeuchteten Bindfaden zu der Erde abgeleitet, ebenso wie der positive Pol der Maschine selbst. Um *k* trat zunächst ein dunkler Raum ein, der bis *b* reichte, ihn durchsetzten die Kathodenstrahlen, die in einem schmalen, schwach divergirenden Bündel von der Mitte der Platte *k* ausgingen. Bis in die Mitte des Raumes *kb* hatten sie ein weissliches Aussehen, dann aber eine mehr bläuliche Farbe. Von *b* selbst aus ging von der ganzen Oberfläche der betreffenden Kathodenschicht ein bläulicher Lichtschein, die Glimmlichtstrahlen, durch den hin man die Kathodenstrahlen verfolgen konnte. Um *a* waren etwa 3 bis 4 wolkige Schichten gelagert. Die Röhre zeigte an den Wandungen ein helles grünes Licht und zwar von *b* bis *a* hin, sodass auch hier die eigentlichen Kathodenstrahlen das positive Licht durchsetzen ohne irgend welche Hindernisse zu erfahren, und dieses sich auch durch die Kathodenstrahlen ungehindert ausbreiten kann.

Nähert man einem solchen Rohre einen Stabmagneten mit dem einen Pol, so wird auf der Wandung desselben grünes Licht sichtbar, das anzeigt, dass die Kathodenstrahlen und das blaue Glimmlicht bekanntlich so abgelenkt werden, dass ein unter die Röhre gestellter Nordpol sie nach rechts wirft, wenn man von der positiven Electrode aus nach dem negativen Ende hinblickt.

Weit deutlicher treten aber die Erscheinungen auf, wenn man statt des Stabmagneten einen Hufeisenmageten mit möglichst nahe aneinander liegenden Polen verwendet, am besten

einen kleinen Jamin'schen Lamellar-Magneten, und ihn so stellt, sodass die Röhre äquatorial steht. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Die beiden Pole des Magneten bewirken eine Ablenkung der Entladung der Art, dass Glimmlicht und Kathodenstrahlen auf beiden Seiten nach der Wand hin abgelenkt werden oder

2) beide Pole lenken die Strahlen nach der Mitte hin.

1) Im ersten Falle zeigt sich, wenn der Magnet sich zwischen der Anode und der Grenze des dunklen Raumes befindet, auf der Wand ein grüner Lichtmond, der von zwei Ellipsen begrenzt ist. Diese Ellipsen werden erzeugt durch Ebenen, welche geneigt gegen die Axe des Rohres durch das Rohr hindurchgelegt werden. Der perspectivische Anblick ist der in Fig. 10 wiedergegebene, *c* ist die betreffende Fläche, *af* und *bd* die beiden Grenzen. Die von der negativen Electrode weiter abstehende Grenze ist die hellere, beide sind aber scharf begrenzt. Die Lichtlinie *db* reicht nicht ganz bis an das Ende von *df*, sondern schneidet diese Linie. Aber auch die Linie *af* umgiebt nicht ganz das Rohr, sondern endigt da, wo der Magnet sich befindet, indem sie zugleich sich ein wenig so umbiegt, sodass sie der Röhrenaxe paralleler wird.

Nähert man den Magneten von der Anode her der Kathode, so rücken die beiden Grenzen um so näher aneinander, je näher man den Magneten der negativen Electrode bringt, bis sie zuletzt fast vollkommen zusammenfallen.

Solange indess die Magnetpole sich nicht ganz nahe an der Grenze der dunklen Kathodenschicht befinden (in einem Falle, solange sie etwa 12 mm von derselben entfernt waren), bleibt die Neigung des grünen Ringes gegen die Röhrenaxe von der positiven Electrode an constant und beträgt im obigen Falle arc. tg. $\frac{25}{30}$. Nähert sich der Magnet aber der dunklen Schicht, so nimmt die Neigung beträchtlich ab und erreicht an der Grenze des dunklen Raumes den Werth arc. tg. $\frac{25}{90}$.

Sobald die Magnetpole die Grenze des dunklen Kathodenraumes etwas überschritten haben, wird die Lichtfigur

verwaschen, reducirt sich auf einen Lichtfleck, und dieser entfernt sich mit Annäherung des Magneten an die Electrode immer weiter von dem Pol.

Die Erscheinung tritt bei allen Drucken auf, die unterhalb einer gewissen Grenze liegen. Dabei ist die Entfernung des Magnetes von der Electrode, von welcher an die Ablenkung der Art erfolgt, dass die halbmondförmigen Figuren sich bilden, um so grösser, je weiter die Evacuation; offenbar weil der dunkle Raum sich immer weiter und weiter ausbreitet.

Verfolgt man die Abbiegung der Kathodenstrahlen genauer, so zeigt sich, dass sie nur von da an stattfindet, wo die Farbe derselben aus dem Weisslichen in das Bläuliche übergeht.

Da aber die Ablenkung des Ringes in so hohem Grade von der Stellung des Magnets gegenüber der Electrode bedingt ist und fast gar keine Ringbildung stattfindet, wenn sich der Magnet hinter der Grenze des Glimmlichtes befindet, so zeigt dies, dass die Kathodenstrahlen sich innerhalb des dunklen Raumes ganz anders verhalten, als wenn sie denselben einmal durchsetzt haben. Einer jeden seitlichen Verschiebung derselben steht an erstem Orte ein weit grösserer Widerstand entgegen.

Wohl möglich ist auch, dass die Glimmstrahlen, die ausserhalb des dunklen Raumes sich befinden, bei der Bildung des grünen Ringes eine Rolle mitspielen.

2) Im zweiten Falle, wo beide Magnetpole a und b die Strahlen nach der Mitte hin ablenken, sodass dieselben dort zusammengedrängt werden, erscheint ein heller Lichtstreif, der von der Verbindungslinie der Pole ausgehend, sich nach der positiven Electrode hin erstreckt. Seine Gestalt ist etwa die Fig. 11. Von der Nähe der Magneten an ist er bis δ, wo seine beiden Grenzen α und β sich schneiden, scharf begrenzt, von da an erscheint er von etwas verwaschenem Lichte begleitet.

Auch diese Erscheinung tritt am deutlichsten hervor, wenn die Magnetpole sich in einiger Entfernung von der Kathode befinden.

Eigenthümliche Phänomene treten dann auf, wenn man

zunächst durch einen unter dem Rohr angebrachten Magnet die sichelförmige Gestalt erzeugt hat und diesem von oben den einen Pol eines Stabmagneten nähert. Dann erfährt die innere schwächere Grenze nur ganz schwache Verschiebungen, während die äussere starke in hohem Grade deformirt wird.

Die Gestalt der Grenze war die Fig. 12 wiedergegebene ... ist die schwächere, nahe der Kathode gelegene, — — — die stärkere auf der Wand des Rohres gesehen. Das Stück *nm* lag schon ursprünglich auf derselben Seite des Rohres, auf der es sich noch befindet, während das Stück *ml* von der anderen Seite des Rohres hinübergebogen ist, also eine Drehung von fast 180° ausgeführt hat.

Die schwächere Grenze ist demnach von Strahlen erzeugt, welche einer Umbiegung und Ablenkung einen weit grösseren Widerstand entgegensetzen als diejenigen, welche die stärkere hervorrufen.

Bei der obigen Beschreibung wurde auf das Verhalten der positiven Lichtsäule keine Rücksicht genommen, wir wenden uns jetzt zur Besprechung derselben.

Verschiebt man den äquatorial liegenden Jamin'schen Magneten vom positiven Pole aus, so behalten, trotzdem dass auch hier schon der grüne Ring zu sehen ist, die Schichten fast unverändert ihre Lage bei, bis die Mitte der durch den Ring gelegten Ebene die vorderste Schicht durchschneidet. In diesem Moment verschwindet dieselbe, indem sie sich mit der zweiten vereint, sodass die letztere zur vordersten wird. Diese selbst rückt dann allmählich mit dem Magneten vor und zwar in dem Maasse als die Glimmlichtstrahlen zur Seite gebogen werden, während aus der Anode neue und neue Schichten heraustreten. Bewegt man den Magneten rückwärts, so findet, sobald der Ring die erste Schicht passirt, eine Theilung derselben statt.

In den meisten Fällen tritt das oben erörterte Verhaltender vordersten Anodenschicht unter dem Einflusse des Magneten auf. In einzelnen Fällen, deren Bedingungen sich aber noch nicht vollständig bestimmen lassen, beobachtet man indess auch eine einfache Verschiebung der vordersten

Schicht, wobei jedoch stets, z. B. bei der Rückwärtsbewegung, eine starke Verbreiterung, entsprechend der vorher erwähnten Theilung und nachherige Verkürzung derselben zu beobachten war.

Erreicht der Magnet bei seiner Verschiebung die Grenze des dunklen Raumes, so bleibt die vorderste, positive Schicht einen Moment stehen, und geht dann bei einer noch weiteren Annäherung des Magneten an die Kathode zurück, indem gleichzeitig die Kathodenstrahlen und Glimmlichtstrahlen weiter in die Röhre hineindringen, wodurch erstere Erscheinung bedingt ist.

Die gewöhnliche Beschreibung des Phänomens, wonach durch den Magneten die positive Lichtsäule einfach vorgezogen würde, indem sich aus der positiven Electrode immer neue Schichten loslösen, während die vorderste unverändert bleibt und gegen die Kathode vorrückt, ist demnach nicht allgemein gültig.

9. Verhalten schlechter Leiter als Kathoden.

Einige Versuche behandelten das Verhalten von schlechten Leitern als Kathoden. Es fragte sich vor Allem, ob solche schlechte Leiter in derselben Weise zerstäubt würden wie gute, ob dabei Kathodenstrahlen aufträten etc.

Man hat früher als schlechte Leiter Papier etc. benutzt und mit diesen Stoffen die Electroden bekleidet. Ich habe diese Substanzen nicht verwandt, denn so lange dieselben nicht ganz trocken sind, lässt sich mit ihnen kein einigermaassen vollkommenes Vacuum herstellen. Sind sie aber vollkommen wasserfrei, so sind sie Isolatoren, die nur in disruptiven Entladungen durchbrochen werden können.

Ich habe daher Chlorblei und Jodblei benutzt, die bei gewöhnlicher Temperatur sehr schlecht leiten.

Um die Electroden mit ihnen zu bedecken, wurde dem Entladungsrohr folgende Gestalt Fig. 13 gegeben.

In das eine Ende war in gewöhnlicher Weise eine Aluminiumelectrode eingeschmolzen, während an das andere bei d ein engeres Rohr angeschmolzen war. In dieses passte gerade ein noch engeres Glasrohr δ. In das eine Ende α

des letzteren wurde ein Platindraht eingeschmolzen, auf denselben ein Quecksilbertropfen β gebracht und dann in das Rohr ein Aluminiumdraht γ eingeschoben, welcher in das Quecksilber tauchte. In dem nicht von dem Aluminiumdraht erfüllten Theil s von δ wurde dann so lange Chlor- oder Jodblei gestopft und geschmolzen, bis der Raum s vollkommen erfüllt war, darauf das Rohr δ in das Rohr c geschoben und mit Siegellack eingekittet. Die Electrode ist so vollkommen von Glas und nicht von Kitt umgeben, ohne dass sie doch besonders eingeschmolzen zu werden brauchte. Diese Anordnung dürfte sich mutatis mutandis auch sonst vielfach zur Herstellung von Entladungsapparaten empfehlen.

Bei Chlor- und Jodblei traten stets schöne Kathodenstrahlen auf, begleitet von einem sehr deutlichen Absatz auf den Wänden und zwar besonders auf den Parthien innerhalb des dunklen Raumes um die Kathode, trotzdem die Kathodenstrahlen die Röhre fast genau in der Axenrichtung durchsetzten. Der Absatz zeigte deutliche Newton'sche Farbenringe und entwickelte sich sehr schnell. Ob dabei die electrolytische Zersetzung des Bleisalzes mit fördernd einwirkte, ist noch zu untersuchen.

Bei Benutzung von Jodblei traten eigenthümliche Spectralphänomene auf, deren Besprechung einer späteren Abhandlung vorbehalten bleibt. Kathoden aus schlechten Leitern werden also auch zerstäubt.

10. Abhängigkeit des Entladungspotentials von der Gestalt der Electrode.

Eine Reihe von Versuchen sollte dazu dienen, bei gegebenen Röhren die Abhängigkeit des Potentials, das zur Einleitung der Entladung erforderlich ist, von der Gestalt der Electroden festzustellen.

Die Röhren hatten alle gleiche Dimensionen, sie waren 25 mm weit, 120 mm lang. Das eine Rohr enthielt zwei Platten, das zweite zwei Spitzen, das dritte eine Spitze und eine Platte im Abstande von 58 mm einander gegenüber.

Als erstes Resultat ergab sich, dass, wenn man neben einander die drei Röhren mit den positiven und negativen

Polen der Maschine verband, bei hohen Drucken über 1 mm die Entladungen allein in der Röhre mit den Spitzen, bei niedrigen allein in derjenigen mit Platten übergingen.

Eine zweite Art der Aufstellung war so gewählt, dass man nur eine der Röhren in den Stromkreis einschaltete, zugleich mit derselben aber in einer Nebenschliessung ein Funkenmikrometer anbrachte und allmählich die Kugeln des letzteren so weit voneinander entfernte, dass die Entladung durch die Röhre ging oder aber aus grösserer Entfernung einander so weit näherte, bis die Entladung zwischen den Kugeln erfolgte.

Im letzteren Falle ist stets die Entfernung etwas grösser als im ersten, einmal weil die Entladung zwischen den Kugeln des Funkenmikrometers leichter vor sich geht, wenn durch den übergehenden Funkenstrom die Luft zwischen denselben erhitzt und verdünnt ist, und ferner, weil es stets wegen der Ladung der Wände des Glases eines höheren Potentials bedarf, um die erste Entladung durch die Entladungsröhre zu senden als die folgenden.

Die Versuche zeigten zunächst, dass eine Ableitung zur Erde der einen oder anderen Electrode ohne sehr wesentlichen Einfluss ist.

Bei einem sehr niedrigen Druck ergab sich Folgendes:

1. Bei dem Rohre mit zwei Spitzen konnte die Funkenstrecke 9 mm sein, ohne dass doch Entladungen hindurch gingen.

2. Bei dem Rohre mit einer Platte und einer Spitze war, wenn die Platte negativ war, noch bei einer Funkenstrecke von 11 mm keine Entladung im Rohre vorhanden, war die Platte dagegen positiv, so trat schon bei einer solchen von 3 mm eine Entladung ein.

3. Waren beide Electroden Platten, so war bei einer Funkenstrecke von 2 mm schon Entladung vorhanden.

Hieraus folgt, dass zur Entladung zwischen zwei Spitzen ein grösseres Potential nöthig ist als zwischen zwei Platten, und dass hierbei nicht allein die negative, sondern auch die positive Electrode eine Rolle spielt.

Eine ganz eigenthümliche Erscheinung tritt auf, wenn

man ein Rohr der Fig. 14 entsprechenden Form wählt und die kleine bündig mit dem Glasrohr abschneidende Electrode α zur Kathode, die grosse zur Anode nimmt. Dann geht einmal von der Spitze der Kathode ein Kathodenstrahlenbüschel aus. Andererseits findet man aber auch, dass das sie umhüllende Glasrohr hellgrün leuchtet, gerade als ob die Röhrenwand um α sich in eine Kathode verwandelte. Dies liesse sich etwa so erklären, dass die aus der Anode austretende Electricität zunächst nicht durch die kleine Oberfläche der Kathode abfliessen kann und auf die Wand um α strömt. Infolge davon verhält sich diese auf eine Kathode.

11. Bemerkungen über die Behandlung der Influenzmaschinen.

Mit Zustimmnng von Hrn. Hofrath Prof. Dr. Töpler erlaube ich mir noch Folgendes mitzutheilen. Bei längerem Gebrauche einer Influenzmaschine, wird dieselbe wegen des sich auf ihr absetzenden und in die Lackschicht einbrennenden Staubes unbrauchbar, man muss die Lackschicht erneuern, was stets mit grossen Umständen verbunden ist und auch nicht immer genügt, wohl weil das Glas der Platten selbst etwas angegriffen wird. Hr. Töpler schlägt nun vor, die Platten mit einem Ueberzug aus Paraffin zu versehen, der sich leicht herstellen und erneuern lässt. Man schmilzt dazu Paraffin in einem niedrigen Blechgefäss von der Grösse der feststehenden Platten und taucht diese dann ein. Um die rotirenden Platten zu überziehen, nimmt man ein Blechgefäss, in das gleichzeitig drei bis vier derselben bis zur Hälfte hineingehen, schmilzt in demselben Paraffin und taucht die Platten hinein, während sie auf der Axe bleiben und mit dieser rotiren. Zweckmässig ist es vor dem Eintauchen das ganze rotirende System mittelst des an der Maschine angebrachtem Erwärmungsapparat möglichst hoch zu erhitzen, um ein Springen der Platten beim Eintauchen zu vermeiden. Das überschüssige Paraffin schleudert man durch eine schnelle Rotation der Platte nach dem Herausnehmen aus dem Paraffinbade ab.

Sind die Platten nach langem Gebrauch wieder mit Staub und von den Spitzen zerstäubten Metalltheilchen bedeckt, so genügt es einige Mal, dieselben an der Maschine

bis zum Schmelzen des Paraffins zu erhitzen, das dann die Staubtheilchen umhüllt. Nach einiger Zeit ist indess stets eine vollkommene Erneuerung des Paraffinüberzuges erforderlich.

Arbeitet man längere Zeit mit Influenzmaschinen, so sollte man dieselben nie im Arbeitszimmer aufstellen. Das Ozon gehört zu den giftigen Gasen und ist um so gefährlicher, als seine nachtheiligen Wirkungen sich nicht gleich geltend machen, im Gegentheil anfangs sein Einathmen von erhöhtem Wohlbefinden begleitet ist, später aber auf das Nervensystem deprimirend wirkt. So hat Binz[1]) nachgewiesen, dass es einschläfert.

Hrn. Cole aus Cambridge, Nordamerika, der mich bei der Anstellung der besprochenen Versuche auf das Eifrigste unterstützt hat, sage ich auch an dieser Stelle meinen allerbesten Dank.

Leipzig, im October 1883.

III. *Ueber das galvanische Verhalten der Amalgame des Zinkes und des Cadmiums; von William L. Robb.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 15 u. 16.)

Nach Versuchen von Poggendorff[2]) zeigen die Amalgame von Zink, Zinn und Blei beim Eintauchen in verdünnte Schwefelsäure ein anormales, d. h. positives Verhalten gegen die gleichnamigen unamalgamirten Metalle. Dagegen erwiesen sich die Amalgame von Eisen und Cadmium negativ gegen die gleichnamigen reinen Metalle. Später machte Henrici[3]) dieses Verhalten zum Gegenstand mehrerer Versuche, welche ihn aber zu keiner vollständigen Erklärung der Erscheinung führten, doch gelang es ihm, durch gewisse Verfahren einen normalen Strom zu erzeugen, d. h. die Amal-

1) Binz, Berl. klinische Wochenschrift. Nr. 1. 2. p. 43. 1882.
2) J. C. Poggendorff, Pogg. Ann. 50. p. 263. 1840.
3) J. C. Henrici, Pogg. Ann. 58. p. 375. 1843.

game verhielten sich unter diesen Umständen[1]) negativ gegen die gleichnamigen Metalle. Daher war er der Meinung, dass der Grund dieser Anomalie in einer secundären Wirkung zu finden sei, und dass die Amalgame von Zink, Zinn und Blei sowohl wie die von Eisen und Cadmium in der galvanischen Spannungsreihe unter denselben Metallen stehen.

Da die obigen Untersuchungen zu einer Zeit, als galvanische Messungen ihre jetzige Genauigkeit keineswegs erreicht hatten, ausgeführt wurden, so erschien es lohnend, diese Erscheinung weiterer Untersuchung zu unterziehen. Die folgenden Versuche wurden im physikalischen Laboratorium des Hrn. Geheimrath v. Helmholtz ausgeführt, und ich erlaube mir, ihm bei dieser Gelegenheit meinen wärmsten und aufrichtigsten Dank auszusprechen für die jederzeitige freundliche Unterstützung, mit welcher er mir bei der Ausführung der in vorliegender Arbeit beschriebenen Versuche beistand.

§ 1. Untersuchungsmethode.

Die älteren Versuche beschäftigen sich meistens mit der Messung der Stromintensitäten, welche beim Eintauchen des Metalles und seines Amalgams in verdünnte Säure entstanden. Um nun die in Frage stehende Erklärung über dieselbe zu erhalten, schien es rathsamer, die electromotorischen Kräfte zu bestimmen, und zwar nicht nur in Säuren, sondern auch in Salzlösungen des betreffenden Metalles. Die electromotorischen Kräfte wurden nach du-Bois Reymond's Modification der Poggendorff'schen Compensationsmethode bestimmt. Da dieselben sehr klein waren, wurde, um die hinreichende Genauigkeit zu erlangen, ein sehr empfindliches Galvanometer mit astatischem Nadelpaar benutzt. Als constantes Element wurde ein Daniell'sches in der Form, wie sie im hiesigen Laboratorium als „hohe Daniell" bezeichnet werden, gebraucht. Das bei diesen Versuchen benutzte Element weicht von demjenigen, welches von A. König[2]) beschrieben ist, insofern ab, als die verdünnte Schwefelsäure

1) J. C. Henrici, Pogg. Ann. **58.** p. 378. 1843.
2) A. König, Wied. Ann. **16.** p. 16. 1882.

durch eine verdünnte Lösung von Zinksulfat (ca. 4 Proc.) ersetzt wurde. Dieses Element erwies sich sowohl in Bezug auf inneren Widerstand, wie auch auf electromotorische Kraft als sehr constant und meinem Zwecke vollkommen entsprechend. In Ermangelung von genauen und übereinstimmenden Bestimmungen der electromotorischen Kraft dieses Elementes in absolutem Maasse wird in den folgenden Angaben dieselbe gleich Eins gesetzt.

§ 2. Versuche über das Amalgam des Zinkes.

Da die Anomalie sich am bedeutendsten bei Zink zeigte, wurde dieses Metall zuerst untersucht. Gleich zu Anfang tauchten zwei Schwierigkeiten auf.

a. Ausgleichen der Zinkstäbe. — Zuerst erwiesen sich zwei Stücke von dem reinsten käuflichen Zink, welche von derselben Stange genommen wurden, in ihrem electrischen Potential als ungleich, und zwar war dieser Potentialunterschied zuweilen so bedeutend, dass zwei solche Zinkstäbe in einer Lösung von Zinksulfat eine electromotorische Kraft von einigen Tausendstel der eines Daniells erzeugten. Da die zu messenden Unterschiede zwischen dem Metalle und seinem Amalgam sehr klein sind, wurde es nothwendig, die beiden Zinkstäbe auszugleichen, ehe man den einen amalgamirte. Ich erreichte dies zuerst, indem die zwei auszugleichenden Zinkstäbe in eine Lösung von Zinksulfat gestellt und dann miteinander in Verbindung gebracht wurden, sodass ein geschlossener Stromkreis entstand. Nachdem die Zinkstäbe mehrere Stunden so gestanden hatten, waren sie ziemlich ausgeglichen. Später habe ich diese Methode nicht mehr angewandt, da dieselbe erstens zu zeitraubend war, und zweitens, nachdem der eine Zinkstab amalgamirt war, veränderte sich die Oberfläche des unamalgamirten, und ich konnte ihn dann nicht wieder in den ursprünglichen Zustand zurückbringen; zuletzt glich ich die Zinkstäbe aus, indem ich dieselben mit galvanisch niedergeschlagenem Zink überzog. Es ist selbstverständlich, dass zu diesem Zwecke nur Lösungen des reinsten Zinksulfates gebraucht wurden.

Sobald die Oberflächen vollkommen überzogen waren, erwiesen sich die beiden Zinkstäbe in ihrer galvanischen Beschaffenheit als sehr nahe gleich, und zwar war der grösste Werth der electromotorischen Kraft, den ich bei Elementen aus zwei solchen in Zinksulfat gestellten Zinkstäben gefunden habe, nur 0,00031 D., und der Mittelwerth von sechs solchen Bestimmungen betrug nur 0,00017 D. Nachdem ich eine auf der nächsten Seite beschriebene Methode anwandte, um das Zink gleichmässig niederzuschlagen, und die Vorsichtsmaassregel benutzte, die Lösung des Zinksulfates zu neutralisiren, bevor sie zu den Bestimmungen der electromotorischen Kraft gebraucht wurde, waren die Unterschiede der Zinkstäbe bedeutend kleiner, und zwar überstieg unter diesen Umständen der Werth der electromotorischen Kraft nie 0,00005 D. Diese Methode zur Ausgleichung der Zinkstäbe hatte auch den Vorzug vor den zuerst angewandten, dass bei derselben ein Zinkstab, welcher längere Zeit gestanden, und sich hierdurch an seiner Oberfläche oxydirt hatte oder sonst unrein geworden war, in seinen früheren galvanischen Zustand durch Reinigen mit schwacher Säure zurückgebracht werden konnte. Als Beispiel hierzu führe ich einen Fall an, wo sich die electromotorische Kraft zwischen amalgamirtem Zink und unamalgamirtem (beide möglichst rein) in einer concentrirten Lösung von Zinksulfat gleich 0,00022 D. erwies. Nach dieser Bestimmung wurden beide mehrere Tage der Luft ausgesetzt, wodurch sich ihre Oberfläche oxydirte und sonst verunreinigt wurde. Hierdurch stieg der Werth der electromotorischen Kraft bis zu 0,00041 D.; nachdem jedoch die Oberfläche beider möglichst sorgfältig mit sehr schwacher Säure und destillirtem Wasser gereinigt worden, nahm derselbe bis zu 0,00028 D. ab.

b. Herstellung des Zinkes. — Die zweite Schwierigkeit war, Zink von genügender Reinheit herzustellen. Nachdem nämlich das reinste käufliche Zink einige Zeit in Säure gestanden hatte, bedeckte sich seine Oberfläche, obgleich die Säure sehr verdünnt war, mit einer schwarzgrauen Substanz, welche von den Verunreinigungen des Zinkes herrührte;

diese übten natürlicherweise einen Einfluss auf die electromotorische Kraft aus. Mehrere Versuche zeigten aber, dass dieses bei Zink, welches aus einer Lösung des reinsten käuflichen Zinksulfates galvanisch niedergeschlagen war, nicht der Fall sei. Zu Anfang habe ich das Zink einfach auf Stangen destillirten Zinkes niedergeschlagen, aber da bei mehreren Versuchen, das Zink längere Zeit der Wirkung von Säure ausgesetzt werden musste, wurde der galvanisch niedergeschlagene Ueberzug wegen der Unmöglichkeit, das Zink genügend gleichmässig niederzuschlagen, an einigen Stellen durchgefressen, und man hatte daher an diesen Stellen den störenden Einfluss der Unreinheit des destillirten Zinkes. Daher benutzte ich endlich nur Stangen, welche gänzlich aus galvanisch niedergeschlagenem Zink bestanden. Um dieselben herzustellen, wandte ich folgende Methode an, welche sich als die zweckmässigste erwies. Als Electrolyt bediente ich mich einer Lösung von Zinksulfat. Die positive Electrode bestand aus Platin und die negative, auf welcher das Zink niedergeschlagen werden sollte, aus einer Wachsstange (von ca. 6 cm Länge), und zwar aus einer solchen, wie sie gewöhnlich zum Gasanzünden gebraucht werden, deren Oberfläche mit feinem Kupferstaub überzogen war. Diese umwand ich an ihrem oberen Ende mit einem Drahte, der mit dem negativen Pole der Batterie verbunden war, und es wurde so, indem der Kupferstaub als Leiter diente, die Wachsstange in den Stromkreis gebracht. Um das Zink gleichmässig niedergeschlagen zu erhalten, konnte man nur den allerfeinsten Kupferstaub anwenden, und es war auch nothwendig, den Kupferstaub besonders gleichmässig in die Oberfläche der Wachsstange einzureiben. Wenige Minuten, nachdem der Stromkreis hergestellt wurde, war die Oberfläche der Wachsstange vollkommen und gleichmässig überzogen. Nach kurzem Gebrauch aber enthielt die Zinksulfatlösung soviel durch die Electrolyse frei gewordene Säure, dass das Zink nicht mehr regelmässig und sogar zuweilen als Oxyd niedergeschlagen wurde. Daher wurde es nothwendig, die Lösung des Zinksulfates sehr oft durch eine frische zu ersetzen oder die Entwickelung der Säure zu be-

seitigen. Da das letztere nun natürlich vorzuziehen war, versuchte ich folgendermassen die Entwickelung der Säure zu verhindern.

Das Gefäss, welches die Zinksulfatlösung enthielt, war durch eine poröse Substanz in zwei Theile getheilt. Da ich von der Reinheit dieser Substanz überzeugt sein musste (was bei einer Thonzelle nicht der Fall war), benutzte ich dazu Filtrirpapier, welches auf dem Boden und den Seiten des Gefässes mit Paraffin festgeklebt war. Der Theil des Gefässes, welcher die Platinelectrode enthielt, wurde mit kohlensaurem Zink, welches aus einer concentrirten Lösung doppeltkohlensauren Natrons durch Zugiessen einer concentrirten Lösung von Zinksulfat erhalten wurde, gefüllt. Nun vereinigte sich, wenn auch nicht alle, so doch wenigstens ein grosser Theil der auf der positiven Electrode frei werdenden Säure mit dem Zink des kohlensauren Zinkes zu schwefelsaurem Zink, und die dadurch frei werdende Kohlensäure wurde als Gas abgegeben. Hierdurch konnte die Lösung bedeutend länger als ohne eine solche Verhinderung der Entwickelung der Säure gebraucht werden. Nachdem das Zink auf der Wachsstange so dick niedergeschlagen war, dass ein Zerbrechen nicht mehr zu befürchten war, wurde es aus der Lösung genommen, und das Wachs von dem Zink entfernt und hierauf das Zink von dem Kupfer, mit welchem die innere Oberfläche bedeckt war, gereinigt. Dieses geschah, indem ich eine Schnur, welche in Säure getaucht und mit Sand, um eine Art Feile herzustellen, bestreut war, in der durch die Entfernung der Wachsstange entstehende Oeffnung auf- und niederzog. Zunächst wurde an das eine Ende des Zinkcylinders ein Kupferdraht gelöthet, welcher nur den Zweck hatte, das Zink leichter in den Stromkreis bringen zu können. Die Verbindungsdrähte wurden bei allen Arten des Zinkes stets an dasselbe angelöthet. Zuletzt, nachdem ich sicher, dass die innere Oberfläche vollkommen vom Kupfer gereinigt war, wurde dieser hohle Zinkcylinder mit reinem Paraffin angefüllt, und dann setzte ich das Niederschlagen des Zinkes fort, bis eine genügende Stärke erreicht war. Für gewöhnlich wurde erst dann mit dem Niederschlagen

aufgehört, wenn der Mantel eine mittlere Dicke von ca. 2 mm hatte. Falls nun das Zink von der Säure an einigen Stellen durchgefressen wurde, hatte es keinen weiteren Einfluss auf die electromotorische Kraft, da das zum Vorschein kommende Paraffin ein Nichtleiter der Electricität ist. Nach dem Vorhergehenden braucht es kaum erwähnt zu werden, dass die verschiedenen Zinkstangen, welche nach dieser Methode hergestellt wurden, in ihrer galvanischen Beschaffenheit hinreichend gleich waren, um irgend ein weiteres Ausgleichen derselben unnöthig zu machen.

c) Ueber die electromotorische Kraft von galvanischen Elementen, welche aus reinem und amalgamirtem Zink in concentrirten Lösungen eines Zinksalzes bestehen. — Um jede Möglichkeit irgend eines Einflusses der Ungleichheit des Contactes der Metalle mit der Luft an der Oberfläche der Lösung auszuschliessen und zu verhindern, dass der angelöthete Draht vielleicht unbemerkt in die Flüssigkeit tauchen könnte, wurde das obere Ende des Zinkes mit Paraffin in einem Glasrohr eingeschlossen. Bei der Bestimmung befand sich nun das obere Ende des Zinkes ca. 5 mm unter der Oberfläche der Flüssigkeit, sodass der Contact der Metalle mit der Luft gänzlich vermieden war. Vor jeder endgültigen Bestimmung war es erforderlich, nachzusehen, ob keine andere electromotorische Kraft in demselben Stromkreis vorhanden war. Zuerst wurde die electromotorische Kraft bestimmt, wenn beide Zinkstäbe unamalgamirt waren, um zu sehen, ob dieselben in ihrer galvanischen Beschaffenheit hinreichend gleich waren. War dieses der Fall, so wurde das eine derselben mit reinem Quecksilber amalgamirt und dann die electromotorische Kraft wieder bestimmt. Die nachfolgenden Werthe der electromotorischen Kräfte, welche bei Benutzung von Salzlösungen der betreffenden Metalle erhalten sind, wurden erst gemessen, nachdem dieselben constant geworden waren. Da nämlich die Metalle, unmittelbar bevor sie in die Flüssigkeit gestellt wurden, mit destillirtem Wasser abgespült waren, dauerte es einige Zeit, bevor die Flüssigkeit ganz gleichmässig wurde. Gewöhnlich wurde nach Verlauf von etwa

einer Stunde der Werth der electromotorischen Kraft constant; dieser Werth war zuweilen grösser, zuweilen kleiner als der, welcher gerade, nachdem die Metalle in die Lösung gestellt waren, gefunden wurde. Bei den zuerst gemachten Bestimmungen dieser Art wurden die Zinkstäbe, deren Oberfläche nur aus galvanisch niedergeschlagenem Zink bestand, angewandt. Ausserdem benutzte ich Lösungen des reinsten käuflichen schwefelsauren und essigsauren Zinkoxydes, leider ohne anfänglich weitere Rücksicht darauf zu nehmen, ob dieselben neutral waren oder nicht.

Die nachstehende Tabelle stellt die Werthe, welche unter diesen Umständen gefunden wurden, zusammen. Als Nullwerth wurde das Potential in demjenigen Zinkstab angenommen, der während der Untersuchungen unamalgamirt blieb; e_1 bezeichnet das Potential in dem zweiten Zinkstab vor der Amalgamation und e_2 nach der Amalgamation; $e_2 - e_1$ bezeichnet dann den Zuwachs der electromotorischen Kraft, veranlasst durch die Amalgamation des einen Zinkstabes.

Zink in einer concentrirten Lösung von Zinksulfat.

e_1	e_2	$e_2 - e_1$
+0,00026 D.	+0,00080 D.	+0,00054 D.
+0,00015 „	+0,00090 „	+0,00075 „
+0,00001 „	+0,00095 „	+0,00094 „
−0,00001 „	+0,00090 „	+0,00091 „
−0,00031 „	+0,00035 „	+0,00066 „
+0,00029 „	+0,00140 „	+0,00111 „
	Mittelwerth	+0,00082 D.

Mit den beiden letzten Zinkstäben wurden auch Messungen bei Anwendung von essigsaurem Zinkoxyd gemacht, und es ergab sich:

$e_1 = +\,0{,}00030$ D, $e_2 = +\,0{,}00295$ D, $e_2 - e_1 = 0{,}00265$ D.

Die einzelnen Werthe von $e_2 - e_1$ weichen allerdings ziemlich weit von dem Mittelwerth ab, aber wenn man bedenkt, dass Säure in der angewandten Lösung vorhanden und dass auch nur die äusserste Schicht der Zinkstäbe ausgeglichen war, hätte man dieses kaum anders erwarten können. Es ist selbstverständlich, dass aus ähnlichen Gründen die Werthe, welche in der Lösung von Zinksulfat ge-

funden wurden, nicht vergleichbar sind mit dem, welcher bei Anwendung der Lösung von essigsaurem Zink gefunden war.

Nachdem ich die Stangen, welche ganz aus galvanisch niedergeschlagenem Zink bestanden, angewandt hatte, aber bevor ich anfing, die Salzlösungen zu neutralisiren, erhielt ich folgende Werthe:

Zink in einer concentrirten Lösung von Zinksulfat.

e_1	e_2	$e_2 - e_1$
−0,00003 D.	+0,00022 D.	+0,00025 D.
+0,00005 „	+0,00056 „	+0,00051 „
−0,00003 „	+0,00020 „	+0,00023 „
	Mittelwerth	+0,00033 D.

Nachdem endlich die Lösung soweit neutralisirt war, dass keine Wirkung derselben, ehe die electromotorische Kraft constant geworden, auf der Oberfläche des unamalgamirten Zinkes zu merken war, fand ich folgende Werthe:

Zink in einer concentrirten neutralisirten Lösung von Zinksulfat.

e_1	e_2	$e_2 - e_1$
−0,000 050 D.	−0,000 090 D.	−0,000 040 D.
+0,000 015 „	+0,000 290 „	+0,000 275 „
+0,000 010 „	+0,000 155 „	+0,000 145 „
+0,000 010 „	−0,000 105 „	−0,000 115 „
	Mittelwerth	+0,000 065 D.

Zink in einer concentrirten neutralisirten Lösung von essigsaurem Zinkoxyd.

e_1	e_2	$e_2 - e_1$
+0,000 085 D.	+0,000 370 D.	+0,000 285 D.
+0,000 010 „	−0,000 155 „	−0,000 165 „
+0,000 010 „	−0,000 240 „	−0,000 250 „
	Mittelwerth	−0,000 045 D.

Aus dem obigen Werthe wird man wohl berechtigt sein, zu schliessen, dass amalgamirtes Zink und reines Zink in ihrer galvanischen Beschaffenheit so nahe gleich sind, dass der Potentialunterschied derselben in einer concentrirten Lösung eines Zinksalzes, wenn dieselbe nicht neutralisirt ist, nur gleich einigen Tausendstel des Potentialunterschiedes eines Da-

nielle ist, während derselbe, wenn die Zinksalzlösung genügend neutralisirt ist, um keine Wirkung auf das unamalgamirte Zink auszuüben, verschwindend klein ist.

Selbstverständlich kann man aus diesen Bestimmungen nichts über die relative Stellung des amalgamirten und des nicht amalgamirten Zinkes in der galvanischen Spannungsreihe schliessen.

d) Ueber die electromotorische Kraft von galvanischen Elementen, welche aus reinem und amalgamirtem Zink in verdünnten Säuren bestehen. — Den Potentialunterschied des reinen und des amalgamirten Zinkes habe ich in verdünnter Schwefelsäure und Essigsäure, zwei Säuren, welche das amalgamirte Zink nicht angreifen, untersucht. Die electromotorische Kraft wurde in diesem Falle nicht, wie es bei Zinkstäben in Zinksalzlösung der Fall war, bald constant, sondern sie nahm zuerst bis zu einem Maximum zu und dann fortwährend ab. In den zwei nächstfolgenden Tabellen sind Beispiele hierfür angegeben. Es bezeichnet t die Zeit, welche vergangen war, seitdem die Zinkstäbe in die Säure gestellt wurden, und e das Potential in dem amalgamirten Zink, wobei das Potential des unamalgamirten Zinkes ebenso wie früher als Nullwerth angenommen wird. (Siehe Fig. 16.)

Amalgamirtes und unamalgamirtes Zink in verdünnter Schwefelsäure (ca. 3%).

t	e	
ca. 9 Min.	+0,006 D.	siehe Curve I.
18 „	+0,010 „	
40 „	+0,016 „	
1 St. 50 „	+0,0275 „	
3 „ 5 „	+0,0344 „	
4 „ 10 „	+0,0390 „	
4 „ 40 „	+0,0398 „	
7 „ 40 „	+0,0465 „	
10 „ — „	+0,0473 „	
19 „ 30 „	+0,0358 „	

Amalgamirtes und unamalgamirtes Zink in verdünnter Essigsäure (ca. 50%).

t	e	
ca. 5 Min.	+0,0398 D.	siehe Curve II.
8 „	+0,0430 „	
13 „	+0,0457 „	
15 „	+0,0469 „	
36 „	+0,0489 „	
1 St. 2 „	+0,0502 „	
1 „ 48 „	+0,0490 „	
6 „ 15 „	+0,0382 „	
19 „ — „	+0,0278 „	

Die electromotorische Kraft nahm in beiden Fällen noch weiter ab.

Wie man sieht, verhält sich bei diesen Versuchen das amalgamirte Zink stets positiv gegen das unamalgamirte.

Da man sicher sein musste, dass keine Veränderung von Bedeutung in der electrischen Beschaffenheit der Oberflächen der Zinkstäbe stattgefunden hatte, während dieselben in der Säure standen, wurde die electromotorische Kraft in einer Lösung von Zinksulfat bestimmt, sowohl bevor die Zinkstäbe in die Säure gestellt wurden, als auch nachdem sie aus derselben genommen waren.

Während der ganzen Zeit, in welcher die Zinkstäbe in der Säure standen, wurde das unamalgamirte Zink von der Säure angegriffen, und dadurch wurde auf der Oberfläche des Zinkes die Säure durch das entsprechende Zinkoxyd ersetzt. Daher konnte man leicht vermuthen, dass die gemessene electromotorische Kraft hauptsächlich durch die Entwickelung des Zinksalzes veranlasst wurde und statt der Summe:

$$\text{Zn} \mid \text{HgZn} + \text{HgZn} \mid \text{Säure} + \text{Säure} \mid \text{Zn}$$

gleich zu sein, in Wirklichkeit der Summe:

$$\text{Zn} \mid \text{HgZn} + \text{HgZn} \mid \text{Säure} + \text{Säure} \mid \text{Zinksalz} + \text{Zinksalz} \mid \text{Zn}$$

gleich sei.

Der Zweck der folgenden Versuche war, ein Urtheil über diese Vermuthung zu erhalten. Zuerst wurden Elemente aus zwei Flüssigkeiten, einer Säure und der gleichnamigen Zinksalzlösung, untersucht. Die Concentration der Salzlösungen des Zinkes war dieselbe, welche erhalten wurde, wenn man Zink in Säuren von der angewandten Concentration auflöst. Die benutzte Schwefelsäure war sehr verdünnt (ca. 3%), die Essigsäure dagegen ziemlich stark (ca. 50%). Die zwei Gefässe, von denen das eine die Säure, das andere das der Säure gleichnamige Zinksalz enthielt, wurden durch einen Heber in Verbindung gebracht. Derselbe wurde mit der Säure gefüllt, weil diese die specifisch leichtere der beiden Flüssigkeiten war.

Zuerst wurde die electromotorische Kraft gemessen, während das amalgamirte Zink in der Säure und das unamalgamirte in der gleichnamigen Zinksalzlösung stand. Die

electromotorische Kraft veränderte sich zuerst ein wenig, erhielt aber, ähnlich, wie wenn die Zinkstäbe in einer concentrirten Zinksalzlösung standen, bald einen ziemlich constanten Werth, welcher mehrere Stunden ohne grössere Abnahme beibehalten wurde. Wenn Schwefelsäure und Lösung von schwefelsaurem Zinkoxyd benutzt waren, wurde der constante Werth von e gleich + 0,0591 D., und wenn Essigsäure und essigsaures Zink angewandt waren, wurde derselbe gleich + 0,0464 D. gefunden. Diese Werthe sind von ungefähr derselben Grösse, wie die Maximalwerthe von e, wenn die Zinkstäbe in den Säuren standen.

Dann wurde das amalgamirte und das reine Zink umgetauscht. Der Werth der electromotorischen Kraft betrug gleich nach dem Eintauchen etwas mehr als 0,01 D., und dann näherte sich derselbe fortwährend Null. Dabei verhielt sich das amalgamirte Zink negativ gegen das unamalgamirte.

Die letzten Versuche wurden auch in folgender veränderter Form durchgeführt. Der untere Theil eines Gefässes wurde mit der Zinksalzlösung und der obere Theil mit der gleichnamigen Säure gefüllt. Dieselben blieben wegen des Unterschiedes ihrer specifischen Gewichte voneinander gut getrennt; durch Anwendung eines Hebers konnte die Diffusion der Flüssigkeiten verhindert und dadurch die Trennung derselben gut beibehalten werden. Diese Anordnung der Versuche gab ähnliche Resultate. Nämlich, wenn das amalgamirte Zink in der Säure und das unamalgamirte in der Zinksalzlösung waren, wurde, wenn Schwefelsäure und schwefelsaures Zinkoxyd angewandt waren, e = + 0,0612 D., und wenn Essigsäure und essigsaures Zinkoxyd angewandt waren, e = + 0,0541 D. Auch wenn die Zinkstäbe umgetauscht wurden, war das Verhalten dasselbe wie bei den früheren Bestimmungen mit den aus zwei Flüssigkeiten bestehenden Elementen. Auch wurde der Werth der electromotorischen Kraft, als beide der angewandten Zinkstäbe amalgamirt waren, bestimmt; er war nie mehr als wenige Tausendstel eines Daniells von den Werthen verschieden, welche gefunden waren, als das amalgamirte Zink in der Säure und das un-

amalgamirte Zink in der gleichnamigen Zinksalzlösung standen; dieser Unterschied liess sich durch eine sehr kleine Veränderung der Oberfläche der Zinkstäbe erklären. Der Zinkstab, welcher in der Zinksalzlösung stand, verhielt sich negativ gegen den anderen. Wie man sieht, verhielt sich bei allen obigen Versuchen derjenige Zinkstab, welcher in der Zinksalzlösung stand, negativ gegen denjenigen, welcher in der Säure stand, gleichviel, welcher der beiden Zinkstäbe amalgamirt war.

Alle diese Bestimmungen sind in Uebereinstimmung mit der oben gemachten Vermuthung über den Ursprung der electromotorischen Kraft, wenn das reine und das amalgamirte Zink in einer Säure stehen. Die Maximalwerthe, welche eintraten, als beide Zinkstäbe in Säure standen, konnten wegen der in den verschiedenen Fällen ungleichen Diffusion nicht genauer mit denjenigen übereinstimmen, welche sich ergaben, wenn das amalgamirte Zink in Säure und das unamalgamirte in der gleichnamigen Zinksalzlösung standen. Auch konnte deswegen der Werth der electromotorischen Kraft, als das unamalgamirte Zink in der Säure und das amalgamirte in der Salzlösung stand, nicht gleich Null sein.

Bei den obigen Bestimmungen der electromotorischen Kraft, als beide Zinkstäbe in Säure gestellt waren, standen dieselben senkrecht. Die electromotorische Kraft wurde nun gemessen, als beide Zinkstäbe horizontal gestellt waren, der eine auf dem Boden des Gefässes und der andere nahe an der Oberfläche der Flüssigkeit. Als der unamalgamirte Zinkstab auf dem Boden war, nahm der Werth der electromotorischen Kraft bis zu einer gewissen Grenze zu. Dieser Werth blieb längere Zeit ziemlich constant und nahm dann langsam ab. Die erste Tabelle der folgenden Seite enthält ein Beispiel hiervon. (Siehe Fig. 16.)

In verdünnter Essigsäure war $e = + 0{,}0674$ D., nachdem der constante Werth erreicht wurde.

Wenn der amalgamirte Zinkstab der untere war, nahm der Werth der electromotorischen Kraft von dem nur wenige Hundertstel eines Daniells betragenden Werth, welcher, gleich nachdem die Zinkstäbe in die Flüssigkeit getaucht waren,

gefunden wurde, fortwährend ab. Das amalgamirte Zink verhielt sich dann positiv gegen das unamalgamirte.

Reines und amalgamirtes Zink in verdünnter Schwefelsäure.

t	e		t	e	
5 Min.	+0,0267 D.	siehe Curve III.	3 St. 37 Min.	+0,0645 D.	siehe Curve III.
10 „	+0,0292 „		4 „ 3 „	+0,0657 „	
31 „	+0,0396 „		4 „ 10 „	+0,0657 „	
1 St. 3 „	+0,0495 „		4 „ 20 „	+0,0658 „	
1 „ 33 „	+0,0559 „		4 „ 37 „	+0,0658 „	
1 „ 50 „	+0,0586 „		6 „ 7 „	+0,0651 „	
2 „ 22 „	+0,0621 „		18 „ 30 „	+0,0594 „	
2 „ 59 „	+0,0637 „				

Auch diese Versuche lassen sich aus der erwähnten Vermuthung erklären. Nämlich wenn der unamalgamirte Zinkstab der untere war, wurde die Säure in dem unteren Theil des Gefässes bald durch eine Zinksalzlösung ersetzt, und da diese specifisch schwerer als die Säure ist, war die Diffusion eine langsamere, als wenn die Zinkstäbe senkrecht standen, und deswegen wurde der Maximalwerth von *e* länger behalten.

Ein Versuch, um zu sehen, wie lange die Abnahme der electromotorischen Kraft fortdauerte, wurde mit Anwendung von Essigsäure gemacht. Die Zinkstäbe standen senkrecht. Das Resultat ist in der folgenden Tabelle angegeben. (Siehe Fig. 15.)

Reines und amalgamirtes Zink in verdünnter Essigsäure.

t	e		t	e	
10 Min.	+0,0305 D.	siehe Curve IV.	45 St. 50 Min.	+0,0175 D.	siehe Curve IV.
37 „	+0,0353 „		49 „ 35 „	+0,0159 „	
1 St. 22 „	+0,0371 „		57 „ — „	+0,0139 „	
2 „ 50 „	+0,0378 „		71 „ 30 „	+0,0123 „	
2 „ 57 „	+0,0370 „		76 „ 30 „	+0,0105 „	
8 „ 35 „	+0,0301 „		95 „ 20 „	+0,0099 „	
29 „ 40 „	+0,0205 „		121 „ 30 „	+0,0085 „	

Als die letzte Bestimmung gemacht wurde, hatte die electromotorische Kraft nicht ganz aufgehört abzunehmen, und aller Wahrscheinlichkeit nach dauerte diese Abnahme fort bis zu dem Werth, welcher gefunden wurde, als die Zinkstäbe in einer Lösung von essigsaurem Zinkoxyd standen.

Aus diesen Versuchen wird man wohl berechtigt sein, zu schliessen, dass amalgamirtes Zink sich in den Säuren positiv gegen unamalgamirtes Zink verhalte; der Grund desselben liegt aber nicht in dem Unterschied der electrischen Beschaffenheit desselben, sondern ist wenigstens hauptsächlich durch Umsetzung der Säure in Salze an der Oberfläche der Zinkstäbe veranlasst.

§. 3. Versuche über das Verhalten des Cadmiumamalgams.

Weil amalgamirtes Cadmium sich nach früheren Versuchen negativ gegen das reine Cadmium verhalten soll, habe ich auch einige Versuche über das Verhalten dieser beiden Metalle in Cadmiumsulfat ausgeführt.

Ebenso wie bei dem Zink erwiesen sich auch zwei Stücke des reinsten käuflichen Cadmiums, welche von derselben Stange genommen waren, in ihrer galvanischen Beschaffenheit als ungleich, und zwar war die Ungleichheit fast dieselbe wie bei Zink. Die Cadmiumstäbe wurden ausgeglichen, indem sie mit galvanisch niedergeschlagenem Cadmium überzogen wurden. Das Cadmium wurde aber nur auf Stangen destillirten Cadmiums niedergeschlagen. Die verschiedenen Stücke Cadmium waren dadurch ebenso gut ausgeglichen wie bei Anwendung derselben Methode die Zinkstäbe. Wegen der gemachten Erfahrung mit Zink benutzte ich gleich bei dem ersten Versuche zur Bestimmung der electromotorischen Kraft nur neutralisirte Lösungen von Cadmiumsulfat. Die electromotorische Kraft wurde auch hier bestimmt, sowohl als beide Cadmiumstäbe unamalgamirt waren, als auch nachdem der eine amalgamirt war. Ebenfalls wurden alle bei Zink benutzten Vorsichtsmaassregeln angewandt. Nachdem das amalgamirte und das reine Cadmium in die concentrirte Lösung von Cadmiumsulfat gestellt waren, veränderte sich die electromotorische Kraft ähnlich wie bei Zink während ungefähr einer Stunde; hierbei nahm die electromotorische Kraft zuweilen zu, zuweilen ab; dann wurde die electromotorische Kraft verhältnissmässig constant, nahm dann aber langsam ab bis zu einer Grenze, wo sie ganz constant blieb.

Die Oberfläche des amalgamirten Cadmiums war zuerst sehr glänzend, aber als die electromotorische Kraft abnahm, verlor dieselbe ihren Glanz, und es schien, als ob eine feste Verbindung des Cadmiums und des Quecksilbers entstanden war; amalgamirtes Zink hat sein Quecksilber ähnliches Aussehen immer beibehalten. In der nächstfolgenden Tabelle sind die angegebenen Werthe von e_2 diejenigen, welche gefunden wurden, nachdem die electromotorische Kraft verhältnissmässig constant wurde. e_1 und $e_2 - e_1$ haben dieselbe Bedeutung wie bei den entsprechenden Versuchen an Zinkstäben.

Cadmium in neutralisirter Lösung von Cadmiumsulfat.

Nr.	e_1	e_2	$e_2 - e_1$
1	+0,0001 D.	−0,0433 D.	−0,0434 D.
2	−0,0003 „	−0,0468 „	−0,0465 „
3	+0,0001 „	−0,0438 „	−0,0439 „
		Mittelwerth	−0,0446 D.

Diese Werthe von e_2 blieben während ungefähr einer Stunde ziemlich constant, die Veränderung derselben während dieser Zeit betrug nur 0,0001—0,0005 D.; dann nahm die electromotorische Kraft mit dem Verlust des Glanzes der Oberfläche des amalgamirten Cadmiums ab, und nachdem die Cadmiumstäbe zwei Tage in der Lösung von Cadmiumsulfat gestanden hatten, fand ich:

Nr.	1	2	3	
e_2	−0,0060	−0,0067	−0,0091	Mittelwerth −0,0073 D.

Diese Werthe blieben ganz constant, ich liess z. B. die Cadmiumstäbe No. 1, nachdem dieser constante Zustand eingetreten war, noch einen Tag in der Lösung von Cadmiumsulfat stehen, und e_2 wurde gleich — 0,0059 D.

Wenn man das amalgamirte Cadmium aufs neue amalgamirte, so wurde der Werth wieder ungefähr derselbe. Ich behandelte z. B. das zu Nr. 2 gehörende amalgamirte Cadmium in dieser Weise und erhielt e_2 gleich — 0,0450 D., es wurde aber nach einiger Zeit gleich — 0,0100. Aehnlich verhielt es sich, wenn die äusserste Schicht des amalgamirten

Cadmiums mit starker Säure abgefressen wurde. Die Oberfläche hatte dann wieder ein dem Quecksilber ähnliches Aussehen, und der Werth der electromotorischen Kraft wurde ungefähr der ursprüngliche. So wurde z. B. das zu Nr. 1 gehörende amalgamirte Cadmium in dieser Weise behandelt, und e_2 wurde dann gleich $-0{,}0398$ D. und nach einiger Zeit wieder $-0{,}0059$ D.

Aus diesen Versuchen wird man wohl berechtigt sein, zu schliessen:

In einer concentrirten neutralisirten Lösung von Cadmiumsulfat verhält sich das amalgamirte Cadmium negativ gegen das unamalgamirte Cadmium, und zwar ist der Potentialunterschied beider unmittelbar nach der Amalgamation ziemlich bedeutend, nimmt aber mit der Zeit ab, bis eine gewisse Grenze erreicht ist.

Berlin, Physik. Inst., August 1883.

IV. *Ueber die Wärme, welche durch periodisch wechselnde magnetisirende Kräfte im Eisen erzeugt wird; von E. Warburg und L. Hönig.*

(Festschrift der 56. Versamml. deutscher Naturforscher und Aerzte; mitgetheilt von den Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VIII Fig. 8—11.)

In einer Eisenmasse, welche man periodisch wechselnden magnetisirenden Kräften unterwirft, entsteht Wärme, und es ist diese Wärme von verschiedenen Physikern gemessen worden.[1])

1) Joule, Phil. Mag. 23. p. 263, 347, 435. 1843. — Van Breda, Compt. rend. 21. p. 961. 1846; Pogg. Ann. 68. p. 552. 1846. — Grove, Phil. Mag. 35. p. 153. 1849; Pogg. Ann. 78. p. 567. 1849. — Edlund, Pogg. Ann. 123. p. 205. 1864. — Villari, Nuovo Cimento, (2), 4. p. 287, 389. 1870. — Herwig, Wied. Ann. 4. p. 177. 1878. — Cazin, Ann. ch. et phys. (5) 6. p. 493—554. 1875. — Trowbridge, Proc. of the Americ. Academy of Arts and Science, new ser. 6. Boston 1879. p. 114—121. 1879. — Philleux, Compt. rend. 94. p. 946. 1882.

Denkt man sich den periodischen Wechsel der magnetisirenden Kraft durch periodische Bewegung permanenter Magnete hervorgebracht[1]) und nimmt an, dass ausser der betrachteten Eisenmasse keine Leiter der Electricität gegenwärtig seien, so erkennt man, dass die im Eisen erzeugte Wärme das Aequivalent der Arbeit A ist, welche aufgewendet wurde, um den periodischen Wechsel der magnetisirenden Kraft hervorzubringen. Es ist dabei die unseren Erfahrungen entsprechende Annahme gemacht, dass, wenn die magnetisirende Kraft einen Cyclus von Werthen durchlaufen hat, der Zustand der Eisenmasse dann unverändert geblieben ist, wenn durch Entziehung der producirten Wärmemenge die durch den Cyclus hervorgebrachte Temperaturerhöhung aufgehoben wird.

Jene Arbeit A lässt sich durch einen Ausdruck angeben, welcher sehr einfach ist in dem hier zu betrachtenden Fall, in welchem die magnetisirende Kraft über die Eisenmasse hin constant ist und sich während des Cyclus nur der Grösse und nicht der Richtung nach ändert. Sei nämlich k der Werth der magnetisirenden Kraft und m die Componente des magnetischen Momentes nach der Richtung von k, so ist:

(1) $$A = -\int m\,dk,$$

wo das Integral über den Cyclus hin von dem Anfangswerthe von k bis zu dem gleichen Endwerth hin zu erstrecken ist.

Nehmen wir den Bedingungen der Versuche entsprechend an, dass der Cyclus in zwei Theile zerfällt, in deren erstem k im Wachsen, in deren zweitem es im Abnehmen begriffen ist, so wäre $A = 0$, wenn das Moment m für dasselbe k dasselbe wäre, mag k im Wachsen oder im Abnehmen begriffen sein. Drei Ursachen bewirken jede für sich, dass für dasselbe k m grösser bei abnehmendem, als bei wachsendem k ist, dass folglich A einen positiven Werth erhält. Stellt man daher m als Function von k graphisch dar und nimmt

---

1) Warburg, Freiburg. Ber. 8. Heft 1. p. 1. 1880; Wied. Ann. 13. p. 141. 1881.

an, dass am Ende des Cyclus mit k auch m seinen ursprünglichen Werth wieder angenommen hat, so erhält man eine geschlossene Curve, und die von dieser begrenzte Fläche stellt A dem absoluten Werthe nach dar.

Von den genannten drei Ursachen ist die erste die Eigenschaft des Eisens, welche man die Coërcitivkraft nennt, und diese ist allein wirksam, wenn die Aenderung der magnetisirenden Kraft in dem Cyclus unendlich langsam vor sich geht. Für diesen Fall, nämlich für unendlich langsame Aenderung der magnetisirenden Kraft, kann man, wie ich a. a. O.[1]) gezeigt habe, A und somit die producirte Wärme durch statisch magnetische Versuche messen. Wir wollen im Folgenden allgemein die von der Coërcitivkraft allein herrührende Wärme die magnetische Frictionswärme nennen. Ob die magnetische Frictionswärme sich ändert, wenn der Cyclus mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird, und in welcher Weise sie von der Geschwindigkeit abhängt, lässt sich a priori nicht sagen und muss durch das Experiment entschieden werden.

Die zweite Ursache ist die Eigenschaft des Eisens, den electrischen Strom zu leiten, und diese tritt in Wirksamkeit, wenn die Aenderung der magnetisirenden Kraft in dem Cyclus mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt. Es bilden sich dann durch den Wechsel der magnetisirenden Kraft und besonders durch den von diesem bedingten wechselnden magnetischen Zustand des Eisens Ströme in der Masse desselben, welche beim Ansteigen der magnetisirenden Kraft das Ansteigen des magnetischen Momentes und beim Abfall der magnetisirenden Kraft den Abfall des magnetischen Momentes verzögern. Eine Folge davon ist, dass m für dasselbe k grösser ist bei fallendem als bei steigendem k. Die von der electrischen Leitungsfähigkeit des Eisens herrührende Wärme wollen wir die electromagnetische Wärme nennen.

Die dritte Ursache, auf welche ich durch einen Aufsatz

1) Warburg, Freiburg. Ber. 8. 1. p. 1. 1880; Wied. Ann. 13. p. 141. 1881.

von J. A. Ewing[1]) aufmerksam gemacht wurde, ist die Eigenschaft des Eisens, nach welcher die Magnetisirungszahl desselben mit der Temperatur veränderlich ist. Nach dem Carnot'schen Princip ergibt sich hieraus, wie W. Thomson gezeigt hat[2]), dass beim Magnetisiren eine Wärmeproduction oder Wärmeabsorption eintritt, je nachdem die Magnetisirungszahl mit wachsender Temperatur ab- oder zunimmt. Lässt man nun eine Eisenmasse, deren Zustand von zwei Variabeln, nämlich der Temperatur t und der nur der Grösse nach variablen magnetisirenden Kraft k abhängt, einen Kreisprocess durchmachen, so wird im allgemeinen das Integral $-\int m\,dk$ aus dem erwähnten Grunde einen positiven Werth haben und nur $= 0$ sein, wenn für den Cyclus eine feste Relation $f(t, k) = 0$ zwischen t und k besteht, wenn also z. B. der Kreisprocess bei constanter Temperatur oder ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung vor sich geht.

Aus den gemachten Auseinandersetzungen ergeben sich folgende Aufgaben:

1) Die durch den periodischen Wechsel der Magnetisirung producirte Wärme in Calorien mit Schärfe zu messen und in die drei Theile zu zerlegen, welche jeder der drei Ursachen der Wärmeproduction zufallen.

2) Den Antheil der beobachteten Wärme, welcher der magnetischen Frictionswärme zufällt, zu vergleichen mit der durch statische Versuche bestimmten magnetischen Frictionswärme für unendlich kleine Geschwindigkeit.

Durch Versuche von F. Himstedt[3]) über die Dämpfung schwingender Magnete durch Eisenplatten ist indirect erwiesen, dass bei sehr langsamer Aenderung der Magnetisirung (Dauer des Cyclus 20″) die magnetische Frictionswärme unabhängig ist von der Geschwindigkeit, mit welcher die Aenderung der Magnetisirung erfolgt. Ob aber, wenn die Aenderung der Magnetisirung in einem kleinen Bruchtheil einer Secunde erfolgt — wie z. B., wenn ein magnetisirender Strom

---

1) J. A. Ewing, Proc. Roy. Soc. 24. Nr. 220. p. 39. 1882.

2) W. Thomson, Phil. Mag. (5) 5. p. 25. 1878.

3) F. Himstedt, Wied. Ann. 14. p. 483. 1881.

geschlossen oder unterbrochen wird — die Unabhängigkeit der magnetischen Frictionswärme von der Geschwindigkeit bestehen bleibt, lässt sich ohne Experiment nicht entscheiden. Es ist daher gerade dieser Fall in der vorliegenden Arbeit der Untersuchung unterzogen worden. Die experimentellen Bestimmungen wurden von Hrn. L. Hönig im hiesigen Laboratorium gemacht.

§ 2. Gerade Eisenstäbe oder aus lackirten Eisendrähten oder Blechen gebildete Bündel befanden sich axial in einer Magnetisirungsspirale, deren Strom durch einen eingeschalteten, von einer besonderen Kette getriebenen Interruptor abwechselnd geschlossen und unterbrochen wurde. Dabei konnte durch passende Aenderung der Drahtverbindungen am Interruptor bewirkt werden, dass bei einer Schwingung des Interruptors entweder der Strom einmal geschlossen und einmal unterbrochen wurde, oder derselbe einmal geschlossen, unterbrochen und dann noch einmal in entgegengesetztem Sinne geschlossen und wieder unterbrochen wurde. Fig. 8 und 9 zeigen schematisch den Verlauf der magnetisirenden Kraft während eines Cyclus (Interruptorschwingung OA) in beiden Fällen.

Der erste Cyclus soll ein einfacher, der zweite ein Doppelcyclus heissen. Die Zahl der ganzen Schwingungen des Interruptors betrug 63 in 15″, konnte also durch Abzählen bestimmt werden.

Mit jedem Draht oder Drahtbündel wurden nun nach dem obigen Plane vier Bestimmungen ausgeführt: Erstens die in den beiden Fällen 1 und 2 in einem Cyclus producirte Wärme calorimetrisch gemessen. Zweitens die Arbeitswerthe $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ der den Cyclen entsprechenden magnetischen Frictionswärmen für unendlich kleine Geschwindigkeit magnetometrisch bestimmt.

§ 3. Die Bestimmung der Arbeitswerthe $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ wurde in der Weise ausgeführt, welche ich in einer früheren Arbeit[1]) beschrieben habe, und es ist darüber nur noch hin-

1) E. Warburg, Freiburg. Ber. 8. p. 1. 1880; Wied. Ann. 13. p. 141. 1881.

zuzufügen, dass bei den entsprechenden Versuchen des Hrn. Hönig nicht die Magnetisirungsspirale von 346 Windungen, 9,5 cm Durchmesser und 21,7 cm Länge benutzt wurde, welche zu den calorimetrischen Versuchen diente, sondern eine von 1979 Windungen und 50 cm Länge. Das Maximum der Stromintensität wurde dabei entsprechend kleiner genommen, so dass der grösste absolute Werth, bis zu welchem das magnetische Moment anstieg, in den calorimetrischen und magnetometrischen Versuchen der gleiche war. Da die Länge der symmetrisch zu den Spiralenenden eingelegten Drähte nur 12 cm betrug, so war das benutzte Magnetfeld sehr nahe homogen. Es wurden nun bei den magnetometrischen Versuchen für auf- und absteigende Werthe von k die Werthe des Momentes in der Richtung von k bestimmt und der Flächeninhalt der Arbeitscurven durch mechanische Quadratur ermittelt

§ 4. Erheblich grössere Schwierigkeiten bot die Bestimmung der bei dem Spiel des Interruptors producirten Wärmemenge dar. Von vorn herein erschien es für die Erzielung genauer Resultate unerlässlich, dass eine Einwirkung der in der Magnetisirungsspirale selbst producirten Wärme auf den calorimetrischen Apparat gänzlich ausgeschlossen sei, da im Vergleich zu dieser Wärme die zu messende äusserst klein war. Dies wurde in sehr vollständiger Weise durch eine Anordnung erreicht, welche von Schuller und Wartha[1]) beschrieben worden ist. Das Gefäss G des Calorimeters mit den Eisendrähten (s. Fig. 10) befand sich in einem mit eiskaltem Wasser W gefüllten, doppeltwandigen, lackirten Zinkblechgefäss Z_1, dessen innere Wandung mit einem etwa 2 cm dicken, aus reinem Wasser gebildeten Eiscylinder E ausgekleidet war. Dieser Eiscylinder wurde dadurch erzeugt, dass in das mit reinem Wasser gefüllte Gefäss Z_1 ein mit Kältemischung gefüllter Zinkcylinder von passender Weite eingeführt ward, während auch das Gefäss Z_1 in Kältemischung stand. Die Magnetisirungsspirale S befand sich zwischen den doppelten Wandungen des Zinkcylinders Z_1

1) Schuller u. Wartha, Wied. Ann. 2. p. 360. 1877.

und die Enden der Spirale traten bei L heraus. Z_1 war durch einen Deckel verschlossen, durch den die Röhren Q und V des Calorimeters hindurchtraten; er stand in einem weiteren Zinkblechgefäss Z_2, und der Zwischenraum zwischen Z_1 und Z_2 war mit reinem fein geschabten Eis angefüllt. Z_2 endlich stand in einer grossen mit Eis gefüllten Kiste K, über deren Eise nur die Theile Q, V, T und die Enden des Spiralendrahtes sichtbar waren.

Wurde unter diesen Umständen der magnetisirende Strom geschlossen gehalten, so blieb die Einstellung des Calorimeters, welches im wesentlichen ein sehr empfindliches Aetherthermometer darstellte, absolut constant. Dabei entsprach eine Veränderung der Einstellung um einen Scalentheil (Millimeter) etwa $^1/_{5000}{}^0$.

§ 5. Bei der Wahl des Calorimeters musste berücksichtigt werden, dass die totale zu messende Wärmemenge in einigen Fällen bis auf 0,05 Grammcalorien herabsank; es musste also jedenfalls gefordert werden, dass 0,001 Grammcalorien noch geschätzt werden könnten. Es sollte zu den Versuchen ein Dilatationscalorimeter benutzt werden; so nenne ich ein Calorimeter, bei welchem die zu bestimmende Wärmemenge einer calorimetrischen Substanz zugeführt und durch deren (positive oder negative) Dilatation gemessen wird. Die Dilatation rührt entweder daher, dass, wie z. B. bei dem Bunsen'schen Eiscalorimeter, die calorimetrische Substanz eine Aenderung ihres Aggregatzustandes, oder daher, dass sie eine Temperaturerhöhung erfährt. In beiden Fällen können wir die Volumänderung v in Cubikcentimetern, welche der zugeführten Wärme w in Grammcalorien entspricht:

$$(2) \qquad v = w \, . \, e$$

setzen. e, die einer Grammcalorie entsprechende Volumenänderung, ist die theoretische Empfindlichkeit. Die Volumenänderung v wird gemessen durch die Verschiebung eines Flüssigkeitsfadens in einer engen Röhre, dem Scalenrohr. Sei γ das Volumen in Cubikcentimetern, das 1 mm des Scalenrohres entspricht, δ die v entsprechende Längsverschiebung in Millimetern, so ist:

(3) $$v = \gamma \, . \, \delta, \qquad \delta = w \cdot \frac{e}{\gamma} = w \, . \, \varepsilon \, .$$

ε, die Längsverschiebung in Millimetern für eine Grammcalorie, ist die praktische Empfindlichkeit. Dieselbe ist um so grösser, je kleiner γ, oder je enger das Scalenrohr. Die Grenze, bis zu welcher der Durchmesser des Scalenrohres ohne Nachtheil vermindert werden kann, ist aber bei den verschiedenen Methoden aus praktischen Gründen eine verschiedene. Verstehen wir daher in Gleichung (3) unter γ den kleinsten Werth, welchen man jedesmal dieser Grösse geben darf, so ist ε die praktische Empfindlichkeit eines Calorimeters, in welchem die betreffende Substanz benutzt wird.

Für das Bunsen'sche Eiscalorimeter ist:

(4) $$e = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\lambda},$$

wo λ die latente Schmelzwärme des Eises, σ_1 und σ_2 die specifischen Volumina des Eises und des Wassers von 0° bedeuten.

Ein Dampfcalorimeter könnte man ein Calorimeter nennen, bei welchem die zu bestimmende Wärmemenge, verwandt um unter constantem Drucke eine tropfbare Flüssigkeit, etwa Wasser von 0°, zu verdampfen, durch die Volumenänderung beim Verdampfen gemessen würde. Für ein solches Wasserdampfcalorimeter würde auch der Ausdruck (4) gelten, wenn unter λ die latente Verdampfungswärme bei 0° und unter σ_2 und σ_1 die specifischen Volumina des tropfbaren und dampfförmigen Wassers unter dem Drucke der Sättigung verstanden werden.

Für ein Calorimeter, bei welchem die zu messende Wärme verwandt wird, um die Temperatur der calorimetrischen Substanz zu erhöhen, hat man, abgesehen von der Correction wegen Wärmeverlustes:

(5) $$e = \frac{\alpha}{c \, . \, \Delta},$$

wo α den Ausdehnungscoëfficienten, c die specifische Wärme und Δ die Dichte bedeutet.

Was die zulässigen Werthe von γ bei den verschiedenen

Methoden betrifft, so zeigten sich beim Bunsen'schen Eiscalorimeter schon für $\gamma = 0{,}000\,064\,1$ ccm Nachtheile durch die Trägheit des Quecksilberfadens.[1])

Beim Luftcalorimeter muss man einen beiderseits begrenzten Flüssigkeitsindex anwenden, etwa einen dünnen Aetherfaden hinter einem dickeren Petroleumfaden. Schon für $\gamma = 0{,}000\,135$ ccm musste wegen der Trägheit des Fadens durch Klopfen nachgeholfen werden.

Bei einem Aethercalorimeter, dessen ganz mit Aether gefülltes Gefäss sich in eine Capillare mit $\gamma = 0{,}000\,014\,23$ ccm fortsetzte, wurde noch gar keine Trägheit des Fadens beobachtet. Nach diesen Angaben ist die folgende Tabelle zusammengestellt, welche eine Uebersicht der theoretischen (e) und praktischen (ε) Empfindlichkeit verschiedener Dilatationscalorimeter gibt.

Tabelle I.

	e	γ	ε
Wasser 0°	0,00014	0,000 014 23	9,85
Eiscalorimeter	0,0014	0,000 077 33	14,7
Aether 0°	0,0040	0,000 014 23	281
Luft	11,9	0,000 135	88148
Wasserdampfcalorimeter 0°	338,8	—	—

Die Empfindlichkeit des Eiscalorimeters in seiner bisherigen Form erweist sich hiernach für unseren Zweck zu klein; da ferner Drähte von 12 cm Länge dem Versuche unterworfen werden sollten, so hätte man dem Calorimeter eine unverhältnissmässige Länge geben müssen, wenn nicht wesentliche Vortheile derselben verloren gehen sollten.

Bemühungen, ein Dampfcalorimeter zu construiren, blieben erfolglos.

Cazin[2]) hat zu Bestimmungen der vorliegenden Art ein Luftcalorimeter benutzt. Hr. Hönig hat systematische Ver-

---

1) Vgl. Bunsen, Pogg. Ann. **141.** p. 1. 1870. Vielleicht könnte man diesen Uebelstand dadurch vermindern, dass man hinter einem weiteren, mit Quecksilber gefüllten Rohr ein engeres mit einem Aetherfaden als Index anbringt.

2) Cazin, Ann. de chim. et de phys. (5) **6.** p. 493—554. 1875.

suche mit verschieden gebauten, auch nach der Differentialmethode eingerichteten Luftcalorimetern angestellt, aber keine constanten Resultate erlangen können. Als Ursache der variablen Angaben eines solchen Instrumentes stellten sich geringe Feuchtigkeitsmengen heraus, wie sie bei Versuchen der vorliegenden Art sehr schwer zu vermeiden sind. Wie grosse Fehler kleine bei Wärmezufuhr verdampfende Flüssigkeitsmengen bedingen können, geht aus der äusserst grossen Empfindlichkeit des Dampfcalorimeters hervor (s. Tab. I).

Ein Aethercalorimeter, dessen Empfindlichkeit nach Tab. I hinreichend gross genug gemacht werden kann, ergab sich schliesslich als das den vorliegenden Anforderungen am meisten entsprechende Instrument. Die Angaben desselben erwiesen sich bei passender Construction als völlig constant; auch die Correction wegen des Wärmeverlustes liess sich bestimmen, allerdings nicht mit der den sicheren Angaben selbst entsprechenden Schärfe.

§ 6. Das Calorimeter (s. Fig. 10) stellt in seinen wesentlichen Theilen ein grosses Aetherthermometer dar, dessen etwa 50 ccm fassendes Gefäss *G* sich in eine Capillare *C* von 0,0673 mm Radius fortsetzt; 1 mm der Capillare entspricht 0,000 014 23 ccm. Die Bewegungen des Aethermeniskus werden an der transparenten, von hinten beleuchteten Scala *T* mit Lupe beobachtet. Die zerbrechliche Capillare wird geschützt durch ein sie umgebendes Rohr *V*, welches mit seinem unteren Ende an das Gefäss *G* angeschmolzen ist. Durch eine über die Capillare gestülpte, nicht dicht schliessende Kappe wird der Aether hinreichend am Verdampfen gehindert. Die Eisenmassen, welche dem Versuche unterworfen wurden, befanden sich in der Axe des Gefässes *G*; sie waren zum Schutze gegen Angriff durch den Aether in einen sehr dünnwandigen zugeschmolzenen Glascylinder *R* eingeschlossen und wurden in demselben durch ein wenig Glaswolle fixirt. Der Glascylinder wurde durch angeschmolzene Zäpfchen *a* in der Axe des Gefässes *G* gehalten. An den Hals von *G* ist bei *P* ein U-förmig gebogenes Rohr *Q* mit dem Glashahne *H* angesetzt. Da Verschlüsse durch Kautschuk, Kork oder Glasschliffe hier gar nicht zu brauchen

sind, so wurde, um neue Eisenmassen einzuführen, jedesmal das Calorimeter von Aether entleert, das Gefäss *G* unten geöffnet und die alten Eisenmassen gegen die neuen vertauscht; sodann wurde unten wieder zugeschmolzen und das Calorimeter frisch mit Aether gefüllt. Dazu saugte man Luft aus dem oberen Ende der Capillare durch eine Luftpumpe heraus und zog Aether durch das Rohr *Q* ein.

Ist das Gefäss *G* ganz mit Aether gefüllt, so wird in *Q* Quecksilber eingegossen, bis dasselbe in dem einen Schenkel des U bis *m*, in dem anderen bis über den Hahn *H* reicht, und der überschüssige Aether oberhalb des Quecksilbers in *Q* entfernt. Oeffnet man den Hahn *H*, so wird durch den Druck des Quecksilbers der Aether in der Capillare in die Höhe getrieben. Hierdurch ist es erstens möglich, jede Luftblase zu entfernen, die am Eingange der Capillare sich bildet, und sodann den Meniskus in der Capillare durch Heben passend einzustellen. Steht er zu hoch, so wird etwas Aether durch Erwärmen und Verdampfen entfernt. Erst nachdem das seitliche Rohr *Q* angebracht war, ist das Calorimeter zu einem brauchbaren, leicht zu handhabenden Instrumente geworden.

§ 7. Bei den Versuchen wurde folgendermassen verfahren. Nachdem das Calorimeter eine unveränderliche Einstellung angenommen hatte, wurde der Interruptor in Thätigkeit gesetzt, eine passende Zeit hindurch (gewöhnlich 3 Minuten lang) in Bewegung gehalten und von Minute zu Minute der Stand des Aethermeniskus abgelesen. Die Ablesungen wurden, nachdem der Interruptor angehalten war, fortgesetzt, gewöhnlich so lange, bis der Meniskus seine Anfangsstellung wieder angenommen hatte. Fig. 11 (Curve v') zeigt für einen Versuch die beobachtete Volumenvermehrung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit. Man sieht, dass, nachdem der Interruptor angehalten worden war, noch eine weitere Volumenvermehrung in den nächsten zwei Minuten eintrat. Dies rührt daher, dass dann noch Wärme von dem Eisen durch das Glas hindurch dem Aether mitgetheilt wurde, und zwar in den ersten Minuten mehr Wärme, als dem Aether durch das umgebende Eiswasser entzogen wurde.

Würde nun während der Dauer des Versuches der Aether keine Wärme nach aussen abgeben, so würde die producirte Wärme w nach der Formel:

$$w = \frac{v \cdot c \cdot \Delta}{\alpha} \tag{6}$$

in der Bezeichnung der Gleichung (5) zu berechnen sein, wenn v die ganze beobachtete Volumenvermehrung bedeutet. Es findet aber während des Versuches eine Wärmeabgabe nach aussen an das Eiswasser statt, und es ist daher die beobachtete Volumenvermehrung v' kleiner als v. Um v aus v' zu finden, verfuhr man folgendermassen. Die Eisenmassen wurden aus dem Calorimeter entfernt und durch eine sehr dünndrähtige Platinspirale von dem Durchmesser und der Länge des das Eisen umschliessenden Glasrohres ersetzt. Dieser Platinspirale konnte durch einen hindurchgeleiteten Strom eine passende Wärmemenge mitgetheilt werden. In diesem Falle kann man annehmen, dass in unmerklich kurzer Zeit die ganze producirte Wärme an den Aether abgegeben wird. Sollte nun z. B. die Wärmenge bestimmt werden, welche während der vierten Minute des obigen Versuches nach aussen abgegeben wurde, bezüglich die dadurch erzeugte Volumenverminderung γ, so regulirte man zunächst die Stromintensität so, dass nach Ablauf der dritten Minute dieselbe Volumenvermehrung eingetreten war, wie nach Ablauf der dritten Minute des obigen Versuches. Am Ende der dritten Minute wurde dann der Strom unterbrochen und die in der nächsten Minute durch Abkühlung eintretende Volumenverminderung am Aethermeniskus beobachtet, sie sei γ_3. Sodann wurde γ_4 bestimmt, dessen Bedeutung aus der Bedeutung von γ_3 folgt, und nun angenommen:

$$\gamma = \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{2}.$$

Diese Annahme ist nicht ganz genau, weil bei gleicher mittlerer Temperatur der Aethermasse die Wärmevertheilung in dem Hauptversuche eine andere war, als in dem Hülfsversuche; die Correction wird nach der benutzten Methode zu gross ausfallen, weil in dem Hülfsversuche die Wärmewelle weiter fortgeschritten ist, als in dem Hauptversuche.

Es wurden nun die den verschiedenen Minuten entsprechenden Werthe von γ über derselben Zeitabscissenaxe wie die Werthe von v' aufgetragen und jene diesen hinzugefügt. Man erhielt so eine zweite Curve, welche als die Curve der v angesehen wurde; der dem höchsten Punkte dieser Curve entsprechende Werth von v wurde sodann in die Gleichung (6) eingeführt und aus ihr die gesuchte Grösse w berechnet.

Die Werthe α, c, Δ wurden für den benutzten Aether experimentell bestimmt, α durch ein Dilatometer, Δ durch das Pyknometer, c nach der Abkühlungsmethode.

§ 8. Von der ausführlichen Mittheilung der Versuchsresultate des Hrn. Hönig nehme ich hier Abstand, weil ich diese Resultate aus verschiedenen Gründen nur als provisorische betrachten kann. Es haben sich mir u. a Zweifel an der Genauigkeit der für den benutzten Aether ermittelten Constanten ergeben, welche Zweifel nicht zu heben waren, da der benutzte Aether nicht mehr vorhanden war. Im ganzen und grossen aber möchte ich für die Richtigkeit der Resultate garantiren, da ich eine Versuchsreihe selbst vollständig durchgeführt und berechnet habe, und mein Resultat im ganzen mit dem des Hrn. Hönig übereinstimmte. Aus dem angeführten Grunde beschränke ich mich auf die Mittheilung der Endresultate, welche in der folgenden Tab. II vereinigt sind. Mit jedem Stabe oder Bündel wurden nach dem geschilderten Plane je zwei doppelte Versuchsreihen ausgeführt. Die erste Reihe (1) betrifft den einfachen Cyklus, in welchem die magnetisirende Kraft zwischen 0 und $+k$ variirte. F_1 bedeutet die durch statische Versuche bestimmte magnetische Frictionswärme für unendlich kleine Geschwindigkeit, W_1 die bei den Versuchen mit dem Interruptor calorimetrisch bestimmte Wärmemenge; beide Wärmemengen sind gerechnet für einen Cyklus und für das Gramm Eisen und angegeben in Milliontel Grammcalorien. Die zweite Reihe (2) betrifft den entsprechenden Doppelcyklus, in welchem die magnetisirende Kraft zwischen $-k$ und $+k$ variirte. F_2 und W_2 haben für diesen Fall dieselbe Bedeutung, wie F_1 und W_1 für den ersten Fall. k war jedesmal wenig ver-

schieden von dem 170fachen der Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft in Freiburg. In die Tabelle sind noch die Verhältnisse F_2/F_1, W_2/W_1, W_1/F_1, W_2/F_2 aufgenommen. Es bedeutet N die Anzahl der Drähte im Bündel, μ die Masse des Bündels. Die Radien der Drähte betrugen:

bei Bündel I . .	0,011 cm	bei Stab I . .	0,4 cm
„ „ II . .	0,034 „	„ „ II . .	0,7 „ .

Bündel III war aus Streifen dünnen Eisenbleches gebildet; die Dicke des Bleches betrug 0,0165 cm, die Breite des Streifens 0,7 cm. Sämmtliche Bündel und Drähte waren 12 cm lang.

Tabelle II.

	N	μ	F_1	W_1	F_2	W_2	$\frac{F_2}{F_1}$	$\frac{W_2}{W_1}$	$\frac{W_1}{F_1}$	$\frac{W_2}{F_2}$
		g								
Bündel I .	370	14,77	9,2	5,3	28,0	17,6	3,04	3,32	0,58	0,63
Bündel II .	150	14,47	4,9	5,2	17,6	17,4	3,59	3,35	1,06	0,99
Stab I .	1	13,01	5,1	13,3	18,9	46,0	3,71	3,46	2,61	2,43
Stab II .	1	39,32	0,40	5,6	1,60	10,1	4,00	1,80	14,0	6,31
Bündel III .	–	13,00	3,7	2,4	12,0	7,8	3,24	3,25	0,65	0,65

§ 9. Aus den hier nicht mitgetheilten Tabellen, welche die magnetischen Momente in ihrer Abhängigkeit von der magnetisirenden Kraft zeigen, ergibt sich erstens, dass der Sättigungsgrad, bis zu welchem die Magnetisirung fortschritt, im allgemeinen etwa dem Wendepunkt[1]) entsprach, bei welchem nahezu die mittlere Intensität der Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional ist; es sind dabei die Werthe des magnetischen Momentes für aufsteigende magnetisirende Kräfte zu Grunde gelegt. Die mittlere Magnetisirungszahl, d. i. der Quotient aus dem mittleren in der Volumeneinheit vorhandenen Moment in die dabei wirkende magnetisirende Kraft ergibt sich für den grössten vorkommenden Werth der magnetisirenden Kraft (dem 170fachen der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus) bei

1) G. Wiedemann, Galvanismus. 2. Aufl. 2. p. 352—54.

Bündel I	. .	zu 21,7	Stab I	. .	zu 12,9
„ II	. .	„ 20,8	„ II	. .	„ 7,2

Bündel III aus Blechen zu 20,1.

Dass die Magnetisirungszahl bei den hier vorkommenden Sättigungsgraden für Bündel aus dünnen Drähten sich grösser als für massive Stäbe ergibt, entspricht Erfahrungen von von Waltenhofen.[1])

§ 10. Wäre die Coërcitivkraft Null, und rührte die Wärme in den calorimetrischen Versuchen nur von der electrischen Leitungsfähigkeit des Eisens her, so müsste offenbar $W_2/W_1 = 2$ oder die Wärme des Doppelcyclus das Doppelte der Wärme des einfachen Cyclus sein. Dieses Verhalten zeigt nahezu, seinem magnetischen Verhalten entsprechend, der dicke Stab II. Hier ist sogar $W_2/W_1 < 2$, wofür ich eine Erklärung nicht zu geben weiss.

Für die anderen Eisenmassen ist jenes Verhältniss $W_2/W_1 > 2$. Es ist dies eine doppelte Folge der Coërcitivkraft, erstens eine directe, indem von dieser Kraft die magnetische Frictionswärme herrührt, zweitens eine indirecte, indem bei wechselnder Richtung der magnetisirenden Kraft nicht nur der temporäre, sondern auch der permanente Magnetismus das Zeichen wechselt; aus diesem Grunde muss die electromagnetische Wärme in jedem der beiden Theile des Doppelcyclus grösser sein, als in dem einfachen Cyclus.

Um diesen Punkt durch ein directes Experiment zu beweisen, wurde mit jeder der benutzten Eisenmassen noch folgender Versuch angestellt. Dieselben wurden in eine eng an sie anschliessende Spirale *S* von 400 bis 500 Windungen und einem Widerstand von 6,5 bis 8,5 S.-E. eingelegt, in deren Schliessungskreis eine Platinspirale von 25,5 S.-E. Widerstand eingeschaltet war; diese Platinspirale befand sich in einem Aethercalorimeter der beschriebenen Art. Die von der Spirale *S* umgebenen Eisenmassen wurden nun genau wie bei den früheren Versuchen in die Magnetisirungsspirale *Z* eingeführt und die beim Spiel des

1) von Waltenhofen, Wien. Ber. **61.** II. Abth. 1870.

Interruptors in dem Platindraht erzeugten Wärmemengen G_1 und G_2 für den einfachen und für den Doppelcyclus gemessen. Die folgende Tabelle enthält die Resultate dieser Versuche.

Tabelle III.

	$\frac{G_2}{G_1}$	$\frac{W_1}{W_2}$
Bündel I .	3,04	3,32
Bündel II .	2,40	3,35
Stab I .	2,50	3,46
Stab II .	1,80	1,80
Bündel III .	2,20	3,25

Für den Stab II ergibt sich $G_2 / G_1 = W_2 / W_1$; für die anderen Eisenmassen ist $G_2/G_1 > 2$, wodurch die indirecte Wirkung der Coërcitivkraft auf die electromagnetische Wärme dargelegt ist.

Bei diesen Versuchen wurde noch mittelst des Disjunctors die electromagnetische Wärme des Schliessungs- und Oeffnungsstromes für den einfachen Cyclus getrennt untersucht. Es ergaben sich beide Wärmemengen genau gleich. Auch hatte die Einschaltung des Fizeau'schen Condensators keinen Einfluss auf die erregte Wärme, obgleich durch denselben der Oeffnungsfunke am Disjunctor fast ganz zum Verschwinden gebracht wurde. Bei der Beurtheilung dieser Ergebnisse muss man sich erinnern, dass die Magnetisirungsspirale sich innerhalb des doppeltwandigen Zinkcylinders befand, dass also auf beiden Seiten derselben dicht an ihr ein geschlossener metallischer Cylinder vorhanden war.

§ 11. Wir müssen jetzt zu ermitteln suchen, welche Antheile der wirklich beobachteten Wärmemengen W_1 und W_2 den § 1 erörterten drei Ursachen der Wärmeproduction zuzuschreiben sind.

Was zunächst die Wärmeproduction durch den Thomson'schen Effect anlangt, so lässt sich zeigen, dass diese bei den vorliegenden Versuchen keinen merklichen Beitrag zu der wirklich beobachteten Wärme liefert. Ist nämlich dw die Wärme, welche einer Eisenmasse wie der in § 1 be-

trachteten zugeführt werden muss, wenn die magnetisirende Kraft k um dk und die absolute Temperatur T um dT wachsen soll, und setzen wir:

$$dw = Mdk + NdT, \tag{7}$$

so gibt das Carnot'sche Princip in Verbindung mit dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie:

$$M = \frac{T}{J} \cdot \frac{\partial m}{\partial T}, \tag{8}$$

wenn m das magnetische Moment bedeutet, und J das mechanische Wärmeäquivalent in absolutem Maass ist.

Für eine adiabatische Zustandsänderung ist:

$$dT = -\frac{M}{N} dk. \tag{9}$$

M kann erfahrungsgemäss als eine mit einem sehr kleinen numerischen Factor behaftete Grösse angesehen werden. Daher können wir in erster Annäherung N als unabhängig von T und k betrachten und haben:

$$N = c \,.\, v \,.\, \sigma, \tag{10}$$

wo c die specifische Wärme, v das Volumen und σ die Dichte der Eisenmasse ist.

Setzen wir ferner:

$$m = \vartheta_0 (1 + \beta t) \,.\, k \,.\, v, \qquad \text{so ist:} \tag{11}$$

$$\frac{\partial m}{\partial T} = \vartheta_0 \,.\, \beta \,.\, k \,.\, v, \qquad \text{folglich:} \tag{12}$$

$$M = \frac{T}{J} \cdot \vartheta_0 \beta \,.\, k \,.\, v \,. \tag{13}$$

Sei:

$$2f = \frac{\vartheta_0 \beta}{J \,.\, c \,.\, \sigma}, \tag{14}$$

so folgt aus (9) in Verbindung mit (10) und (13) für die adiabatische Zustandsänderung:

$$T = T_0 \,.\, e^{-f(k^2 - k_0^2)} \tag{15}$$

oder für $k_0 = 0$:

$$T = T_0 \,.\, e^{-f.k^2} \tag{15$_a$}$$

oder endlich, da $f.k^2$ eine sehr kleine Zahl ist, hinreichend genau:

$$T - T_0 = - T_0 \,.\, f \,.\, k^2. \tag{15$_b$}$$

Betrachten wir nun den einfachen Cyclus, so ist die grösste Temperaturänderung Θ, welche beim Wachsen von k eintreten kann, die, welche sich aus (15$_b$) ergibt, wenn für k

der grösste Werth der magnetisirenden Kraft gesetzt wird. Die gleiche und entgegengesetzte Temperaturänderung wird entstehen, wenn k bis 0 wieder abnimmt. Daraus folgt, dass die Temperaturdifferenz für dasselbe k im Cyclus den Werth $2\,\Theta$ nicht überschreiten kann, und folglich die Differenz y der magnetischen Momente bezogen auf das Gramm Eisen für dasselbe k:

$$y < \frac{\vartheta_0 . k}{\sigma} . 2\beta . \Theta . \tag{16}$$

Daher ist der Flächeninhalt A_1 der Arbeitscurve für den Cyclus:

$$A_1 < \int y\,dk,$$

$$A_1 < \frac{\vartheta_0 . k^2}{\sigma} . \beta . \Theta . \tag{17}$$

Nach G. Wiedemann[1]) nimmt das temporäre Moment eines Eisenstabes bei einer Temperaturerhöhung von 20° auf 100° um $^1/_2$ Proc. ab. Setzt man dementsprechend $\beta = -1/10^4$, ferner $\vartheta_0 = 20$, $c = 0{,}114$, $\sigma = 7{,}7$, $J = 42500 . 981$, so wird $\Theta = 8{,}6/10^6$ Centigrad und $A_1 < 2{,}6/10^6$, während der Arbeitswerth der wirklich beobachteten Wärme 100 absolute Einheiten und mehr betrug.

§ 12. Es bleibt noch übrig, die electromagnetische Wärme von der magnetischen Frictionswärme zu trennen. Ich will zu dem Ende versuchen, einen oberen Grenzwerth der electromagnetischen Wärme aus der Theorie herzuleiten.

Vernachlässigt man die electrische Selbstinduction im Eisen, so wird man einen zu grossen Werth der electromagnetischen Wärme erhalten. Denkt man sich anstatt eines begrenzten Eisencylinders in einem begrenzten Solenoid einen unbegrenzten Cylinder in einem unbegrenzten Solenoid, so wird man für ein Stück des unbegrenzten Cylinders von der Länge des begrenzten ebenfalls einen grösseren Werth der electromagnetischen Wärme erhalten. Hiernach ist zunächst folgende Aufgabe zu behandeln: In einem unendlichen Solenoid befindet sich conaxial mit demselben ein unendlich langer massiver Eisencylinder. Der Strom im Solenoid sei variabel; es soll mit Vernachlässigung der Selbstinduction die electromagnetische Wärme berechnet werden, welche im Eisen entwickelt wird.

---

1) Wiedemann, Galvanismus. 2. Aufl. 2. p. 604.

Die Z-Axe sei die Solenoidaxe, dann sind die Componenten des Vectorpotentials im Punkt x, y, z im Innern:

$$(18)\qquad F = -2\pi n' i' y;\quad G = 2\pi n' i' x;\quad H = 0,$$

wenn n' die Windungszahl per Längeneinheit, i' die Stromintensität im Solenoid in electromagnetischem Maass ist.

Sieht man ab von der Gegenwirkung des inducirten Magnetismus gegen die Magnetisirung, so sind die Componenten des von der Magnetisirung herrührenden Vectorpotentials im Innern des Eisens:

$$(19)\qquad F' = -4\pi\vartheta . 2\pi n' y i';\quad G' = 4\pi\vartheta . 2\pi n' x . i';\quad H' = 0,$$

wenn ϑ die Magnetisirungszahl bedeutet.

Sind u, v, w die Stromcomponenten im Punkt x, y, z des Eisens, $\varkappa$ dessen specifischer Leitungswiderstand, φ die Potentialfunction der freien Electricität, so ist:

$$(20)\qquad \begin{cases} \varkappa u = \quad 2\pi n' y \dfrac{di'}{dt}(1 + 4\pi\vartheta) - \alpha \cdot \dfrac{d\varphi}{dx} \\ \varkappa v = -2\pi n' x \dfrac{di'}{dt}(1 + 4\pi\vartheta) - \alpha \cdot \dfrac{d\varphi}{dy} \\ \varkappa w = -\dfrac{d\varphi}{dz} \cdot \alpha. \end{cases}$$

Durch Benutzung der Oberflächenbedingung für φ an der Mantelfläche des Cylinders ergibt sich in bekannter Weise φ constant, daher:

$$(21)\qquad \begin{cases} \varkappa . u = \quad 2\pi n' y \cdot \dfrac{di'}{dt}(1 + 4\pi\vartheta) \\ \varkappa . v = -2\pi n' x \cdot \dfrac{di'}{dt}(1 + 4\pi\vartheta). \end{cases}$$

Fallen Cylinderaxe und Solenoidaxe nicht zusammen, so tritt freie Electricität auf. Wäre di'/dt constant, so würden dennoch für den stationären Zustand die Strömungen ungeändert bleiben. Thatsächlich ist das nicht der Fall, aber die Aenderung der Strömungen, wie mir Hr. Lorberg mittheilte, unter den Versuchsbedingungen völlig zu vernachlässigen.

Ist q die Resultante von u und v, so ist:

$$(22)\qquad \varkappa^2 q^2 = 4\pi^2 n'^2 (1 + 4\pi\vartheta)^2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{di'}{dt}\right)^2,\quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Führt man cylindrische Coordinaten r, φ, z ein, so ist die in dem Raumelement $r\, d\varphi\, dr\, dz$ entwickelte Wärme in

absolutem Maass $q^2\varkappa . r\,d\varphi\,dr\,dz$, woraus die im Cylinder entwickelte Wärme durch Integration über den Cylinder gefunden wird.

Es werde nun der Strom im Solenoid zur Zeit 0 geschlossen, dann ist die im Eisen durch die Schliessungsinduction entwickelte Wärme:

$$(23) \qquad E'_s = \frac{1}{\varkappa}\cdot(1 + 4\pi\vartheta)^2 . n'^2 . 2\pi\cdot\frac{v^2}{l}\cdot\int\limits_0^\infty\left(\frac{di'}{dt}\right)^2\cdot dt,$$

wenn v das Volumen, l die Länge des Cylinders bedeutet.

Vernachlässigt man die Wirkung benachbarter Leiter auf die Schliessungsinduction im Solenoid, so ist:

$$(24) \qquad \int\limits_0^\infty\left(\frac{di'}{dt}\right)^2\cdot dt = \tfrac{1}{2}\, i'^2_0\cdot\frac{w}{P},$$

wenn w der Widerstand des Solenoids, P dessen Potential auf sich selbst und i'_0 die definitive Stromintensität ist. Da weiter, wie aus den Versuchen des § 10 hervorgeht, die electromagnetische Wärme der Oeffnungsinduction der der Schliessungsinduction in unserem Fall gleich kommt, so ist die electromagnetische Wärme für den Cyclus und den einzelnen Draht:

$$(25) \qquad E' = 2 . E'_s .$$

Daraus ergibt sich endlich die auf die Masseneinheit bezogene electromagnetische Wärme in calorischem Maass für den einfachen Cyclus und ein Bündel von N Drähten und der Gesammtmasse μ, wenn noch J das mechanische Wärmeäquivalent in absolutem Maass ist:

$$(26) \qquad E_1 = \frac{1}{\varkappa}\cdot(1 + 4\pi\,\vartheta)^2 . n'^2 . 2\pi\cdot\frac{\mu}{N}\cdot\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{l}\cdot i'^2_0\cdot\frac{w}{P}\cdot\frac{1}{J}\cdot$$

Die Data für die numerische Rechnung sind im C.-G.-S-System: $\varkappa$[1]) $= 10^5 . 1{,}0615 . 0{,}099 = 10500.$

$n' = 346/21{,}7,\quad \sigma = 7{,}7,\quad l = 12,\quad i'_0 = 0{,}176,$

w[2]) $= 6{,}07 . 10^9,\quad P = 368 . 10^4,\quad J = 981 . 42500.$

1) Der specifische Leitungswiderstand des Eisens in Bezug auf Quecksilber ist 0,099, Ohm/S.-E. = 1,0615 gesetzt (W. Siemens, Electr.-techn. Zeitschr.)

2) w war 5,725 S.-E.

Mit diesen Werthen wird:

$$E_1 = \frac{0{,}0109}{J} \cdot (1 + 4\pi\vartheta)^2 \cdot \frac{\mu}{N},$$

und es ist dies ein oberer Grenzwerth für E_1.

Die electromagnetische Wärme E_2 für den Doppelcyclus ist grösser als $2E_1$; ich setze:

$$(27) \qquad E_2 = E_1 \cdot \frac{G_2}{G_1} \text{ (s. Tab. III).}$$

Bei der Bestimmung der Magnetisirungszahl ϑ ist der durch die jeweilige magnetisirende Kraft dem permanenten hinzugefügte Magnetismus zu berücksichtigen. Ich finde so für:

	ϑ		ϑ
Bündel I	18,6	Stab I	11,6
Bündel II	18,2	Stab II	6,9

Diesen Angaben gemäss sind die Werthe von E_2 in der folgenden Tabelle IV berechnet.

Tabelle IV.

	E_1	W_1	E_2	W_2	$\frac{E_1}{W_1}$	$\frac{E_2}{W_2}$
Bündel I . .	0,58	5,3	1,76	17,6	0,11	0,10
Bündel II . .	1,34	5,2	3,22	17,4	0,26	0,19
Stab I . .	73,3	13,3	183,3	46,0	5,5	4,0
Stab II . .	78,0	5,6	140,4	10,1	13,9	13,9

§ 13. Aus dieser Tabelle ergeben sich in Verbindung mit Tab. II folgende Schlüsse:

1. Das Ansteigen des Verhältnisses W/F (Tab. II) mit wachsender Dicke der Drähte findet durch das Ansteigen des Verhältnisses E/W, d. h. durch die mit wachsender Dicke mehr und mehr hervortretende electromagnetische Wärme seine hinreichende Erklärung (Tab. IV).

2. Für Bündel I ist die electromagnetische Wärme jedenfalls kleiner als 10 und 11 Proc., für Bündel II kleiner als 26 und 19 Proc. der ganzen beobachteten Wärme bezüglich für den einfachen und den Doppelcyclus; der weitaus grösste Theil der wirklich beobachteten Wärme ist also in diesen Fällen magnetische Frictionswärme (Tab. IV).

3. Die wirklich beobachtete Wärme W ist für Bündel I zu etwa $^2/_3$ der magnetischen Frictionswärme für unendlich

kleine Geschwindigkeit gefunden; dasselbe Ergebniss hat das aus dünnen Blechstreifen gebildete Bündel III geliefert (Tab. II). Die magnetische Frictionswärme oder die gegen die Coërcitivkräfte geleistete Arbeit ist also verhältnissmässig wenig verschieden, mag eine Aenderung der Magnetisirung in einem Bruchtheil einer Secunde oder unendlich langsam erfolgen. Es trifft mithin auch hier die Analogie der Coërcitivkraft mit der Reibung fester Körper zu, welche sich jedenfalls auch sehr wenig mit der Geschwindigkeit ändert.

Darauf, dass W um $^1/_3$ kleiner als F gefunden wurde, ist bei dem provisorischen Charakter der vorliegenden Versuche kein Gewicht zu legen. Möglicherweise blieb beim Spiel des Interruptors wegen Induction in den benachbarten Metallmassen (p. 829) die Stromintensität merklich hinter ihrem constanten Endwerth zurück.

Es wird beabsichtigt, nach der dargelegten Methode, deren Brauchbarkeit erwiesen scheint, definitive Versuche anzustellen und diese auch bis zu höheren Sättigungsgraden auszudehnen.

V. *Bemerkungen zu Hrn. Hugo Meyer's Abhandlungen über die Magnetisirungsfunction des Stahles; von A. von Waltenhofen.*

1) Die im 18. Bde. dieser Annalen enthaltene Abhandlung hat als Hauptresultat den p. 251 besonders hervorgehobenen Satz ergeben, dass die Magnetisirungsfunction anfangs mit der magnetisirenden Kraft wächst.

Ich erlaube mir, darauf aufmerksam zu machen, dass ich diesen Satz, und zwar in einer viel präciseren Formulirung, schon vor zwanzig Jahren in meinen Untersuchungen „über das electromagnetische Verhalten des Stahles“[1]) und später noch in anderen Abhandlungen, namentlich: „über die Coërcitivkraft verschiedener Stahlsorten“[2]) nachgewiesen

1) A. v. Waltenhofen, Wien. Ber. 48. p. 518. 1863.

2) A. v. Waltenhofen, Pogg. Ann. 121. p. 431. 1863.

und veröffentlicht habe. In der letzteren Abhandlung, welche ein Auszug aus der ersteren ist, findet man den Satz von der wachsenden Magnetisirungsfunction des Stahles p. 439 ausgesprochen, und zwar in einer Form[1]), welche nicht nur angibt, dass, sondern auch wie die Magnetisirungsfunction des Stahles wächst, nämlich innerhalb gewisser Grenzen proportional der dritten Wurzel der magnetisirenden Kraft. Man findet übrigens diesen Satz unter meinem Namen vielfach anderwärts angeführt, so namentlich in Wiedemann's Galvanismus und Electromagnetismus 2. Aufl. Bd. II p. 342, ja sogar in Lehrbüchern, wie z. B. Müller-Pfaundler, Bd. 3, p. 487 und Pisko, Lehrbuch für Gymnasien und Realschulen p. 313, 1873. Ich selbst habe mich auf jenen Satz mehrfach berufen in den Abhandlungen über mein Verfahren, die Härtegrade von Stahlsorten auf electromagnetischem Wege zu vergleichen[2]), und bei meinen Untersuchungen über das magnetische Verhalten von Feilspähnen und von pulverförmigem Eisen.[3])

Dass überhaupt die temporären magnetischen Momente anfangs etwas schneller wachsen, als die Stromintensitäten, hat schon vor mir Hr. G. Wiedemann[4]) gefunden bei Anwendung eines Magnetisirungsverfahrens, dessen Verschiedenheit von dem meinigen ich in meinen oben citirten Abhandlungen erörtert habe. Meine Versuche sind aber die ersten gewesen, welche eine durch eine Gleichung darstellbare Gesetzmässigkeit für den Zusammenhang zwischen den magnetisirenden Kräften und temporären magnetischen Momenten und somit auch für die Magnetisirungsfunction ergeben haben.

---

1) $y = kx^{4/3}$, wobei y das magnetische Moment, x die magnetisirende Kraft und k eine Constante bedeutet. Die Magnetisirungsfunction $y/x = kx^{1/3}$ ist eben die von Hrn. H. Meyer mit k bezeichnete Grösse.

2) Insofern ich nämlich die Proportionalitätsconstante meiner oben angeführten Formel bei härterem Stahl (unter übrigens gleichen Umständen) kleiner gefunden habe, als bei weicherem. Dingler's polyt. Journ. **170.** p. 201. 1863 u. **217.** p. 357. 1875.

3) A. v. Waltenhofen, Wien. Ber. **61.** p. 786. 1870 und **79.** p. 268. 1879; Wied. Ann. **7.** p. 419. 1879.

4) G. Wiedemann, Galv. u. Electromagn. 2. Aufl. **2.** (1) p. 344 u. f.

Als neu ist an den diesbezüglichen Versuchsresultaten des Hrn. Hugo Meyer bemerkenswerth, dass dieselben für die von ihm angewendeten, sehr schwachen magnetisirenden Kräfte (horizontale und verticale Componente des Erdmagnetismus) eine geringere Zunahme der Magnetisirungsfunction aufweisen, als meine umfangreicheren [1]) Versuche mit den viel stärkeren magnetisirenden Kräften einer Stromspirale.

2) Auf p. 854 der im 19. Bd. von Wied. Ann. 1883 erschienenen Abhandlung wird der Satz: dass die Magnetisirungsfunction um so kleiner ausfalle, je härter der Stahl ist, als „Satz von Lamont" hingestellt, wobei der Hr. Verf. Lamont's Handbuch des Magnetismus vom Jahre 1867 citirt. Abgesehen davon, dass es ganz willkürlich ist, dem dort angeführten, sehr unbestimmt formulirten Ausspruche von Lamont überhaupt diesen Sinn beizulegen, habe ich auch diesen Satz schon vor zwanzig Jahren, also vier Jahre vor dem Erscheinen des citirten Buches von Lamont, ausgesprochen, nämlich in meinen bereits citirten Abhandlungen über electromagnetische Härteproben und einen dazu bestimmten (1881 in Paris ausgestellten) Apparat. Die Behauptung des Hrn. Verf., dass der soeben erwähnte Satz keine Allgemeingültigkeit habe, will ich hier nicht weiter erörtern.

Schliesslich will ich hier noch erwähnen, dass auch die Fragen: welche Aenderungen die Magnetisirungsfunction des Stahles durch vorausgegangene Magnetisirungen erleidet, und ob sie von der Form des Querschnittes der Stäbe abhängt, in meinen vom Hrn. Verf. vollständig ignorirten Arbeiten abgehandelt sind; ferner, dass bei der electrischen Ausstellung in Wien (unter Nr. 276) Diagramme zu sehen sind, welche die Resultate einiger meiner electromagnetischen Untersuchungen und insbesondere auch das hier besprochene Anwachsen der Magnetisirungsfunction des Stahles darstellen.

1) Die Grenzwerthe der dabei in mehreren Abstufungen angewendeten magnetisirenden Kräfte verhielten sich wie 2 zu 15.

VI. *Ueber einige Eigenschaften kreuzweise verbundener Magnetstäbe; von A. Toepler.*

(Aus den Sitzungsber. der k. Academie der Wissenschaften zu Berlin vom 19. Juli 1883 mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Bekanntlich bedient man sich bei Ablenkungsbeobachtungen der Drehmomente, welche ein Magnet vom Momente M in den beiden Hauptlagen auf einen zweiten Magnet m in grossem Abstande r ausübt, welche Drehmomente mit:

$$\frac{Mm}{r^3}\left(1+\frac{\varkappa}{r^2}+\cdots\cdots\right)$$

proportional sind. Der Factor $\varkappa$ des zweiten Gliedes bestimmt sich aus Beobachtungen in zwei Abständen oder aus gewissen Annahmen über die Lage der Pole in den Magneten. Vierte und höhere Glieder werden gegen die Einheit vernachlässigt. Lamont hat bemerkt[1], dass bei den sogenannten Sinusablenkungen das zweite Glied verschwindet, wenn der Abstand der Pole im Ablenkungsmagnete in einem bestimmten Verhältniss steht zum Polabstand in der Magnetometernadel. Bedient man sich einer Nadel, deren Dimensionen für den gewünschten Genauigkeitsgrad ausser Betracht fallen, so lässt sich das zweite Glied durch eine Anordnung beseitigen, welche keine Voraussetzung über den Polabstand[2]) im Ablenkungsmagnete erfordert.

Auf einem unendlich dünnen Stabe seien die beiden Magnetismen symmetrisch zur Stabmitte angeordnet, so zwar, dass beim Zusammenlegen der Stabhälften der unmagnetische Zustand entstehen würde. In dem einen solchen Linearmagnet in der Ferne umgebenden Raum ergeben sich Vereinfachungen für zwei zum Magnete concentrische und coaxiale Kegelflächen.

---

1) Lamont, Magnetismus p. 182.

2) Unter Polabstand verstehe ich in dem von v. Helmholtz (Sitzungsbericht vom 5. April 1883 S. 405) angegebenen Sinne den aus dem zweiten Gliede nach der Formel $l^2=\Sigma\lambda^3\nu/\Sigma\lambda\nu$ abgeleiteten mittleren Abstand der Stabmagnetismen, wobei λ den Abstand je zweier correspondirender Theilchen diesseits und jenseits der Stabmitte, ν ihren Magnetismus bezeichnet.

Auf einer Kegelfläche, deren halber Oeffnungswinkel α_1 der Bedingung $\operatorname{tg}\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ entspricht, verschwindet das zweite Glied aus denjenigen Kraftcomponenten, welche in die Kegelfläche fallen. Die auf einen entfernten Pol n in dieser Kegelfläche wirkende Componente ist daher mit sehr grosser Annäherung $2\,Mn/r^3 . \cos\alpha_1$.

Auf einer zweiten Kegelfläche, deren halbe Oeffnung durch die Bedingung $\operatorname{tg}\alpha_2 = 2$ bestimmt ist, verschwindet das zweite Glied aus den Componenten senkrecht zur Fläche. Die Componente ist für grosse Abstände $Mn/r^3 . \sin\alpha_2$.

Die auf den Kegelflächen verschwindenden Glieder nehmen in beiden Fällen positiven oder negativen Werth an, je nachdem der Pol n innerhalb oder ausserhalb des von der betreffenden Kegelfläche umschlossenen Raumes liegt. [1])

Aus dem von der ersteren Kegelfläche Gesagten folgt, dass, wenn man auf eine sehr kleine Nadel m (Fig. 1) aus grossem west-östlichem Abstande r einen regelrecht magnetisirten Stab $n_1 s_1$ wirken lassen würde, welcher mit r den Winkel $\alpha_1 = 39^0\,13'\,54''$ bildet, man Ablenkungen erhalten müsste, deren Tangenten mit r^{-3} sehr nahe proportional sind, falls man Sorge trägt, die zu r senkrechte Kraftcomponente, für welche jene Proportionalität nicht gilt, und welche zu der

1) Sei m das Moment, λ der Abstand zweier punktförmiger Pole, r die Entfernung eines beliebig gelegenen Poles n von der Mitte von λ, α der Winkel zwischen r und λ, so ist mit Ausschluss von vierten, sechsten u. s. w. Gliedern die Componente in der Richtung von r durch:

$$2\,\frac{mn\cos\alpha}{r^3}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2\cos^2\alpha}{r^2} - \tfrac{3}{4}\cdot\frac{\lambda^2\sin^2\alpha}{r^2}\right\}$$

und die Componente senkrecht zu r durch:

$$\frac{mn\sin\alpha}{r^3}\left\{1 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{\lambda^2\cos^2\alpha}{r^2} - \tfrac{3}{8}\cdot\frac{\lambda^2\sin^2\alpha}{r^2}\right\}$$

ausgedrückt. Wenn α beziehungsweise einer der beiden obigen Bedingungen entspricht, so verschwinden in der betreffenden Componente die Correctionsglieder für jedes λ, also auch für die betrachtete magnetische Linie. Das übrige folgt ohne weiteres. Durch dieselben Zahlen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ und 2, welche im vorliegenden Falle Winkel bestimmen, ist bei dem Lamont'schen Verfahren das Verhältniss der Poldistanzen der Magnete bestimmt. Sonst haben die Methoden nichts gemein.

Directionskraft des Erdmagnetismus hinzukommt, zu eliminiren. Diese Elimination ist möglich, indem man den Magnet $n_1 s_1$ unter constantem Winkel α_1 um r dreht, bis er in die zu m senkrechte Ebene fällt. Das Experiment würde aber schwierig sein, weil kleine Aenderungen von α_1 schon merklichen Einfluss auf das Magnetometer haben.

Ganz gut gelingt jedoch die Elimination, wenn man den Magnet $n_1 s_1$ mit einem zweiten $n_2 s_2$ von annähernd gleicher Stärke so verbindet, dass sich dieselben unter dem Winkel $2\alpha_1 = 78^0\ 27'\ 48''$, gemessen zwischen gleichnamigen Schenkeln, kreuzen. Vor dem Härten und Magnetisiren liess ich zwei Stäbe in der Mitte zur Hälfte ausfeilen, sodass sie, mit den Einschnitten ineinander gefügt, die in Fig. 1 gezeichnete Combination bilden. Auf einer passenden Umrahmung wurde die Mittellinie ab markirt. Längs dieser Mittellinie berühren

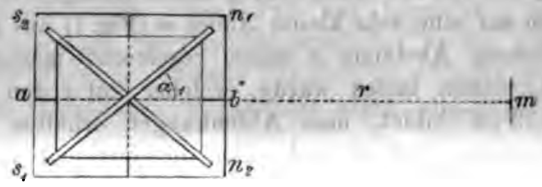


Fig. 1.

sich nun die beiden obenerwähnten, dem Winkel α_1 entsprechenden Kegelflächen beider Stäbe. Daher verschwinden längs dieser Mittellinie sowohl als auch in dem nächst benachbarten Bereich die Correctionsglieder 2. Ordnung für die der Mittellinie parallele Kraftcomponente. Orientirt man diese Mittellinie wie die Axe eines Magnetes in der ersten Hauptlage, so ist, falls die Momente M_1 und M_2 der beiden Stäbe nur angenähert gleich sind, der durch Vernachlässigung der zu r (Fig. 1) senkrechten und nicht ganz compensirten Kraftcomponenten begangene Fehler klein. Er beeinflusst bei 1 Procent Unterschied der Stabmomente die Ablenkungsbeobachtung nur mit etwa $^1/_{9300}$ ihres Werthes, falls der mit Spiegel gemessene einfache Ausschlagswinkel 3^0 nicht überschreitet. Die Orientirung des Systems braucht nur nach Augenmaass zu geschehen. Abweichungen bis zu 1^0 rechts

oder links veranlassen kaum einen merklichen Unterschied in der Einstellung des Magnetometers. Kurz, der beschriebene Kreuzmagnet verhält sich gegenüber einer entfernten kleinen Nadel, auf welche seine Mittellinie hinzielt, abgesehen von vierten u. s. w. Gliedern, wie ein sehr kleiner, aber sehr kräftiger Magnet vom Moment $(M_1 + M_2) \cos \alpha_1$ in der ersten Hauptlage. Für die Ablenkungsbeobachtungen ist es gleichgültig, ob die Ebene des Systems horizontal oder vertical gestellt ist (s. unten).

Ebenso wie für die erste Hauptlage, so lässt sich auch für die zweite ein entsprechender Kreuzmagnet herstellen. Man braucht den Magnetstäben nur den zwischen ungleichnamigen Schenkeln gemessenen Winkel $2\alpha_2 = 126^0\ 52'\ 12''$ zu geben und die Transversale *cd* (siehe Fig. 2) in der Meridianebene auf die Nadel *m* hinzielen zu lassen, während *ab* horizontal liegt. Hier gelten ähnliche Erwägungen wie oben, jedoch darf die Stabcombination selbstverständlich nicht um *cd* gedreht werden. Dagegen kann *r* jede beliebige Neigung zum Horizont haben. Wenn nur *ab* senkrecht zur Meridianebene steht, und *cd* nach *m* hinzielt, so wirkt das System wie ein sehr kleiner Magnet vom Moment $(M_1 + M_2) \sin \alpha_2$ in der zweiten Hauptlage. Der aus der Ungleichheit der Momente hervorgehende Fehler der Ablenkungsbeobachtung ist aber in diesem Falle im Verhältniss $4 \operatorname{ctg} \alpha_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 = 2{,}45$ mal grösser als im vorigen.

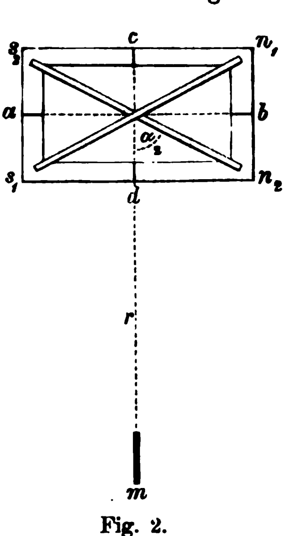


Fig. 2.

Die oben angegebenen Winkelwerthe α_1 und α_2 brauchen nur angenähert innegehalten zu werden In dem Folgenden sind einige Beobachtungen zusammengestellt, welche die thatsächlichen Verhältnisse erläutern. Der Kürze halber will ich die in Rede stehenden Stabcombinationen beziehungs-

weise mit den Benennungen „erster“ und „zweiter Kreuzmagnet“ (K_1 und K_2) bezeichnen, womit zugleich die Hauptlage angegeben ist, für welche die betreffende Combination Geltung hat.

Der erste Kreuzmagnet bestand aus zwei lamellenförmigen Stäben von 160 mm Länge, 17,5 mm Breite und 3,4 mm Dicke, welche in der Richtung der Breite ineinander gefügt waren. Der oben definirte Kreuzungswinkel war 78° 4′. Der zweite Kreuzmagnet hatte Lamellen derselben Dimensionen, sein Kreuzungswinkel war 128° 29′.

Jedes der beiden Systeme wurde zum Vergleich in beiden Hauptlagen untersucht, die Mittellinie *ab* (Fig. 1 und 2) selbstverständlich jedesmal nach West-Ost gerichtet. Das Wegfallen des zweiten Gliedes zeigt sich in der Constanz des Productes $r^3 \operatorname{tg} \varphi$, unter φ die im Abstande r erzielte Ablenkung verstanden. Die folgende Tabelle gibt die Werthe dieses Productes für eine Reihe von um je 100 mm zunehmenden Abständen. Die vierte Columne bezieht sich auf eine Anordnung, von der unten die Rede sein wird. Sämmtliche Zahlen sind um drei Stellen gekürzt.

Abstände r	Beobachtungen in erster Hauptlage			in zweiter Hauptlage	
	K_1	K_2	Parallelstäbe	K_1	K_2
e	19554	25468	11925	12681	15216
$e + 100$	19569	25382	12467	12574	15211
$e + 200$	19546	25288	12817	12496	15218
$e + 300$	19551	25265	13157	12473	15228
$e + 400$	19579	25227	13372	12436	15228
$e + 500$	19585	25219	—	12414	15211
$e + 600$	19574	—	—	—	—
Mittel	19566	—	—	—	15219

Der Anfangsabstand e war bei diesen zu verschiedenen Zeiten beobachteten Reihen verschieden. Er betrug für die Columnen 2 bis 6 resp. 497,5, 600, 502, 499 und 499 mm. Auch waren die magnetischen Ladungen der einzelnen Combinationen wegen anderweitiger Beobachtungen, auf welche es hier nicht ankommt, von Fall zu Fall verschieden.[1]

1) Selbstverständlich ergeben sich, wenn ein und derselbe Kreuzmagnet unverändert aus der ersten in die zweite Hauptlage gebracht

Jedesmal waren aber die Momente der Stäbe einer und derselben Combination angenähert ausgeglichen. Der Unterschied der Stabmomente betrug bei den Beobachtungen der Columnen 2 und 6 nur 0,65, resp. 0,35 Proc. des grösseren. Man sieht, dass die Zahlen in diesen beiden Columnen noch nicht $^1/_{1000}$, resp. $^1/_{1500}$ vom Mittelwerth abweichen. Eine grössere Uebereinstimmung konnte bei den angewandten Hülfsmitteln nicht erwartet werden. Das Magnetometer war ein kleiner gedämpfter Stahlring mit Spiegel.

Bekanntlich nimmt bei gewöhnlichen Stabmagneten das Product $r^3 \operatorname{tg} \varphi$ mit wachsendem r ab für die erste, zu für die zweite Hauptlage. Die Columnen 3 und 5 zeigen, dass sich der zweite Kreuzmagnet in der ersten Hauptlage normal, der erste Kreuzmagnet in der zweiten Hauptlage anomal verhält. Der Letztere ist für diesen Fall übercorrigirt, wie es nach den obigen Erklärungen in der That sein muss.

Wenn sich ein Stabmagnet angenähert durch ein einfaches Polpaar ersetzen lässt, so liegt der Gedanke nahe, den Kreuzmagnet durch zwei parallel gerichtete Magnetstäbe zu ersetzen, deren hypothetische Pole den Eckpunkten des dem Magnetkreuz umschriebenen Rechteckes entsprechen. Unter der von F. Kohlrausch angegebenen Voraussetzung, dass der Polabstand $^5/_6$ der Stablänge betrage, wurden zwei Stäbe von 100 mm Länge und 15 mm Dicke und Breite im Abstande der Axen = 68 mm fest verbunden, wonach man das Verhalten von K_1 hätte erwarten sollen. Die auf diesen Fall bezüglichen Resultate der Columne 4 zeigen, dass das System für die erste Hauptlage übercorrigirt war, woraus zu folgern ist, dass der Polabstand für diesen Fall kleiner hätte angenommen werden müssen.[1]) Auch eine längs der kürzeren Seite im homogenen Felde magnetisirte Rechtecksplatte zeigte sich anomal. Für solche übercorrigirte

wird, Productwerthe, welche sich bis auf den Einfluss der Correctionsglieder wie 2:1 verhalten, ganz wie beim einfachen Stabe. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass auch dieser Umstand durch die Beobachtung bestätigt wird.

1) Kohlrausch's Angabe (Wied. Ann. 17. p. 767) betrifft wohl nur Stäbe mit verhältnissmässig kleinerem Querschnitt.

Systeme lässt sich kein bezüglich der betreffenden Hauptlage äquivalentes magnetisches Punktpaar auf der Mittellinie angeben.[1]

Eine angenehme Eigenschaft der Kreuzmagnete ist ihre kräftige Wirkung. Die gekreuzten Lamellen ergaben trotz der schiefen Stellung erheblich grössere Ablenkungen, als wenn sie, direct aufeinander liegend, in eine der Hauptlagen gebracht wurden. Dies erklärt sich aus der bekannten Schwächung durch gegenseitige Influenz. Die Schwächung betrug beim Aufeinanderlegen etwa 20, bei der Kreuzstellung resp. nur 1,3 und 3 Proc.

Sind die Magnetismen der gekreuzten Stäbe merklich ungleich, so weicht selbstverständlich die Richtung der magnetischen Axe des Systemes von der Mittellinie ab ab. Man beurtheilt leicht, wann dieser Umstand zu berücksichtigen ist. Bezeichnet M' das arithmetische Mittel der Momente M_1 und M_2, $\pm \Delta$ ihre Abweichung von diesem Mittel, so ist das resultirende Moment:

$$M = 2\, M' \cos \frac{a}{2} \left\{ 1 + \frac{\Delta^2}{M'^2} \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

worin a den Winkel zwischen den gleichnamigen Schenkeln, also $2\,\alpha_1$, oder $2\,(90^0 - \alpha_2)$ bedeutet. Die magnetische Axe bildet mit ab einen Winkel δ, welcher durch:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\Delta}{M'} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

---

1) Der Einfluss der vierten Glieder drückt sich beziehungsweise

$$\text{für } K_1 \text{ durch } \tfrac{3}{16} \cdot \frac{l^4}{r^4} \cos^4 \alpha_1 \left\{ 1 - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \tfrac{15}{8} \operatorname{tg}^4 \alpha_1 \right\} = - \tfrac{81}{800} \cdot \frac{l^4}{r^4}$$

$$\text{für } K_2 \text{ durch } \tfrac{15}{16} \cdot \frac{l^4}{r^4} \cos^4 \alpha_2 \left\{ 1 - \tfrac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha_2 + \tfrac{1}{8} \operatorname{tg}^4 \alpha_2 \right\} = - \tfrac{9}{80} \cdot \frac{l^4}{r^4}$$

aus. Hier bedeutet l einen durch die Formel $l^4 = \Sigma \lambda^5 \nu / \Sigma \lambda \nu$ bestimmten Mittelwerth. Der durch Vernachlässigung des vierten Gliedes begangene Fehler ist abgesehen vom Vorzeichen kleiner als derjenige, welcher beim einfachen Stabe in den Hauptlagen begangen wird. Es folgt auch, dass durch Systeme, bei denen die Tangenten der halben Kreuzungswinkel $\sqrt{\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{14}{5}}}$, resp. $\sqrt{6 \pm 2 \sqrt{7}}$ betragen, das vierte Glied für sich beseitigt werden könnte.

ausgedrückt ist. Beträgt der Unterschied der Stäbe 1 Proc., also $\Delta / M = 1 / 200$, so sind die resultirenden Momente der beiden Combinationen K_1 und K_2 nur um verschwindende Grössen von $2 M' \cos a / 2$ verschieden. Die Winkelabweichung δ beträgt 14′ 2″, resp. 8′ 36″. Derartige Abweichungen der magnetischen Axe werden auch durch den von Seiten der Erde inducirten Magnetismus bewirkt; sie würden bei Schwingungsbeobachtungen von Einfluss sein.

Schwingt ein Kreuzmagnet mit horizontaler Kreuzungsebene unter dem Einfluss des Erdmagnetismus, wobei die Mittellinie ab um die Meridianrichtung oscillirt, so erfährt das System bezüglich dieser Mittellinie eine vom Ausschlagswinkel abhängige Längs- und Quermagnetisirung. Wenn man voraussetzt, dass der von der Substanz und der Gestalt abhängige Factor, welcher die Längsmagnetisirung des einzelnen Stabes im homogenen Felde bestimmt und k heissen möge, für beide Stäbe der gleiche sei, wenn man ausserdem von der Quermagnetisirung des einzelnen Stabes absieht, so lässt sich folgern, dass das magnetische Moment des Kreuzmagnetes in die bekannte Formel für die Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden mit dem Werthe:

$$2 M' \cos \frac{a}{2} \left\{ 1 + \frac{H k \cos a}{M' \cos \frac{a}{2}} \right\}$$

eingeht, wobei wie oben M' das Mittel aus den als nahe gleich vorausgesetzten permanenten Momenten beider Stäbe, a den Winkel zwischen gleichnamigen Schenkeln bedeutet. Man sieht, dass zwei rechtwinklig gekreuzte, gleichbeschaffene Magnetstäbe vom Einfluss des inducirten Magnetismus auf die Schwingungsdauer befreit sein würden[1]), was sich auch ohne Rechnung einsehen lässt. Eine derartige Compensation für Schwingungsbeobachtungen scheint mir einfacher zu sein, als die von Joule angegebene. Mit roher Annäherung kann auch schon der oben beschriebene erste Kreuzmagnet als für Schwingungen compensirt gelten, da

1) Die Schlussfolgerung bezieht sich selbstverständlich nur auf Schwingungen in einem schwachen magnetischen Felde.

bei ihm $\cos a = \cos 2 a_1$ klein ist. Die Vernachlässigung des inducirten Magnetismus würde bei den von mir benutzten Lamellen einen Fehler in der Bestimmung der Horizontalcomponente H zur Folge haben, welcher auf etwa $^1/_{2500}$ ihres Werthes zu schätzen wäre.

Schwingt derselbe Kreuzmagnet mit verticaler Kreuzungsebene, so ist der Einfluss des inducirten Magnetismus selbstverständlich grösser und leicht in Rechnung zu ziehen. Ist das System K_1 mit der Mittellinie ab nach West-Ost orientirt, und zwar einmal mit horizontaler, darauf mit verticaler Kreuzungsebene, so wird dasselbe im ersten Falle durch die horizontale, im zweiten durch die verticale Componente des Erdmagnetismus quermagnetisirt, was ebenfalls mit einer Richtungsänderung der magnetischen Axe verbunden ist. Dieser Umstand hat jedoch keinen merklichen Einfluss auf die Ablenkungsbeobachtung. Es konnte keine Spur eines Unterschiedes wahrgenommen werden, als der Kreuzmagnet in genau gleichem Abstande, abwechselnd horizontal und vertical gestellt, auf das Magnetometer wirkte, wie auch nach den obigen Erörterungen vorherzusehen war. Ferner konnte weder beim ersten, noch beim zweiten Kreuzmagnete ein Unterschied bemerkt werden, wenn eines der Systeme um die Mittellinie ab als Axe so gedreht wurde, dass in Fig. 1 oder 2 der Stab $n_1 s_1$ in die Lage von $n_2 s_2$ kam und umgekehrt. Bei dieser Lagenvertauschung wirkt der zu Anfang erwähnte Fehler wegen der Ungleichheit der Momente das eine mal im Sinne des Erdmagnetismus, das andere Mal gegen denselben. Das Experiment ist ein sehr einfaches Hülfsmittel, um zu prüfen, ob die Stabmomente für die in Rede stehenden Beobachtungen hinreichend ausgeglichen sind.

In wieweit die besprochenen Eigenschaften der Kreuzmagnete in der einen oder anderen Weise bei praktischen Untersuchungen verwendbar sind, lasse ich dahingestellt. Mögen diese Eigenschaften immerhin vielleicht mehr theoretisches Interesse haben, so hielt ich ihre Erwähnung doch nicht für unnütz. Die auf das zweite Glied bezügliche Eigenschaft kann man als eine Bestätigung des Coulomb'schen Gesetzes ansehen. Uebrigens ist es nicht schwierig, Magnete

herzustellen, deren Momente bis auf 1 Proc. übereinstimmen. Die permanenten Momente der Stäbe, mit welchen W. Weber den von der Lage zur Erde abhängigen Theil des Magnetismus untersuchte, verhielten sich wie 190:191. Schwieriger scheint es mir zu sein, diese Uebereinstimmung auf die Dauer zu erhalten. Dass unter gewissen Voraussetzungen ein Kreuzmagnet durch zwei gleiche Stäbe in gleichen Abständen diesseits und jenseits des Magnetometers vertreten werden kann, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

VII. *Spectroskop mit phosphorescirendem Ocular; Beobachtungen über Phosphorescenz; von E. Lommel.*

(Hierzu Taf. VII Fig. 17—19.)

Um die Einwirkung der verschiedenen Strahlengattungen des Spectrums und insbesondere der ultrarothen Strahlen auf phosphorescirende Körper bequem und selbst an kleinen Mengen Substanz beobachten zu können, habe ich folgende Einrichtung getroffen. Das Ocularrohr eines gewöhnlichen Bunsen-Steinheil'schen Spectroskopes ist an beiden Seiten in der Ebene, in welcher sich sonst das Fadenkreuz befindet, aufgeschlitzt. Durch die Schlitze wird ein rechteckiges Mikroskopdeckgläschen wie ein Schieber eingeschoben. Die untere Hälfte des Deckgläschens wird ganz dünn mit Balmain'scher Leuchtfarbe bestrichen. Andere Substanzen, welche sich nicht wie eine Anstrichfarbe behandeln lassen, werden feingepulvert möglichst gleichmässig in dünner Schicht auf ein solches Deckgläschen gesiebt, dann wird ein zweites Deckgläschen von gleicher Länge aber nur halber Höhe auf die untere Hälfte des ersteren gelegt, sodass die dünne Pulverschicht zwischen den beiden Deckgläschen festgehalten wird; diese werden an den Rändern miteinander verkittet, und von der oberen unbedeckt gebliebenen Hälfte des so entstandenen Schiebers wird das überflüssige Pulver weggewischt. Selbstverständlich kann auch die Balmain'sche Leuchtfarbe in dieser Weise in Pulverform angewendet werden.

Die Spaltfläche des Spectroskopes wird mit einem Stanniolblatt bedeckt, in welches eine rechteckige Oeffnung von etwa 4 mm Höhe eingeschnitten ist, die so gestellt wird, dass die untere Hälfte des Spaltes ganz verschlossen, und nur von seiner Mitte an nach oben eine Strecke von 4 mm frei ist. Diesem freien Theile des Spaltes entsprechend, wird in der unteren Hälfte des Gesichtsfeldes ein oben von dem horizontalen Durchmesser des letzteren begrenztes Spectrum entworfen. Obgleich dasselbe den phosphorescirenden Schieber auf seiner von dem Auge abgewendeten Vorderseite trifft, so wirkt es doch durch die ganze dünne Schicht der phosphorescirenden Substanz hindurch, und man sieht, nachdem die einfallenden Strahlen abgehalten sind, die bewirkte Erscheinung auf der dem Auge zugewendeten Rückseite des Schiebers ebenso gut, als wenn man die Vorderseite betrachten würde. Gleichzeitig wird die Scala, wenn man dieselbe beleuchtet, längs dem horizontalen Durchmesser des Gesichtsfeldes durch die obere unbedeckt gebliebene Hälfte des Deckgläschens gesehen und erlaubt, die Einzelheiten der Erscheinung messend zu verfolgen.

Bekanntlich wird das Phosphorescenzlicht, nachdem es durch die brechbareren Strahlen erregt worden ist, durch die weniger brechbaren und namentlich durch die ultrarothen Strahlen zunächst zu hellerem Aufleuchten angefacht und sodann ausgelöscht. Es entsteht daher auf dem schwach phosphorescirenden Grunde des Auffangschirmes zuerst ein helles (positives) und später ein dunkles (negatives) Bild jener Theile des Spectrums, welche diese anfachende und zugleich auslöschende Wirkung ausüben.

Wir wollen uns mit diesem dunkeln Spectralbilde zunächst beschäftigen.

Wird der mit Balmain'scher Leuchtfarbe bestrichene (oder bestreute) Schieber, nachdem er zuvor mit Tageslicht beleuchtet und dadurch ziemlich stark phosphorescirend gemacht ist, in das Spectroskop eingeschoben und der offene Theil des Spaltes mit Sonnenlicht, welches man, um eine stärkere Wirkung zu erzielen, noch mittelst einer Linse concentriren kann, einige Minuten lang beleuchtet, so sieht

man, nachdem das einfallende Licht abgeschlossen worden, zunächst den von den violetten Strahlen getroffenen Theil des Schiebers heller leuchten als den schwächer phosphorescirenden Grund; von dem grössten Theile des übrigen Spectrums aber entwickelt sich ein dunkles Bild auf hellem Grunde. Dieses dunkle Spectralbild ist ausgezeichnet durch zwei dunkle Streifen im ultrarothen Gebiet (s. Fig. 17, welche die mittlere Zone des Gesichtsfeldes mit dem Bilde des Spectrums darstellt); der erste weniger brechbare Streifen, welcher, wenn die Scala mit dem Theilstrich 100[1]) auf die *D*-Linie eingestellt ist, von 51 bis 57 reicht, erscheint tiefschwarz, der zweite, von 63 bis 72 sich erstreckend, ist weniger dunkel. Vor dem ersten Streifen nach der Seite geringerer Brechbarkeit hin ist die Verdunkelung nur noch sehr schwach und erstreckt sich nicht weit; die übrigen Theile des dunkeln Spectralbildes heben sich aber kräftig ab von dem helleren Grunde, selbst der hellere Zwischenraum zwischen den beiden dunkeln Streifen; hinter dem zweiten Streifen ist es wieder etwas heller, jedoch nicht so hell wie in jenem Zwischenraum; dann nimmt die Dunkelheit zu, erreicht eine ziemlich tiefe Schwärze in der von den gelben und grünen Strahlen getroffenen Region und verliert sich etwa bei 155 (*F*$\frac{1}{3}$*G*) allmählich in einen neutral gebliebenen Zwischenraum, welcher das heller leuchtende von den violetten Strahlen erregte Gebiet von dem ausgelöschten Theile des Spectrums scheidet. Dieser hellere Theil reicht etwa von 170 (*G*$\frac{1}{2}$*H*) bis 220, erstreckt sich also nur wenig über das violette Ende des Spectrums hinaus. Lücken, den Fraunhofer'schen Linien entsprechend, sind nicht wahrzunehmen. Die ganze Erscheinung dauert, einmal entwickelt, stundenlang an und kann daher mit aller Musse beobachtet werden.

Die beiden dunkeln Bänder verrathen keineswegs, wie man vielleicht zunächst vermuthen könnte, eine Eigenthümlichkeit der Sonnenstrahlung, wie etwa eine Erhöhung der Wärmestrahlung an diesen Stellen des Ultraroth. Sie sind

1) Den Fraunhofer'schen Linien entsprechen alsdann folgende Zahlen: *A* 67, *B* 78, *C* 84, *D* 100, *E* 121, *F* 140, *G* 178, *H* 212.

vielmehr der phosphorescirenden Substanz selbst eigenthümlich, welche an diesen Stellen eine erhöhte Empfänglichkeit oder Absorptionsfähigkeit für die auslöschenden Strahlen besitzt; sie sind nichts anderes als für die Substanz charakteristische Absorptionsstreifen.

Denn einerseits zeigen sich die dunkeln Streifen in ganz gleicher Weise auch bei Anwendung von electrischem Kohlenlicht, gleichviel, ob das Prisma aus Flintglas, Schwefelkohlenstoff oder Steinsalz besteht. Und andererseits erscheinen sie nicht bei anderen phosphorescirenden Körpern. Bei einem gelbgrün phosphorescirenden Schwefelstrontium z. B. reichte das negative Bild des Spectrums von 30 bis 150, und erschien am dunkelsten zwischen 50 und 80, ohne dunkle Streifen zu zeigen.

Der erste Streifen stärkster auslöschender Wirkung sowie der auf ihn folgende Zwischenraum geringster Wirkung sind bereits von E. Becquerel[1]) beobachtet worden. Auch Abney[2]) hat dieselben an Calciumsulfid wahrgenommen, und in jüngster Zeit hat H. Becquerel[3]) auch erkannt, dass diese Erscheinung ungleicher Auslöschung von einer Substanz zur anderen veränderlich ist.

Das beschriebene dunkle Bild des Spectrums auf der Balmain'schen Leuchtfarbe beginnt erst mehrere Secunden nach Absperrung des einfallenden Lichtes sich zu entwickeln. Unmittelbar nach der Absperrung tritt das Bild, wie bereits erwähnt wurde, hell auf dunklem Grunde hervor, und zwar besonders deutlich, wenn das Blättchen vorher nur schwach erregt war und sonach für die helle Erscheinung einen genügend dunkeln Hintergrund darbietet. Die beiden Streifen erscheinen jetzt hell, und zwar der erste heller als der zweite, genau an derselben Stelle wie die entsprechenden dunkeln. Das Phosphorescenzlicht, mit welchem der weniger brechbare Theil des Spectrums jetzt leuchtet, zeigt einen mehr ins

1) E. Becquerel, La lumière, ses causes et ses effets. **1.** p. 144. 1867.

2) W. de W. Abney, Phil. Mag. (5) **13.** p. 212. — Beibl. **6.** p. 383. 1882.

3) H. Becquerel, Compt. rend. **96.** p. 1853. 1883. — Beibl. **7.** p. 702. 1883.

Grünliche ziehenden Farbenton im Vergleich mit dem schön blauen Licht, welches durch die violetten Strahlen erregt wird. Auch klingt jenes grünlichblaue Licht sehr rasch ab, um dem dunkeln Bilde, das nach und nach immer deutlicher aus dem helleren Grunde hervortritt, Platz zu machen, während dieses blaue Licht lange Zeit fortleuchtet.

Man sieht diese hellen Streifen im Ultraroth schon während der Bestrahlung, namentlich wenn man das einfallende Licht durch rothes Glas gehen lässt, wodurch das leuchtende Spectrum auf sein rothes Ende beschränkt und zugleich entsprechend gedämpft wird. Auf diese Weise sieht man im Spectroskop gleichzeitig mit dem rothen Ende des Spectrums das Ultraroth, sichtbar gemacht durch grünlich blaues Phosphorescenzlicht. Noch besser als die Balmain'sche Leuchtfarbe eignet sich zu dieser Beobachtung das weiter unten zu erwähnende grünlichblaue Schwefelcalcium.

Die bisher besprochenen Erscheinungen lassen sich leicht auch in grösseren Dimensionen und für viele gleichzeitig sichtbar objectiv darstellen. Auf einem mit Balmain'scher Leuchtfarbe angestrichenen und vorher durch diffuses Licht phosphorescirend gemachten Schirm entwirft man mittelst Spalt, Linse und Prisma (Flint- oder Schwefelkohlenstoffprisma) ein scharfes Sonnenspectrum und lässt dasselbe einige Minuten lang einwirken. Bald nach Aufhören der Belichtung erscheint das dunkle Spectralbild mit seinen zwei dunklen Streifen. Nun verschiebt man den Schirm um die Breite des Spectrums vertical nach aufwärts und lässt, nachdem man den Spalt mit rothem Glas bedeckt hat, das rothe Ende des Spectrums unmittelbar unter dem dunklen Spectralbild auf den Schirm fallen. Sofort treten, unterhalb der dunkeln Streifen und als Verlängerung derselben, die hellen Streifen mit grünlichblauer Farbe hervor (Fig. 18). Der erste hellere und weithin sichtbare steht frei in dem nur schwach leuchtenden ultrarothen Gebiete, der zweite schwächere legt sich in seiner zweiten Hälfte mit grünlichblauem Schimmer noch über den Anfang des Roth. Er ist von der dunkeln Linie *A* durchzogen, welche sich als hellerer

Streifen[1]) in das entsprechende dunkle Band des oberen Spectralbildes fortsetzt, wodurch dieses Band in zwei Partien getheilt erscheint (Fig. 18). Obgleich, wie bereits erwähnt, das Licht dieser hellen Streifen nach Aufhören der Bestrahlung sehr rasch verblasst, so ist die Erscheinung während der Bestrahlung dennoch eine dauernde, weil die anregende Ursache unausgesetzt fortwirkt. Man kann den Versuch eine Viertelstunde lang fortsetzen, ehe eine merkliche Abnahme der Helligkeit eintritt.

Hiermit ist eine Methode gewonnen, um einen Theil der ultrarothen Strahlen neben dem gleichzeitig gesehenen leuchtenden Spectrum durch Phosphorescenz ebenso schön sichtbar darzustellen, wie das ultraviolette Gebiet durch Fluorescenz. Ich benutze daher dieses Experiment als Vorlesungsversuch zum Nachweis des Vorhandenseins der ultrarothen Strahlen. Der Versuch gelingt mit electrischem Licht ebensogut wie mit Sonnenlicht.

Unterbricht man die Wirkung des einfallenden rothen Lichtes, so verschwinden die hellen Streifen rasch, und die entsprechenden dunkeln treten an ihre Stelle. Lässt man alsdann das Spectrum abermals einwirken, so treten die Streifen sofort wieder hell aus dunklerem Grunde hervor. Man kann dieses abwechselnde Hell- und Dunkelwerden der Streifen fünf- bis sechsmal hinter einander wiederholen, ohne dass die Intensität der Erscheinung merklich nachlässt. Bei längerer Einwirkung jedoch wird die Lichtentwickelung an diesen Stellen allmählich schwächer und verschwindet endlich ganz, um definitive Dunkelheit zurückzulassen.

Um die Wellenlängen für die Grenzen der beiden charakteristischen Streifen zu ermitteln, wurden mittelst eines Glasgitters die Gitterspectra auf dem phosphorescirenden Schirme objectiv entworfen, wobei das einfallende Licht durch rothes Glas ging, was nothwendig ist, da der ultrarothe Theil des ersten Gitterspectrums sich in das zweite Gitterspectrum

1) Im Spectroskop war dieses hellere Bild der Linie *A* innerhalb des zweiten dunklen Bandes nicht wahrnehmbar.

hineinerstreckt. Nach einer Einwirkung von einigen Minuten und Absperrung des einfallenden Lichtes sind die dunkeln Bilder der Spectra erster Ordnung zu beiden Seiten des ebenfalls dunkel sich abzeichnenden mittleren Spaltbildes deutlich zu erkennen, sodass die Abstände der beiderseits zusammengehörigen Grenzen der dunkeln Streifen auf dem Schirme gemessen werden können. Zuletzt wurde das rothe Glas weggenommen und die Entfernung der D-Linien in den ersten Spectren rechts und links ebenso gemessen. Es wurden folgende Zahlen erhalten:

Erster Streifen	äussere Grenze:	116 mm;
	innere Grenze:	106 „ ;
Zweiter Streifen	äussere Grenze:	99 „ ;
	D-Linie:	72,5 „ .

Die innere Grenze des zweiten Streifens erschien nicht deutlich genug, um eine Messung zuzulassen. Nimmt man die Wellenlänge der D-Linie zu 0,589 Mikron an, so ergibt die Rechnung, dass der erste Streifen zwischen den Wellenlängen 0,942 und 0,861, der zweite zwischen den Wellenlängen 0,804 und 0,715 enthalten, wo die letztere Zahl aus den spectroskopischen Beobachtungen durch Interpolation abgeleitet ist.

Mittelst des phosphorescirenden Oculars wurde ferner untersucht ein grünlichblau phosphorescirendes Schwefelcalcium (bezogen von Hrn. Dr. Schuchardt in Görlitz). Dieses Präparat zeigte, hinsichtlich der Dauer und des Verlaufes des Anfachungs- und Verlöschungsprocesses, ein auffallend anderes Verhalten wie das Balmain'sche Schwefelcalcium. Unmittelbar nach der Einwirkung des Spectrums auf die vorher nur schwach belichtete Substanz sieht man ein helles Bild des Spectrums, welches dem auch bei der Balmain'schen Leuchtfarbe beobachteten in seinem Aussehen gleicht, jedoch heller ist und viel länger andauert. Auch hier erstreckt sich das helle Spectralbild vom Ultraroth bis ins Gebiet des Blaugrün und beginnt mit demselben hellen Streifen zwischen 51 und 57. Auch der zweite weniger helle Streifen (63 bis 72) lässt sich erkennen, erscheint jedoch von dem folgenden über das Gebiet der rothen, gelben und grünen Strahlen sich erstreckenden Lichtschimmer nur durch

ein sehr wenig markirtes Minimum geschieden (vgl. Fig. 17). Noch deutlicher als bei der Balmain'schen Substanz lässt sich bemerken, dass dieser Lichtschimmer im Vergleich zu dem durch die violetten Strahlen direct erregten Phosphorescenzlicht mehr ins Grünliche spielt. Erst nach 10 bis 20 Secunden beginnt Verdunkelung sich zu zeigen, und zwar zunächst zu beiden Seiten des hellen Streifens, der nun, zwischen zwei hellen Streifen stehend, noch länger fortleuchtet; auch der Lichtschimmer des übrigen Spectrums verklingt allmählich, und zuletzt nach mehr als einer Minute verschwindet auch der helle Streifen. Jetzt erscheint das Spectralbild dunkel auf dem schwach phosphorescirenden helleren Grunde, von 35 an bis etwa 130, und sehr dunkel von 45 bis 90. Dunklere Streifen sind in diesem Stadium nicht zu erkennen, sondern nur eine gleichmässige, nach beiden Enden hin allmählich abgestufte Dunkelheit. Erst nach längerem Warten gewahrt man an der Stelle, welche vorher der helle Streifen eingenommen hatte, doch eine noch tiefere Schwärzung.

Belichtet man nun, nachdem das Spectralbild dunkel geworden, von neuem, so erscheint sofort wieder das helle Bild. Dieser Wechsel zwischen hellen und dunklen Bildern kann fünf- bis sechsmal wiederholt werden.

Ueberhaupt hat diese Substanz sogar dann, wenn sie jede sichtbare Spur von Phosphorescenz verloren hat und dem im Dunkeln ausgeruhten Auge völlig schwarz erscheint, noch immer die Fähigkeit, durch die weniger brechbaren Strahlen des Spectrums wieder zum Leuchten angefacht zu werden. Es erscheint alsdann im Spectroskop das helle Spectralbild auf völlig schwarzem Grunde (Fig. 19). Auch der Balmain'sche Phosphor besitzt diese Fähigkeit, jedoch in weit geringerem Grade. Auf einem mit dem grünlichblauen Schwefelcalcium präparirten Blättchen, welches viermal 24 Stunden im Dunkeln gelegen hatte, entwickelte sich das helle Spectralbild sehr schön, während das Balmain'sche Schwefelcalcium nach zweitägigem Verweilen im Dunkeln nur noch schwach und vorübergehend, nach drei Tagen aber gar nicht mehr reagirte.

Das Hervortreten des hellen Spectralbildes auf der völlig dunklen Substanz bringt den Eindruck hervor, als ob die ultrarothen Strahlen nicht blos durch Erwärmung stimulirend, sondern selbständig erregend wirken könnten. Man überzeugt sich aber, dass die erloschene Substanz auch durch Erwärmen wieder zum Leuchten gebracht wird, wobei mir allerdings schien, dass das durch Erwärmung entlockte Licht einen mehr blauen Farbenton zeige als das durch die ultrarothen Strahlen hervorgerufene grünlichblaue Licht. Jedenfalls geht aus diesen Versuchen hervor, dass ein sehr geringes Residuum von Phosphorenscenz genügend ist, um durch die ultrarothen Strahlen wieder zum hellen Aufleuchten angefacht zu werden.

Da das Licht, welches dieses grünlichblaue Schwefelcalcium unter der Einwirkung der ultrarothen Strahlen aussendet, heller ist als beim Balmain'schen Phosphor, so eignet sich jenes Präparat noch besser als dieses zur objectiven Sichtbarmachung der ultrarothen Strahlen. Man kann sich hierzu einen Schirm herstellen, indem man das Pulver in gleichmässig dünner Schicht zwischen zwei am Rande zusammengekittete Spiegelglasplatten bringt.

Ein aus derselben bereits genannten Bezugsquelle stammendes hellblau phosphorescirendes Schwefelcalcium zeigte unmittelbar nach der Belichtung das nämliche helle Spectralbild wie die vorigen Substanzen, nur mit noch kürzerer Dauer als der Balmain'sche Phosphor. Nach einem Augenblicke schon war das helle Bild verschwunden, und an seiner Stelle trat das dunkle Bild hervor, welches dieselben beiden charakteristischen dunkeln Streifen wie bei der Balmain'schen Substanz, nur mit noch grösserer Schärfe und Nettigkeit aufwies. Der von den violetten Strahlen erregte dauernd helle Theil des Spectralbildes reicht von 165 ($G\frac{1}{3}F$) bis 220 (über H hinaus).

Ein viertes hell himmelblau phosphorescirendes Schwefelcalcium näherte sich in seinem Verhalten wieder mehr der grünlichblauen Substanz. Die helle Erscheinung dauerte länger wie beim Balmain'schen Phosphor, jedoch bei weitem nicht so lang wie beim grünlichblauen Schwefelcalcium. Dann

entwickelt sich ein einförmig dunkles Bild, welches von 30 bis 160 ($F\frac{1}{2}G$) sich erstreckt, zwischen 40 und 140 (F) ganz schwarz erscheint und selbst nach längerem Abwarten keine Spur eines dunkeln Streifens erkennen lässt. Das Bereich der erregenden Strahlen geht auch hier von 165 ($G\frac{1}{3}F$) bis 220 (über H hinaus).

Die vier untersuchten Sorten von Schwefelcalcium unterscheiden sich demnach, was ihr Verhalten zu den weniger brechbaren und insbesondere zu den ultrarothen Strahlen des Spectrums anlangt, nicht qualitativ, sondern nur quantitativ durch die Dauer und den Verlauf der Anfachung und der Auslöschung ihrer Phosphorescenz. Alle vier zeigen die nämlichen beiden Maxima der Anfachung, ein starkes im Ultraroth (51 bis 57) und ein schwächeres am Anfange des Roth (63 bis 72). Aber bei dem hellblauen Schwefelcalcium dauert die Erhellung nach dem Aufhören der Bestrahlung nur äusserst kurze Zeit, bei der Balmain'schen Leuchtfarbe ein wenig länger, bei der himmelblauen Substanz noch etwas länger; bei der grünlichblauen dagegen ist sie von sehr langer Dauer und sehr grosser Intensität. Bei der ersten Substanz entwickelt sich das dunkle Spectralbild sehr rasch und mit scharfer Ausprägung der beiden den Maximis der Anfachung entsprechenden dunklen Streifen, bei der zweiten etwas weniger rasch und scharf; bei der dritten und vierten Substanz entsteht langsam ein continuirliches schwarzes Spectrum.

Es erübrigte noch, die Zusammensetzung des Phosphorescenzlichtes, durch welche die Unterschiede im Farbenton der verschiedenen Substanzen bedingt sind, zu untersuchen. Die Wahrnehmung, dass phosphorescirende Körper unmittelbar nach der Belichtung häufig einen anderen Farbenton zeigen als einige Zeit nachher (das oben als „himmelblau“ bezeichnete Schwefelcalcium z. B. erscheint einen Augenblick nach der Belichtung entschieden grünlichblau und wird dann erst himmelblau), liess es mir wünschenswerth erscheinen, das Spectrum des Phosphorescenzlichtes nicht nur nach der Bestrahlung, sondern schon während der Bestrahlung zu beobachten. Dies geschah auf folgende Weise.

Das erregende (Sonnen- oder electrische) Licht ging

durch zwei blaue und zwei violette Gläser und eine Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak und wurde durch eine Linse auf der zu untersuchenden Substanz concentrirt. Der Trog mit der Kupferlösung war hinter der Linse aufgestellt, um das von dieser ausstrahlende Fluorescenzlicht aufzuhalten. Das phosphorescirende Pulver befand sich in einem kleinen aus einem Glimmerblättchen gebogenen cylindrischen Becher, auf dessen Wand die Linse einen Lichtfleck erzeugte. Der leere Glimmerbecher, von dem durch jene Medien durchgelassenen violetten Lichte auf diese Weise beleuchtet, zeigte weder Fluorescenz noch Phosphorescenz.

Das Spectrum dieses violetten Lichtes beginnt schwach bei 160 ($F\frac{1}{2}G$), wird stärker bei 170 ($F\frac{3}{4}G$), sehr stark aber erst bei 180 hinter G; es enthält also hauptsächlich diejenigen Strahlen, welche Phosphorescenz zu erregen fähig sind.

Da das Spectrum des Phosphorescenzlichtes höchstens bis 180 reicht, so wird in einem Spectroskop, dessen Spalt auf den Lichtfleck gerichtet ist, der weitaus grössere Theil dieses Spectrums abseits von demjenigen des erregenden Lichtes, welches theils durch Diffusion an dem Pulver, theils durch Reflexion an dem Glimmerblättchen in den Spalt gelangt, gesehen und kann somit während der Bestrahlung beobachtet werden. Nur das brechbarere Ende des Phosphorescenzspectrums kann theilweise über den lichtschwachen Anfang des Spectrums des erregenden Lichtes hinübergreifen; es erscheint aber auch hier mit demselben nicht vermischt, sondern ist deutlich für sich erkennbar; denn es legt sich wie ein zarter Nebel über die Fraunhofer'schen Linien und die vom Glimmerblättchen herrührenden Interferenzstreifen, durch welche das erregende Licht gekennzeichnet ist.

Diese Beobachtungsmethode ergab vor allem die folgenden allgemeinen Resultate:

Das Phosphorescenzlicht ist während der Bestrahlung beträchtlich lichtstärker als nach der Bestrahlung.

Das Phosphorescenzlicht ist während der Bestrahlung anders zusammengesetzt als nach der Bestrahlung.

Im besonderen ergab sich, dass bei der Balmain'schen Leuchtfarbe das Spectrum des Phosphorescenzlichtes während der Beleuchtung von 88—180 (etwa von *C* bis *G*) reicht und von 100 bis 170 (*D* bis $F\frac{3}{4}G$) sehr hell ist. Ein erstes Maximum der Lichtstärke befindet sich im Grün bei 125 (*b*), ein zweites im Blau bei 160 ($F\frac{1}{2}G$), und zwischen beiden bei 135 ($E\frac{3}{4}F$) ein sehr schwaches kaum wahrnehmbares Minimum. Nach Abhaltung des erregenden Lichtes sinkt der erste weniger brechbare Theil des Spectrums (von 88 bis 135), welcher während der Belichtung ein wenig lichtstärker erscheint als der zweite, sofort zu sehr geringer Lichtstärke herab und verschwindet rasch, nachdem er nur noch kurze Zeit zwischen 100 und 130 als schwacher Schimmer zu sehen war. Der zweite brechbarere Theil dagegen, ebenfalls viel lichtschwächer als während der Bestrahlung, bleibt zwischen 140 und 170 mit seinem Maximum bei 160 noch lange Zeit mit langsam abnehmender Lichtstärke sichtbar. Das Phosphorescenzlicht der Balmain'schen Leuchtfarbe ist demnach während und nach der Bestrahlung verschieden zusammengesetzt: während der Bestrahlung enthält es neben Blau sehr viel grünes Licht, nach Aufhören der Bestrahlung keines mehr.

Aehnlich wie der Balmain'sche Phosphor verhält sich das hellblaue Schwefelcalcium, nur dass der erste Theil des Phosphorescenzspectrums schon während der Beleuchtung weniger lichtstark erscheint und nach Absperrung des erregenden Lichtes von noch kürzerer Dauer ist.

Bei der grünlichblauen Substanz reicht das Spectrum des Phosphorescenzlichtes während der Bestrahlung von 85 bis 180 (*C* bis *G*) mit nur einem Maximum im Grün bei 125 (*b*) und bleibt nach Abschluss des einfallenden Lichtes sichtbar von 110 bis 160 ($D\frac{1}{2}E$ bis $F\frac{1}{2}G$) mit demselben Maximum bei 125.

Das Phosphorescenzspectrum des himmelblauen Schwefelcalciums erstreckt sich während der Bestrahlung ebenfalls von 85 bis 180 (*C* bis *D*). Es ist durch zwei Minima, ein sehr stark ausgeprägtes bei 114 ($D\frac{2}{3}E$) und ein sehr schwaches zwischen 140 und 150 (hinter *F*) in drei Theile getheilt.

Das Maximum (I) des ersten Theiles, welcher als ein von dem übrigen Spectrum scharf abgesetzter Streifen erscheint, der von 90 bis 110 ($C\frac{1}{3}D$ bis $D\frac{1}{2}E$) sehr hell ist, liegt bei 101 (etwas hinter D); der zweite von 120 bis 138 (zwischen E und F) sehr helle Theil hat sein Maximum (II) bei 127 (b); das Maximum (III) des dritten Theiles, welcher von 150 bis 170 ($F\frac{1}{4}G$ bis $F\frac{3}{4}G$) sehr hell erscheint, liegt zwischen 150 und 160. Die Reihenfolge der Maxima hinsichtlich ihrer Helligkeit ist (I), (II), (III). Nach Abschluss des erregenden Lichtes sinkt der erste rothgelbe Streifen, welcher während der Bestrahlung am stärksten leuchtete, sofort zu sehr geringer Lichtstärke herab und verschwindet bald, während das übrige Spectrum von 120 bis 170 (E bis $F\frac{3}{4}G$) noch lange fortleuchtet. Die Helligkeitsfolge der Maxima ist jetzt (II), (III), (I), wobei (II) und (III) an Lichtstärke fast gleich erscheinen, während (I) viel schwächer und nur anfangs sichtbar ist. Die oben erwähnte Wahrnehmung der Farbenänderung des Phosphorescenzlichtes dieser Substanz wird durch das bemerkenswerthe Verhalten ihres Phosphorescenzspectrums bestätigt und erklärt.

Vergleichen wir diese Resultate, so fällt auf, dass das Maximum im Grün, welches bei allen vier Substanzen ungefähr an der nämlichen Stelle auftritt, bei den beiden ersten Substanzen (dem Balmain'schen und dem hellblauen Schwefelcalcium) nach Aufhören der Bestrahlung rasch verschwindet, bei den beiden letzten (dem grünlichblauen und dem himmelblauen Schwefelcalcium) aber andauert. Andererseits haben wir oben gefunden, dass das von den ultrarothen Strahlen angefachte Phosphorescenzlicht bei jenen beiden Substanzen von sehr kurzer, bei diesen beiden dagegen von längerer und bei dem grünlichblauen Schwefelcalcium sogar von sehr langer Dauer ist. Ein Zusammenhang zwischen diesen beiden Reihen von Thatsachen ist unverkennbar. Es scheint, dass die ultrarothen Strahlen die langsameren Schwingungen verhältnissmässig stärker anfachen als die schnelleren, was sich ja auch schon in dem mehr grünlichen Farbenton der von ihnen wieder aufgefrischten Phosphorescenz gegenüber der mehr bläulichen Nuance der ursprünglich erregten

ausspricht. Ob dieses an langsameren Schwingungen verhältnissmässig reichere wiedergeweckte Phosphorescenzlicht von kürzerer oder längerer Dauer ist, würde davon abhängen, ob die betreffende Substanz langsamere Schwingungen nur vorübergehend oder aber dauernd auszuführen im Stande ist.

Weitere Ergebnisse der vorstehend beschriebenen Beobachtungsmethoden mögen späterer Mittheilung vorbehalten bleiben.

Erlangen, im October 1883.

VIII. *Ueber das specifische Gewicht des flüssigen Sauerstoffs; von Sigmund von Wroblewski.*

(Im Auszuge mitgetheilt der Paris. Acad. d. Wiss., den 16. Juli 1883.)

(Hierzu Taf. VIII Fig. 1.)

---

§ 1. Die im Jahre 1877 ausgeführten Versuche von Raoul Pictet gaben die erste Veranlassung zur Berechnung des specifischen Gewichtes des flüssigen Sauerstoffes. In einem an Pictet gerichteten Brief hatte Dumas[1]) die Vermuthung ausgesprochen, dass die Dichtigkeit des festen Sauerstoffes gleich eins und diejenige des flüssigen nicht viel verschieden davon sein könne. Betrachtet man nämlich Sauerstoff und Schwefel als isomorphe Körper, so müssen die Quotienten aus den Atomgewichten in die specifischen Gewichte (oder — wie sie Dumas nennt — „volumes atomiques“) bei beiden Körpern gleich sein. Da bei Schwefel dieser Quotient gleich $32/2 = 16$ ist, so müsse die Dichtigkeit des Sauerstoffes gleich $\frac{16}{16} = 1$ sein.

Darauf glaubte Pictet die Zahlen 0,9883 und 0,9787, die nur wenig von eins verschieden sind, aus seinen Versuchen ableiten zu können. Doch machte Offret[2]) bald darauf aufmerksam, dass diese Rechnung nicht richtig sein

1) R. Pictet, Ann. de chim. et de phys. (5) **13**. p. 197—98. 1878.
2) Offret, Ann. de chim. et de phys. (5) **19**. p. 271—283. 1880.

könne, sondern dass sich die Zahl 0,84 als der wahrscheinlichste Werth ergebe.

Leider aber ist auch dieser Zahl kein grosses Vertrauen zu schenken. In dem Apparate von Pictet konnte der flüssige Sauerstoff nur in der durch die verdunstende Kohlensäure abgekühlten kupfernen Röhre sich sammeln. In der in Verbindung mit ihr stehenden eisernen Retorte, die zur Entwickelung des Gases diente und immer auf einer Temperatur von etwa 485° C. gehalten wurde, konnte dagegen keine Verflüssigung eintreten. Die von Offret ausgeführte Berechnung der Dichtigkeit der Flüssigkeit hängt deshalb wesentlich von der Berechnung der zu subtrahirenden, im gasförmigen Zustande gebliebenen Sauerstoffmenge ab, und diese letztere kann nicht exact berechnet werden. Dazu fehlen: erstens die Kenntniss der Gesetze, welche das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz für den Sauerstoff in so grossen Temperaturgrenzen wie + 485 und — 130° C. ergänzen, zweitens die Kenntniss der Temperaturvertheilung und folglich der Dichtigkeitsvertheilung des Gases an der Uebergangsstelle der Röhre, wo der Temperaturwechsel mehr als 600° C. beträgt. Ausserdem kann man nicht mit Sicherheit wissen, bis zu welcher Stelle die Röhre mit der Flüssigkeit gefüllt gewesen ist.

Ein anderer Weg zur Bestimmung der Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes ist neulich von Cailletet und Hautefeuille[1]) eingeschlagen worden. Cailletet und Hautefeuille mischten ein Volumen Sauerstoff mit sieben Volumina Kohlensäure, erwärmten das Gemisch auf mehr als 31° C., um die Ausscheidung der flüssigen Kohlensäure zu verhindern, und brachten es unter sehr hohen Druck. Als nachher die Temperatur in überaus gleichmässiger Weise erniedrigt wurde, verflüssigte sich das Gemisch wie ein einfaches Gas. Da die bei dieser Verflüssigung eintretende Contraction — wie dies aus Versuchen mit anderen Gasen hervorging — nur eine sehr geringe gewesen sein konnte,

1) Cailletet und Hautefeuille, Compt. rend. **92.** p. 1086—1090. 1881.

so war man im Stande aus der Dichtigkeit der erhaltenen Flüssigkeit und der bekannten Dichtigkeit der Kohlensäure diejenige des Sauerstoffes annähernd zu berechnen. Die Resultate der Versuche sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

	bei 0° C.			bei −23° C.		
Druck in Atmosphären . . .	200	275	300	200	275	300
Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes im Gemisch	0,58	0,65	0,70	0,84	0,88	0,89

Aus einem unter dem Drucke von 300 Atmosphären ausgeführten Versuche mit einem Gemisch von Sauerstoff und Stickstoffoxydul ergab sich als Dichtigkeit bei 0° C. 0,65 und bei −23° C. 0,94.

§ 2. Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes des flüssigen Sauerstoffes diente mein bereits in der Abhandlung „über die Verflüssigung des Sauerstoffes u. s. w." beschriebener Apparat.[1]) Der Deutlichkeit wegen wird hier in der Fig. 1 die aus der a. a. O. publicirten Abbildung des Apparates entnommene Capillare *q* im vergrösserten Maassstabe wiedergegeben.

Auf diese Capillare ist die Millimetertheilung eingeätzt, und sie wurde darauf calibrirt. Ihr Volumen wurde genau ermittelt, ebenso das des Rohres *i*. Während die Füllung mit dem Gase ausgeführt wurde, befand sich das Rohr in einem Wasserbade. Der am unteren Ende des Rohres angesetzte Glashahn[2]) gestattete es, die Füllung genau unter dem atmosphärischen Drucke auszuführen. Aus dem Barometerstande und der Temperatur des Wasserbades konnte deshalb die in das Rohr eingelassene Gasmenge exact berechnet werden. Die Länge des nach abwärts gebogenen Theiles der Capillare wurde so gewählt, dass, wenn der Sauerstoff verflüssigt wurde, und man mit dem Quecksilber bis zur Biegungsstelle *A* der Capillare kam, der Meniskus des verflüssigten Gases ein paar Centimeter unter dem Kautschukpfropfen *r* stand.

Es ist unmöglich, mit dem Quecksilber so nahe an die

1) v. Wroblewski und Olszewski, Wied. Ann. 20. p. 246. 1883.
2) In der Figur nicht angegeben.

Oberfläche des flüssigen Sauerstoffes zu kommen, dass die Menge des nicht verflüssigten Gases ausser Acht gelassen werden kann. Und da andererseits diese Gasmenge sich ebenso wenig wie bei den Versuchen von Pictet berechnen lässt, so kann die Dichtigkeit des Sauerstoffes aus der zum Versuche genommenen Gasmenge und aus dem Volumen der erhaltenen Flüssigkeit nicht exact berechnet werden. Die Vernachlässigung des nicht verflüssigten Gases würde die Dichtigkeit grösser erscheinen lassen, als sie in Wirklichkeit ist. Man kann sich deshalb dieser Berechnung bedienen, nur um zu sehen, was für Werthe durch die Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes nicht erreicht werden können. Die auf diese Weise ausgeführten Berechnungen der Versuche, von denen gleich unten die Rede sein wird, zeigten, dass diese Dichtigkeit, gemessen unter dem Verflüssigungsdrucke bei der Temperatur von etwa -130^0 C., kleiner als Eins sein muss, und dass sie sogar nicht den Werth von 0,94 erreicht.

Zur Ermittelung des exacten Werthes habe ich folgende Methode erdacht.

Es sei Q_1 die zum Versuche genommene Sauerstoffmenge. Wird sie bei -130^0 C. verflüssigt und ist das Quecksilber in der Capillare bis zur Stelle A gekommen, so hat man:

$$Q_1 = v_1 d_1 + q_1, \tag{1}$$

wo v_1 und d_1 Volumen und Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes und q_1 die nicht verflüssigte Sauerstoffmenge bedeuten, Die Dimensionen der Röhre sind so gewählt worden, dass q_1 im Vergleiche zu $v_1 d_1$ sehr klein ist.

Füllt man jetzt das Rohr mit Kohlensäure oder mit Stickstoffoxydul und verflüssigt man dieses Gas bei 0^0 (wobei man mit dem Quecksilber wieder bis zur Stelle A kommt), so hat man für das genommene Gas:

$$Q_2 = v_2 d_2 + q_2, \tag{2}$$

wo ganz analog Q_2 die zum Versuche genommene Gasmenge, v_2 und d_2 Volumen und Dichtigkeit der erhaltenen Flüssigkeit und q_2 die nicht verflüssigte Gasmenge bedeuten.

Wird (1) durch (2) dividirt und alles nach d_1 aufgelöst, so erhält man für die Dichtigkeit des Sauerstoffes:

$$d_1 = d_2 \frac{\nu_2 Q_1}{\nu_1 Q_2} + \frac{q_2 Q_1 - q_1 Q_2}{v_1 Q_2}. \tag{3}$$

Da die Verflüssigungsdrucke des Sauerstoffes bei -130 und die der Kohlensäure oder des Stickstoffoxyduls bei 0^0 nicht viel voneinander verschieden sind, so ist es nicht schwer, zu erkennen, dass das Glied $(q_2 Q_1 - q_1 Q_2) / v_1 Q_2$ nur sehr wenig von der Null verschieden ist und vernachlässigt werden kann.

Die Methode gestattet deshalb, mit Hülfe der Gleichung:

$$d_1 = d_2 \frac{\nu_2 Q_1}{\nu_1 Q_2} \tag{3a}$$

die Dichtigkeit des Sauerstoffes mit grosser Annäherung zu bestimmen, wenn die Gasmengen und die Dimensionen der Capillare passend gewählt worden sind. Es ist nur exacte Kenntniss der Dichtigkeit des zu Hülfe genommenen Gases erforderlich.

Für Kohlensäure und Stickstoffoxydul können die im Laboratorium von Bunsen mit grosser Sorgfalt durch Andréeff[1]) ermittelten Zahlen benutzt werden. Andréeff fand die Dichtigkeit der Kohlensäure bei 0^0 und unter dem Verflüssigungsdrucke gleich 0,9471 und diejenige des Stickstoffoxyduls gleich 0,9370, wobei die Dichtigkeit des Wassers bei 4^0 C. gleich Eins gesetzt wurde.

Zur Prüfung der Methode habe ich die Dichtigkeit des bereits im flüssigen Zustande aus England bezogenen Stickstoffoxyduls durch Vergleich mit der Dichtigkeit der flüssigen Kohlensäure bestimmt. Ich fand sie gleich 0,9434, woraus zu ersehen ist, in wie weit die Methode zuverlässige Werthe liefert.

§ 3. Zu den Beobachtungen wurden zwei Röhren benutzt. Das ganze Volumen V der ersten Röhre, gemessen bei $22,75^0$ C. betrug 202,55 ccm, das Volumen R eines Centimeters der Capillare 0,051793 ccm. Bei der zweiten Röhre war V bei $23,44^0$ C. gleich 198,27 ccm und R 0,05282 ccm.

Die Berechnung der Versuche geschah mit Hülfe der folgenden zwei Gleichungen:

---

1) Andréeff, Lieb. Ann. **110.** p. 1—16. 1859, auch Ann. de chim. et de phys. (3) **56.** p. 317—333. 1859.

$$d = \frac{V(1+\beta\Theta')S.\,0{,}001\,293\,.\,P}{vR(1+\beta\Theta'')(1+\alpha\Theta')76}, \tag{4}$$

wo V und R die bereits angegebene Bedeutung haben und

v die abgelesene Länge der Flüssigkeitssäule in cm

β den cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Glases = 0,000 0255,

α den Ausdehnungscoëfficienten des Gases = 0,00366 (aus Bunsen's Tabellen in „Gasometrische Methoden"),

Θ' und P Temperatur und Druck — der letztere in Centimetern Quecksilber —, bei welchen die Röhre mit dem Gase gefüllt worden ist,

Θ'' die Temperatur, bei welcher die Verflüssigung des Gases stattfindet (für den Sauerstoff — 130° C.),

S das specifische auf Luft als Einheit bezogene Gewicht des Gases,

d die gesuchte Dichtigkeit

bedeuten. Diese Formel erhält man, indem man die in der Gl. (1) oder (2) angegebenen Grössen auf bekannte Weise ausdrückt, q gleich 0 setzt und die Gleichung nach d auflöst. Sie gestattet also, den Werth zu berechnen, welcher durch die Dichtigkeit des Sauerstoffes nicht erreicht wird.

Die zweite Formel ist:

$$d_1 = d_2 \frac{v_2(1+\beta\Theta'_1)(1+\alpha\Theta'_2)S_1 P_1}{v_1(1+\beta\Theta'_2)(1+\beta\Theta''_1)(1+\alpha\Theta_1')S_2 P_2}, \tag{5}$$

wo die mit dem Index Eins versehenen Buchstaben sich auf den Sauerstoff, diejenigen mit dem Index Zwei auf die Kohlensäure beziehen und dieselbe Bedeutung wie in der Gl. (4) haben. Diese Formel ist nichts weiter als die Gl. (3ª) und liefert die gesuchte Dichtigkeit des Sauerstoffes.

Bei der Bestimmung der Länge der Flüssigkeitssäule wurde jedesmal die Meniskushöhe ermittelt und $^1/_3$ dieser Höhe zu der am tiefsten Orte abgelesenen Länge zugezählt.

Bei den Versuchen mit der Kohlensäure wurde der nach abwärts gebogene Schenkel der Capillare bis zur Biegungsstelle A in einem Gemisch von Eis und Wasser gehalten, durch welches beständig ein Luftstrom ging. Es wurde genau darauf geachtet, dass keine Kohlensäure zwischen dem Quecksilber und dem horizontalen Theile der Capillare zurückblieb.

Versuche mit der ersten Röhre.

Kohlensäure.

	Erste Füllung (I)	Zweite Füllung (II)
Θ' =	13,78° C.	17,31° C.
P =	74,18 cm	74,64 cm
ν =	7,263 cm	7,16 cm

Sauerstoff.

$\Theta' = 19,31^0$ C. $P = 74,34$ cm.

Erster Versuch.

ν erste Ablesung 5,413 cm zweite Ablesung 5,406 cm

d nach der Gl. (4) aus der ersten Abl. 0,9471
„ „ zweiten „ 0,9484

d nach der Gl. (5) aus der ersten Abl. und I 0,9065
„ „ zweiten „ „ I 0,9077
„ „ ersten „ „ II 0,8989
„ „ zweiten „ „ II 0,9000

Zweiter Versuch.

ν erste Ablesung 5,493 cm zweite Ablesung 5,45 cm

d nach der Gl. (4) aus der ersten Abl. 0,9334
„ „ zweiten „ 0,9407

d nach der Gl. (5) aus der ersten Abl. und I 0,8933
„ „ zweiten „ „ I 0,9004
„ „ ersten „ „ II 0,8858
„ „ zweiten „ „ II 0,893

Versuche mit der zweiten Röhre.

	Kohlensäure	Sauerstoff
Θ' =	22,02° C.	22,55° C.
P =	74,46 cm	74,49 cm
ν =	6,577 cm	5,00 cm

d nach der Gl. (4) 0,9756 nach der Gl. (5) 0,9024

Die Capillare ist etwas verkürzt worden.

Kohlensäure.

	Erste Füllung (III)	Zweite Füllung (IV)
Θ' =	20,44° C.	19,44° C.
P =	72,99 cm	74,89 cm
ν erste Abl.	6,46 cm	6,68 cm
ν zweite „	6,48 cm	

Sauerstoff.

$\Theta' = 19,12^0$ C. $P = 73,22$ cm $\nu = 5$ cm

d nach der Gl. (4) 0,970

d nach der Gl. (5) aus der ersten Abl. von III 0,8944
„ „ zweiten „ „ III 0,897

d nach der Gl. (5) aus IV 0,8983.

Stellt man alle Werthe zusammen, so hat man für die Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes aus den Versuchen:

	mit der ersten Röhre	mit der zweiten Röhre vor der Verkürzung	mit der zweiten Röhre nach der Verkürzung
	0,9065	0,9024	0,8944
	0,9077	—	0,897
	0,8989	—	0,8987
	0,9000	—	—
	0,8933	—	—
	0,9004	—	—
	0,8858	—	—
	0,898	—	—
im Mittel	0,8983	0,9024	0,8967
Gesammtmittel	0,899		

Es bleibt noch nachzusehen, in wie weit dieser Werth durch die Vernachlässigung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite der Gl. (3) beeinflusst wird. Zu diesem Zwecke habe ich dieses Glied für den mit der zweiten Röhre noch vor der Verkürzung der Capillare ausgeführten Versuch berechnet.

Die zum Versuche genommene Menge Kohlensäure war 179,8 ccm bei 0° und 76 cm Quecksilberdruck oder 0,35547 g, diejenige des Sauerstoffes 179,54 ccm oder 0,25667 g. d_1 war 0,9024.

Das Volumen von 6,577 cm der Capillare reducirt auf die Temperatur des Versuches war gleich 0,3472 ccm, folglich war 0,32879 g das Gewicht der flüssigen, und 0,02668 g das der gasförmigen Kohlensäure.

Da das Volumen des flüssigen Sauerstoffes 0,26308 ccm betrug, so enthielt die Capillare — wenn man für diese Correction den soeben angeführten Werth von d benutzt — 0,2374 g Flüssigkeit und 0,01927 g Gas.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{q_2 Q_1 - q_1 Q_2}{\nu_1 Q_2} = \frac{0{,}02668 \times 0{,}25667 - 0{,}01927 \times 0{,}35547}{0{,}26308 \times 0{,}35547} = -0{,}000\,019 .$$

Der wahrscheinlichste Werth des specifischen Gewichtes des flüssigen Sauerstoffes, gemessen bei der Temperatur von etwa — 130° C. und unter dem Verflüssigungsdrucke ist mithin 0,899.

Zum Schluss erlaube ich mir noch zwei Bemerkungen. Der für die Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes erhaltene Werth schliesst durchaus nicht die Richtigkeit der Ansichten von Dumas aus. Der berühmte Chemiker bemerkt mit Recht in einem Zusatz[1]) zu meiner in den Comptes Rendus publicirten Note, dass die Gase im flüssigen Zustande sehr grosse Ausdehnungscoëfficienten haben, und dass dem zu Folge, wenn es möglich wäre, den Sauerstoff noch weiter abzukühlen, seine Dichtigkeit immer mehr gegen Eins convergiren würde. Uebrigens — meint Hr. Dumas — entspricht der gefundene Werth einem Molecularvolumen des Sauerstoffes, welcher sich von demjenigen des Schwefels nicht weiter entfernt, als die meisten Molecularvolumina der einfachen Körper von einer und derselben Gruppe voneinander abweichen.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf Versuche Pictet's.

Gleich nach der Publication der ersten Note vom 16. April d. J.[2]) erhielt ich mehrere Anfragen, ob nicht ein Druckfehler in den dort publicirten Verflüssigungsdrucken vorliege; so verschieden sind diese Zahlen von denjenigen, welche Pictet aus seinen Versuchen abgeleitet hat. Den Versuchen Pictet's zu Folge wäre die Dampfspannung des flüssigen Sauerstoffes bei – 130° C. gleich 273 Atmosphären nnd bei — 140° C. gleich 252 Atmosphären.[3])

Um diese Frage zu beantworten, muss zuerst gefragt werden, ob Pictet wirklich bei seinen Versuchen die von ihm angegebenen Temperaturen gehabt hat. Eine directe Antwort darauf ist — wie dies bereits an einem anderen Orte[4]) bemerkt worden — unmöglich. Ich habe aber versucht, mir eine Vorstellung davon auf indirectem Wege zu verschaffen. Man kann nämlich, wenn man sich der Beobachtungen am Aethylen, die ich noch nicht publicirt habe bedient, die Pictet'schen Temperaturen mit Hülfe des

1) Dumas, Compt. rend. **97.** p. 168. 1883.
2) v. Wroblewski und Olzewski, Compt. rend. **96.** p. 1140. 1883.
3) Pictet l. c. p. 210.
4) v. Wroblewski und Olszewski, Wied. Ann. **20.** p. 255. 1883.

Satzes von den correspondirenden Temperaturen[1]) annähernd berechnen. Andererseits kann man in die Temperaturgleichung Pictet's einige wahrscheinlichere Werthe für die darin vorkommenden Constanten einführen. Beide Wege führen zu dem Resultate, dass Pictet bei seinen Versuchen in dem abgekühlten Theil des Apparates eine Temperatur zwischen – 120 und – 130° C. gehabt hat.

Wenn man jetzt berücksichtigt, dass die kritische Temperatur des Sauerstoffes — so weit ich[2]) sie bis jetzt bestimmen konnte — etwa – 113° C. und der dieser Temperatur entsprechende kritische Druck nur etwa 50 Atmosphären betragen, so unterliegt es keinem Zweifel, dass jedesmal zu Anfang der Pictet'schen Versuche, als der Druck noch 470 Atmosphären betrug, der Sauerstoff in dem abgekühlten Theil des Apparates im flüssigen Zustande sich befand.

Die Kenntniss der Dichtigkeit des flüssigen Sauerstoffes gestattet jetzt, die Berechnung Offret's in umgekehrter Richtung auszuführen. Diese Berechnung ist zwar nicht streng richtig, sie gestattet aber doch eine annähernde Controle. Im Apparate von Pictet befanden sich 274,12 g Sauerstoff. Das Volumen der abgekühlten Röhre betrug nach der Annahme Offret's 45,5 ccm, dasjenige der erhitzten Retorte 967,5 ccm. Füllt man die Röhre mit dem Sauerstoff von der Dichtigkeit 0,899, so bleiben noch für den Inhalt der Retorte 233,2 g Sauerstoff, die bei der Temperatur von 485° C. — die Gültigkeit des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes vorausgesetzt — den Druck von 467,9 Atmosphären ausüben können. Pictet beobachtete 470 Atmosphären.

Bis so weit also wären alle aus den Versuchen von Pictet gezogenen Consequenzen richtig. Hätte Pictet zu seinen fünf Versuchen nicht immer eine und dieselbe Menge Sauerstoff genommen, die für seinen Apparat offenbar viel zu gross war, so hätte er auch niedrigere Drucke beobachten können. Leider ist bei den Pictet'schen Versuchen von

1) Groshans. Pogg. Ann. **78.** p. 112. 1849.

2) v. Wroblewski. Compt. rend. **97.** p. 309—310. 1883.

dem Augenblicke an, wo der Hahn des Apparates zum ersten mal geöffnet wird, jede weitere Berechnung unmöglich und ich muss desshalb die von ihm im Bezug auf die Dampfspannung des flüssigen Sauerstoffes gezogene Consequenz, welche im grellsten Widerspruche mit den direct beobachteten Thatsachen steht, als unrichtig bezeichnen.

Physik. Inst. d. Univ. Krakau.

IX. *Ueber die innere Ausdehnungsarbeit von Flüssigkeitsgemischen im Vergleich zu derjenigen ihrer Bestandtheile; von Joseph Drecker.*

(Hierzu Taf. VIII Fig. 2—7.)

Dass abweichend von dem Verhalten der Metalllegirungen die specifische Wärme eines Flüssigkeitsgemisches nicht allgemein gleich ist der aus den Bestandtheilen berechneten mittleren specifischen Wärme, ist durch die Arbeiten von Bussy und Buignet[1]), Dupré und Page[2]) und Schüller[3]) nachgewiesen worden. Am ausgedehntesten sind die Versuche, welche Schüller angestellt hat; er untersuchte Gemische der drei letzten Flüssigkeiten. Bei allen Gemischen, welche Alkohol enthielten, zeigte sich die beobachtete specifische Wärme grösser als die aus den Bestandtheilen berechnete, während die Differenzen zwischen beobachteter und berechneter specifischer Wärme bei den Mischungen Chloroform-Schwefelkohlenstoff, Chloroform-Benzin und Schwefelkohlenstoff-Benzin so klein waren, dass sie vollständig innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler lagen.

Hält man an dem Clausius'schen Satze von der Constanz der wahren Wärmecapacität eines Körpers fest, so muss man schliessen, dass bei Alkoholgemischen die bei der Tem-

1) Bussy et Buignet, Compt. rend. 64. p. 330. 1867.
2) Dupré et Page, Phil. Trans. 1869. p. 591.
3) Schüller, Pogg. Ann. Ergbd. 5. p. 116 u. 192. 1871.

peraturerhöhung geleistete innere Arbeit eine grössere ist, als bei den Bestandtheilen der Mischung. Diese innere Arbeit wird theilweise zur Volumveränderung geleistet, ein Theil derselben wird aber auch geleistet, ohne dass das Volumen sich ändert. Der erste Theil der inneren Arbeit, also der zur Volumänderung verwandte, lässt sich durch Beobachtung ermitteln, es ist dazu die Kenntniss des Ausdehnungs- und des Compressionscoëfficienten nöthig. Der zweite Theil der inneren Arbeit entzieht sich bisher der Beobachtung. Es lag nun die Frage nahe, und dies war der Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen, ob die Differenz der beobachteten und berechneten specifischen Wärme bei Flüssigkeitsgemischen ihren Grund habe in der etwaigen Verschiedenheit der bei der Ausdehnung geleisteten inneren Arbeit bei den Gemischen im Vergleich zu der bei den getrennten Bestandtheilen, oder ob auch bei constantem Volumen in beiden Fällen die innere Arbeit noch verschieden sei. Zur Beantwortung dieser Frage war es nothwendig, die Ausdehnungs- und Compressionscoëfficienten der Gemische zu bestimmen. Die Resultate dieser Untersuchungen, welche im Laboratorium des Hrn. Prof. Dr. Wüllner angestellt wurden, sind im Folgenden enthalten.

Ich wählte solche Mischungen, deren specifische Wärme von Schüller bestimmt war, nämlich:

1. Wasser-Alkohol·
2. Schwefelkohlenstoff-Alkohol.
3. Chloroform-Alkohol.
4. Chloroform-Schwefelkohlenstoff.

I. Dichte und Ausdehnung.

Die Ausdehnungscoëfficienten wurden aus den bei verschiedenen Temperaturen beobachteten Dichten berechnet.

Die folgenden Tabellen geben die Resultate der Beobachtungen, und zwar in der ersten Columne den Procentgehalt, in den folgenden die Dichten bei den in der ersten Horizontalzeile verzeichneten Temperaturen. Gleichzeitig wurden die aus den Bestandtheilen nach der Formel:

$$1 : \delta' = \frac{p_1 : \delta' + p_2 : \delta_2}{p_1 + p_2},$$

in welcher δ_1 und δ_2 die Dichten, p_1 und p_2 die Gewichtstheile der zur Mischung verwandten Flüssigkeiten bezeichnen, berechnete mittlere Dichte δ' und endlich das Verhältniss δ / δ', welches als Maass der Contraction dienen kann, angegeben.

Tabelle I.

Dichte und Contraction der Wasser-Alkoholgemische.

Gewichtsth. Alkohol in 100 Misch.	$T = 21,67^0$			$T = 30,68^0$			$T = 40,90^0$		
	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$
0	0,99790	—	—	0,99556	—	—	0,99201	—	—
8,253	0,98420	0,97704	1,00733	0,98152	0,97403	1,00769	0,97765	0,96975	1,00815
16,666	0,97311	0,95966	1,01720	0,96948	0,95301	1,01728	0,96452	0,94807	1,01735
25,668	0,96046	0,93577	1,02639	0,95537	0,93150	1,02564	0,94899	0,92592	1,02524
34,523	0,94595	0,91610	1,03258	0,93971	0,91127	1,03121	0,93221	0,90509	1,02996
45,041	0,92509	0,89377	1,03504	0,91810	0,88835	1,03349	0,90990	0,88159	1,03211
54,473	0,90456	0,87467	1,03417	0,89727	0,86875	1,03283	0,88862	0,86151	1,03147
65,503	0,87947	0,85333	1,03063	0,87191	0,84716	1,02921	0,86300	0,83915	1,02842
76,339	0,85411	0,83336	1,02490	0,84637	0,82649	1,02405	0,83721	0,81830	1,02311
86,631	0,82900	0,81523	1,01689	0,82117	0,80799	1,01631	0,81201	0,79942	1,01575
100	0,79284	—	—	0,78515	—	—	0,77616	—	—

Tabelle II.

Dichte und Contraction der Schwefelkohlenstoff-Alkoholgemische.

Gewichtsth. Alkohol in 100 Misch.	$T = 17,86^0$			$T = 28,21^0$			$T = 35,96^0$		
	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$
0	1,26569	—	—	1,25031	—	—	1,23863	—	—
10,025	1,18970	1,19501	0,99556	1,17472	1,18068	0,99495	1,16317	1,16980	0,99434
20,141	1,12384	1,13126	0,99344	1,10964	1,11786	0,99265	1,09874	1,10769	0,99192
29,663	1,06870	1,07718	0,99213	1,05538	1,06455	0,99139	1,04509	1,05496	0,99065
40,604	1,01213	1,02108	0,99124	0,99957	1,00925	0,99041	0,98987	1,00026	0,98961
49,807	0,96930	0,97823	0,99087	0,95744	0,96699	0,99013	0,94834	0,95845	0,98945
60,073	0,92630	0,93448	0,99125	0,91515	0,92384	0,99059	0,90659	0,91575	0,99000
71,091	0,88532	0,89168	0,99287	0,87484	0,88161	0,99232	0,86676	0,87396	0,99176
79,976	0,85519	0,85992	0,99450	0,84523	0,85028	0,99406	0,83758	0,84295	0,99363
88,421	0,82896	0,83177	0,99662	0,81956	0,82249	0,99644	0,81240	0,81544	0,99603
100	0,79603	—	—	0,78722	—	—	0,78052	—	—

Tabelle III.

Dichte und Contraction der Chloroform-Alkoholgemische.

Gewichtsth. Alkohol in 100 Misch.	$T = 19{,}46^0$			$T = 25{,}42^0$			$T = 30{,}96^0$		
	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$
0	1,48746	—	—	1,47680	—	—	1,46624	—	—
10,349	1,36359	1,36437	0,9994	1,35340	1,35478	0,9990	1,34367	1,34535	0,9987
19,939	1,26709	1,26720	0,9999	1,25828	1,25843	0,9999	1,24931	1,24987	0,9996
30,037	1,17976	1,17880	1,0008	1,17164	1,17075	1,0007	1,16346	1,16295	1,0004
40.074	1,10482	1,10236	1,0022	1,09694	1,09496	1,0018	1,08944	1,08777	1,0015
49.971	1,03838	1,03612	1,0022	1,03131	1,02921	1,0020	1,02442	1,02258	1,0018
59,958	0,97891	0,97688	1,0021	0,97250	0,97043	1,0021	0,96619	0,96427	1,0020
70.000	0,92551	0,92377	1,0019	0,91941	0,91773	1,0018	0,91354	0,91198	1,0017
79,968	0,87767	0,87647	1,0014	0,87195	0,87079	1,0013	0,86652	0,86539	1,0013
90,030	0,83396	0,83340	1,0007	0,82861	0,82803	1,0007	0,82351	0,82296	1,0006
100	0,79470	—	—	0,78962	—	—	0,78483	—	—

Tabelle IV.

Dichte und Contraction der Chloroform-Schwefelkohlenstoff-gemische.

Gewichtsth. Schwefelk. in 100 Misch.	$T = 18{,}58^0$			$T = 27{,}75^0$			$T = 35{,}86^0$		
	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$	Dichte δ beob.	Dichte δ' ber.	$\frac{\delta}{\delta'}$
0	1,48978	—	—	1,47236	—	—	1,45695	—	—
9,680	1,46024	1,46452	0,99716	1,44342	1,44754	0,99716	1,42832	1,43254	0,99705
17,702	1,43763	1,44423	0,99543	1,42098	1,42766	0,99532	1,40618	1,41293	0,99519
27,688	1,41138	1,41974	0,99411	1,39516	1.40353	0,99404	1,38071	1,38925	0,90385
39,834	1,38168	1,39102	0,99328	1,36591	1.37530	0,99317	1,35182	1,36147	9,99291
46.379	1,36674	1,37606	0,99323	1,35128	1,36059	0,90316	1,33745	1,34699	0,99292
56,043	1,34593	1,35451	0,99366	1,33079	1.33940	0,99358	1,31730	1,32618	0,99334
66,400	1,32443	1,33216	0,99420	1,30980	1,31741	0,99423	1,29668	1,30448	0,99398
82,626	1,29396	1,29858	0,99644	1.27977	1,28438	0,99641	1,26706	1,27196	0,99615
100	1,26446	—	—	1.25080	—	—	1.23888	—	—

Zur bequemeren Uebersicht habe ich in den mit 1. bezeichneten Curven den Fig. 2 bis 5 das Verhältniss δ / δ' graphisch dargestellt. Als Abscissen wählte ich die Zahlen, welche den Procentgehalt der Mischungen angeben, und als Ordinaten die Werthe δ / δ'. Der Abstand zweier Horizontallinien ist dabei gleich 0,005 angenommen. Für die Wasser-Alkohol- und Schwefelkohlenstoff-Alkoholgemische sind die Werthe δ / δ' für drei verschiedene Temperaturen dargestellt und

mit 1_a, 1_b, 1_c bezeichnet so zwar, dass 1_a für die niedrigste, 1_b für die mittlere und 1_c für die höchste Temperatur gilt. Für Chloroform-Alkohol und Chloroform-Schwefelkohlenstoff ist die Curve nur für die niedrigste Temperatur gezeichnet, da die Differenzen der Werthe δ / δ' bei diesen Mischungen zu klein sind. Als besonders auffallend glaube ich das Verhalten der Wasser-Alkoholgemische, welche weniger als 18% Alkohol enthalten, hervorheben zu müssen. Während nämlich bei allen übrigen untersuchten Gemischen das Verhältniss δ / δ' mit steigender Temperatur abnimmt, wird es bei diesen mit steigender Temperatur grösser.

Ausdehnungscoëfficienten der Flüssigkeitsgemische.

Zur Bestimmung der Ausdehnungscoëfficienten wurden ausser den oben mitgetheilten Dichten noch diejenigen bei 38,15° für die Schwefelkohlenstoff-Alkoholgemische und diejenigen bei 18,08° und 36,92° für die Chloroform-Alkoholgemische beobachtet. Aus einer Combination von je drei Werthen für die Dichte wurden alsdann die Constanten v_0, a, b der Formel $v_t = v_0 (1 + a t + b t^2)$, in welcher t die Temperatur, v_t das Volumen bei t^0, v_0 dasjenige bei o^0 bedeutet, berechnet. In den folgenden Tabellen V bis VIII finden sich nur die Mittelwerthe aus den Beobachtungen; ausserdem in der 5. Columne der Ausdehnungscoëfficient bei 25° $\alpha_{25} = a + 50\,b$. In den beiden letzten Columnen einer jeden der folgenden vier Tabellen sind die Werthe v'_0 und α'_{25} verzeichnet, welche unter der Annahme, dass die Flüssigkeiten sich in der Mischung so ausdehnen, wie sie es getrennt thun würden, aus dem Procentgehalt berechnet sind. Unter dieser Annahme ist:

$$\alpha'_{25} = \frac{p_1 v_{01} \alpha_1 + p_2 v_{02} \alpha_2}{p_1 v_{01} + p_2 v_{02}}$$

und

$$v'_0 = \frac{p_1 v_{01} + p_2 v_{02}}{p_1 + p_2}$$

In diesen Gleichungen bedeuten p_1 und p_2 die Gewichtstheile der beiden Flüssigkeiten in der Mischung, v_{01} und v_{02} die Grösse v_0 für die beiden Flüssigkeiten und α_1 und α_2 ihre Ausdehnungscoëfficienten bei 25°.

Tabelle V.

Ausdehnungscoëfficienten der Wasser-Alkoholgemische.

Gewichtsth. Alkohol in 100 Misch.	a	b	v_0	α_{25}	v'_0	α'_{25}
0	—	—	1	0,000 254 9	—	—
8,253	0,000 070 90	0,000 004 457	1,01235	0,000 293 7	1,01925	0,000 340 3
16,666	0,000 173 03	4 687	1,02152	0,000 407 4	1,03888	0,000 424 2
25,668	0,000 410 53	3 673	1,03031	0,000 594 2	1,05988	0,000 510 5
34,523	0,000 594 93	2 915	1,04236	0,000 740 7	1,08054	0,000 592 2
45,041	0,000 739 13	2 245	1,06274	0,000 851 4	1,10507	0,000 685 2
54,473	0,000 755 06	3 094	1,08611	0,000 909 8	1,12707	0,000 765 1
65,503	0,000 815 85	3 128	1,11565	0,000 972 3	1,15281	0,000 854 7
76,339	0,000 853 86	3 464	1,14767	0,001 027 1	1,17808	0,000 939 0
86,631	0,000 924 88	2 965	1,18087	0,001 073 1	1,20209	0,001 015 7
100	0,001 002 44	2 170	1,23328	0,001 110 9	—	—

Tabelle VI.

Ausdehnungscoëfficienten der Schwefelkohlenstoff-Alkoholgemische.

Gewichtsth. Alkohol in 100 Misch.	a	b	v_0	α_{25}	v'_0	α'_{25}
0	0,001 133 0	0,000 001 777	0,77402	0,001 222 0	—	—
10,025	0,001 105 2	3 316	0,82340	0,001 271 0	0,82006	0,001 205 3
20,141	0,001 104 9	3 411	0,87165	0,001 275 4	0,86652	0,001 190 2
29,663	0,001 053 9	4 124	0,91725	0,001 260 1	0,91025	0,001 177 4
40,604	0,001 045 1	4 192	0,96864	0,001 254 7	0,96050	0,001 164 1
49,807	0,001 060 3	3 483	1,01140	0,001 234 5	1,00276	0,001 154 0
60,073	0,001 029 8	3 693	1,05885	0,001 214 4	1,04991	0,001 143 6
71,091	0,001 012 4	3 646	1,10822	0,001 194 8	1,10029	0,001 133 7
79,976	0,000 986 1	3 772	1,14773	0,001 174 7	1,14132	0,001 126 0
88,421	0,000 999 0	2 823	1,18415	0,001 140 1	1,18010	0,001 119 3
100	0,001 002 4	2 170	1,23328	0,001 110 9	—	—

Tabelle VII.

Ausdehnungscoëfficienten der Chloroform-Alkoholgemische.

Gewichtsth. Alkohol in 100 Misch.	a	b	v_0	α_{25}	v'_0	α'_{25}
0	0,001 205	0,000 002 277	0,65609	0,001 319	—	—
10,349	0,001 204	2 542	0,71645	0,001 331	0,71582	0,001 282
19,939	0,001 131	3 324	0,77088	0,001 297	0,77118	0,001 253
30,087	0,001 083	3 716	0,82873	0,001 269	0,82946	0,001 226
40,074	0,001 117	2 731	0,88496	0,001 253	0,98739	0,001 203
49,971	0,001 103	2 363	0,94161	0,001 222	0,94452	0,001 183
59,958	0,001 060	2 590	0,99968	0,001 189	1,00216	0,001 165
70,000	0,001 025	2 742	1,05826	0,001 162	1,06012	0,001 150
79,968	0,001 019	2 369	1,11621	0,001 138	1,11766	0,001 135
90,080	0,001 012	2 224	1,17497	0,001 124	1,17573	0,001 122
100	0,001 002	2 170	1,23328	0,001 111	—	—

Tabelle VIII.

Ausdehnungscoëfficienten der Chloroform-Schwefelkohlenstoffgemische.

Gewichtsth. Schwefelk. in 100 Misch.	a	b	v^0	α_{25}	v'_0	α'_{25}
0	0,001 205	0,000 002 277	0,65609	0,001 319	—	—
9,680	0,001 203	2 267	0,66925	0,001 317	0,66751	0,001 308
17,702	0,001 198	2 358	0,67989	0,001 316	0,67697	0,001 299
27,688	0,001 193	2 236	0,69263	0,001 305	0,68874	0,001 290
39,834	0,001 174	2 441	0,70770	0,001 296	0,70308	0,001 277
46,379	0,001 160	2 490	0,71562	0,001 285	0,71078	0,001 270
56,043	0,001 168	2 152	0,72666	0,001 276	0,72218	0,001 261
66,400	0,001 117	2 864	0,73904	0,001 260	0,73440	0,001 251
82,626	0,001 121	2 448	0,75642	0,001 244	0,75353	0,001 237
100	0,001 133	1 777	0,77402	0,001 222	—	—

Die in vorstehenden Tabellen mitgetheilten Werthe des Anfangsvolumens und des Ausdehnungscoëfficienten sind auf den Fig. 2 bis 5 graphisch dargestellt. Als Abscissen gelten auch hier für die ersten drei Figuren die in der Mischung enthaltenen Gewichtsprocente Alkohol, für Fig. 5 die Gewichtsprocente Schwefelkohlenstoff. Die Ordinaten der Curven 2_a geben die Volumina v_0, diejenigen der Curven 2_b die Volumina v'_0. Die Ordinaten der Curven 3_a geben die Ausdehnungscoëfficienten α_{25} und diejenigen der Curven 3_b die Ausdehnungscoëfficienten α'_{25}. Auf Fig. I ist der Abstand zweier Horizontalen für die Curven 2_a und 2_b gleich 0,02, für die Curven 3_a und 3_b gleich 0,0001, auf den Fig. II, III und IV dagegen für die Curven 2_a und 2_b gleich 0,000 02 und für die Curven 3_a und 3_b gleich 0,05 gesetzt. Ausserdem ist noch am Rande Anfangs- und Endwerth jeder einzelnen Curve angegeben. Die Curve für v'_0 sind gerade Linien, diejenigen für α'_{25} Hyperbeln. Letztere würden gerade Linien sein, wenn als Abscissen statt der Gewichtsprocente Volumprocente gewählt worden wären.

Ein Blick auf die Curven 2_a und 2_b zeigt, dass bei den Wasser-Alkohol- und Chloroform-Alkoholgemischen für v_0 eine Contraction, dagegen bei den Gemischen, welche Schwefelkohlenstoff enthalten, eine Dilatation eintritt. Die Curven 3_a und 3_b zeigen, dass der Ausdehnungscoëfficient der Mischungen

nur in einem einzigen Falle (bei der 18procentigen Wasser-Alkoholmischung) gleich dem aus den Ausdehnungscoëfficienten der Flüssigkeiten und dem Procentgehalt berechneten ist. Für Wasser-Alkoholgemische, welche weniger als 18 Proc. Alkohol enthalten, ist der beobachtete Ausdehnungscoëfficient kleiner als der berechnete, für alle übrigen untersuchten Gemische ist er grösser als der berechnete. Hieraus erklärt sich auch das abweichende Verhalten der zuerst genannten Gemische in Bezug auf die Aenderung der Contraction mit der Temperatur, welche p. 874 besprochen wurde. Ferner hebe ich noch hervor, dass bei diesen Gemischen die Curve 2_a für das Volumen v_0 der für v'_0 gezeichneten Geraden 2_b ihre convexe Seite zukehrt, während bei allen übrigen Gemischen das Gegentheil der Fall ist.

In der bereits p. 870 citirten Abhandlung von Dupré und Page finden sich auch Beobachtnngen über die Ausdehnung von Wasser-Alkoholgemischen. Die genannten Physiker geben die mittlere Ausdehnung zwischen 10 und 20° an und gelangen zu ganz analogen Resultaten, sie finden die Gleichheit der beobachteten und berechneten Ausdehnung bei einer 17procentigen Mischung.

II. Compressibilität.

Methode der Beobachtung.

Die zu untersuchende Flüssigkeit wurde in ein Piëzometer von der Form A (Fig. 6) eingeschlossen. Diese Form des Piezometers mit zwei offenen capillaren Röhren bietet vor der gewöhnlichen Form mit einem capillaren Rohr den Vorzug dar, dass sich dasselbe in sehr bequemer Weise reinigen, trocknen und füllen lässt. Um das Piëzometer zu füllen, wurde der gerade Schenkel in die betreffende Flüssigkeit getaucht und der andere mit einer Saugpumpe in Verbindung gesetzt. Da nur leicht verdampfende Flüssigkeiten in Anwendung kamen, liess sich das Trocknen des Innern leicht dadurch bewerkstelligen, dass man eine Zeit lang einen trockenen Luftstrom durchsaugen liess. Vor der definitiven Füllung wurde das Piëzometer noch mit der einzufüllenden Flüssigkeit ge-

spült. Alle mit dem Piëzometer vorzunehmenden Operationen liessen sich ausführen, ohne das Piëzometer zu erwärmen, ein Umstand, der im vorliegenden Falle, wo es sich um Flüssigkeitsgemische handelt, welche durch Erwärmen ihren Procentgehalt ändern, von grosser Wichtigkeit ist. Ausserdem ist das Piëzometer nicht so leicht der Gefahr des Zerbrechens ausgesetzt (alle im Folgenden mitgetheilten Versuche wurden mit einem und demselben Piëzometer angestellt). Der Fehler beim Ablesen des Standes der Flüssigkeit in den capillaren Röhren ist allerdings bei der von mir gewählten Form des Piëzometers ein grösserer wegen der doppelten Ablesung, indessen wird es bei dieser Form ermöglicht, die capillaren Röhren, ohne die freie Beweglichkeit der Flüssigkeitsfäden zu sehr zu hemmen, bedeutend enger zu nehmen. Zum Vergleiche stelle ich die Volumverhältnisse der von anderen Beobachtern benutzten Piëzometer mit denen des von mir benutzten in Folgendem zusammen.

Das Gefäss meines Piëzometers enthielt 745,9314 g Quecksilber von 20°. Die capillaren Röhren trugen eine Millimetertheilung und waren sorgfältig calibrirt. Zu dem Zwecke wurde zunächst aus der im Piëzometer beobachteten scheinbaren und der den Wüllner'schen Rechnungen[1]) entnommenen wahren Ausdehnung des Quecksilbers die Ausdehnung des Piëzometers selbst berechnet. Es ergab sich als Mittel aus zwei Versuchsreihen für den cubischen Ausdehnungscoëfficienten des Glases zwiscen 20° und 30° die Zahl 0,000 025 3.

Nun liess sich die Capacität der capillaren Röhren aus der scheinbaren Ausdehnung des Quecksilbers, dem gefundenen Werthe für die Ausdehnung des Gefässes und dem Anfangsvolumen des Gefässes, welches durch Wägung mit Quecksilber gefunden war, bestimmen. Als Mittelwerth aus fünf, unter einander wenig abweichenden Versuchsreihen ergab sich für die Capacität eines Millimeters der capillaren Röhren in der Nähe des Gefässes 0,000 177 ccm. Nach dem offenen Ende hin nahm diese Capacität zu bis 0,000 181 ccm. Im Mittel enthielt also 1 mm Länge 0,000 003 2 des Gesammtvolumens.

---

1) Wüllner, Experimentalphysik. **3.** 3. Aufl. p. 67.

Grassi[1]) benutzte zu seinen Versuchen mehrere Piëzometer, unter welchen das empfindlichste bei einem Gesammtvolumen von 102,9307 ccm in 1 mm Länge des getheilten Rohres 0,001 147 5 ccm enthielt, also 0,000 011 221 des Gesammtvolumens.

Das von Dupré und Page[2]) benutzte Piëzometer enthielt 114,0727 ccm in 1 mm der Capillarröhre 0,000 517 173 ccm, also 0,000 004 5 des Gesammtvolumens. Von den Piëzometern Amagat's[3]) enthielt das eine in 1 mm der Capillarröhre 0,000 933, das andere 0,000 177 des Gesammtvolumens bei einer Capacität von 0,003 57, resp. 0,001 57 ccm auf 1 mm Länge der Capillarröhre.

Die Empfindlichkeit des von mir benutzten Piëzometers ist demnach, wenn ich wegen der doppelten Ablesung nur die Hälfte der aus obigen Angaben sich ergebenden Zahl für die Empfindlichkeit also: 1 : 0,000 006 4 annehme, fast zweimal so gross, als die des Grassi'schen, 28mal so gross, als die des besseren Amagat'schen und etwa 1,4mal kleiner als die des Piëzometers von Dupré und Page.

Zur Bestimmung des Druckes diente ein neben dem Piëzometer aufgestelltes Manometer M (Fig. 6), welches eine Länge von 38 cm hatte und Drucke bis zu sieben Atmosphären mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen liess. Dasselbe trug eine Millimetertheilung und war von 5 zu 5 cm calibrirt. Piëzometer und Manometer waren an der Stange S befestigt und tauchten in ein eisernes Gefäss mit Quecksilber. Gegen Eindringen von Unreinigkeiten vom Boden des eisernen, mit Lack überzogenen Gefässes her waren sowohl die capillaren Röhren des Piëzometers als auch das Manometerrohr durch kleine, unten geschlossene Glascylinder geschützt.

Das Ganze wurde in einen Magnus'schen Compressionsapparat (Fig. 7) gebracht und soviel Quecksilber nachgegossen, dass die kleinen Glascylinder vollständig unter dem Niveau blieben, und leszteres von aussen sichtbar war. Dann wurde der Apparat mit Wasser gefüllt und in ein Wasserbad ge-

---

1) Grassi, Ann. de chim. et de phys. (3) **31.** p. 437. 1850.
2) Dupré et Page, l. c. p.
3) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (5) **11.** p. 521. 1877.

bracht, welches an zwei gegenüberliegenden Seiten Wände aus Glas hatte. Das zur Compression benutzte Wasser wurde durch das Rohr r direct diesem Wasserbade entnommen. In dasselbe tauchte ein in Fünfzigstelgrade getheiltes Thermometer, und es gelang, durch einen stets in Bewegung erhaltenen Rührapparat R die Temperatur des Wassers bis auf $^1/_{100}$ Grad während der Dauer des Versuches constant zu erhalten. Nach dem Einsetzen des Compressionsapparates verging meist 1 bis $1^1/_2$ Stunden, ehe bei constanter Temperatur des Bades auch das Wasser des Compressionsapparates und die Flüssigkeit im Piëzometer diese Temperatur angenommen hatte, was sich sehr genau durch constant bleibende Stellung der Quecksilberfäden in den capillaren Röhren des Piëzometers erkennen liess.

War dieser Zustand eingetreten, so wurde zunächst der Druck bestimmt, unter welchem die Flüssigkeit im Piëzometer stand, wenn der Hahn des Verbindungsrohres des Inneren des Compressionsapparates mit dem Wasser des Bades geöffnet war.

Die Luft im Manometer M steht unter dem Druck:

$$b + w - q_0 = p_0,$$

wenn b den Barometerstand, w die Höhe des Wassers vom unteren Quecksilberniveau bis zum Niveau des Wassers im Bade, reducirt auf Quecksilberhöhe, und q_0 die Höhe des Quecksilberniveaus im Manometer über dem Niveau des Quecksilbers im Apparate bedeutet. In dem Piëzometer ist alsdann der Druck:

$$b + w - k_0,$$

wenn k_0 die in den capillaren Röhren gehobene Quecksilbersäule bedeutet. Wird nun comprimirt, sodass die Luft im Manometer nur noch das Volumen v hat, während ihr Anfangsvolumen v_0 war, so ist der Druck, unter welchem sie steht:

$$p_0 \frac{v_0}{v}.$$

In dem Piëzometer ist alsdann der Druck, wenn q und k wieder die gehobenen Quecksilbersäulen im Manometer, resp. in den capillaren Röhren bedeuten:

$$p_0 \frac{v_0}{v} + q - k,$$

und demnach die Druckzunahme:

$$p_0 \frac{v_0}{v} - (b + w - k_0) + q - k$$

$$\text{oder } (b + w - q_0)\frac{v_0}{v} - (b + w - q_0) + (q - q_0) - (k - k_0)$$

$$\text{oder } \left(\frac{v_0}{v} - 1\right) p_0 + (q - q_0) - (k - k_0).$$

Da alle Grössen in Millimetern angegeben sind, so ist der Ausdruck durch 760 zu dividiren, um den Druck in Atmosphären zu erhalten. Das Ablesen des Quecksilberniveaus im Manometer geschah mittelst eines an der Aussenseite des Bades auf und ab beweglichen Visirs *V*. Das Manometer wurde gereinigt und frisch gefüllt, sobald sich die geringste Unreinigkeit am Niveau des Quecksilbers oder im Rohre zeigte.

Die mit dem so eingerichteten Apparate beobachteten Compressionen sind nur die scheinbaren Compressionen der Flüssigkeiten; es ist nämlich, da der Druck auch auf die äusseren Wandungen des Piëzometers ausgeübt wurde, zu dem aus den Beobachtungen sich ergebenden Compressionscoëfficienten noch derjenige des Glases zu addiren. Letzterer wurde nicht durch Versuche bestimmt, sondern den Beobachtungen Regnault's[1]) entnommen und demnach zu den beobachteten Compressionscoefficienten 0,000 001 85 addirt.

Die grössten Schwierigkeiten, welche sich den Beobachtungen der Compression entgegenstellen, beruhen darin, dass durch die Compression die Temperatur der comprimirten Flüssigkeit erhöht wird. Infolge dessen dehnt sich die Flüssigkeit im Piëzometer aus, und die eintretende Volumveränderung bei der Compression ist die Differenz zwischen der Compression und jener Ausdehnung. Erst allmählich gibt die Flüssigkeit die durch Compression erhaltene Wärme wieder an die Umgebung, also an das in der Temperatur constant gebliebene Wasser des Bades ab, und erst dann erhalten wir in der Volumverminderung die wahre Compression.

Die Compression der Flüssigkeiten lässt sich bei dem beschriebenen Apparat nicht momentan ausführen, da mehr-

1) Regnault, Mém. de l'Acad. des sciences de l'inst. de France. 21. p. 429. 1847.

maliges Heben des Kolbens in der Compressionspumpe erforderlich ist, um eine merkliche Compression zu erhalten, wohl aber konnte durch einfaches Oeffnen des Hahnes der Druck momentan nachgelassen werden. Dabei tritt dann eine momentane Volumvergrösserung der Flüssigkeit im Piëzometer auf, welche die Differenz zwischen der durch Nachlassen des Druckes hervorgerufenen Dilatation und der durch Temperaturabnahme hervorgerufenen Zusammenziehung darstellt. Diese beim Oeffnen des Hahnes eintretende Volumvergrösserung nenne ich im Folgenden die momentane Dilatation und bezeichne sie mit D_m, im Gegensatz zu der totalen Dilatation D_t, welche eintritt, wenn die Temperatur sich wieder ausgeglichen hat, was durch Constantwerden der Niveaux der Quecksilberfäden in den capillaren Röhren zu erkennen war. Die totale Dilatation ist gleich der bei der Compression eintretenden totalen Compression C_t.

Die Temperaturzunahme infolge der Compression und damit der Unterschied, welcher zwischen der totalen und momentanen Dilatation vorhanden sein muss, lässt sich nach den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie berechnen. Es ist nämlich nach einer von W. Thomson[1]) zuerst aufgestellten Formel:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)_Q = \frac{A T v_0 \alpha_t}{c_p}.$$

Die Gleichung gibt die Temperaturänderung dt, welche ein Körper erleidet, wenn der Druck, unter welchem er steht, sich nm dp ändert, vorausgesetzt, dass während des Ueberganges Wärme weder zu- noch abgeführt wird. In der Gleichung bedeutet A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit 1 : 424, T die absolute Temperatur 273 + t, v_0 die bereits oben angegebene Grösse und c_p die specifische Wärme bei constantem Druck. Um die Temperaturerhöhung für eine Atmosphäre zu erhalten, ist die rechte Seite der Gleichung mit 10334 zu multipliciren, ferner ist zu bemerken, dass v_0 in Cubikmetern pro Kilogramm ausgedrückt werden muss, dass also die früher für v_0 angegebenen Zahlen durch 1000 zu dividiren sind. Die

1) Thomson, Phil. Mag. (4) 15. p. 540. 1858.

Werthe für c_p wurden der schon citirten Schüller'schen Arbeit entnommen.

Es sei nun diese Temperaturänderung für eine Atmosphäre gleich τ^0 Celsius, so geht das Anfangsvolumen, welches, da alle Compressionen bei 25° ausgeführt wurden, gleich $v_0(1 + 25\alpha)$ ist, über in $v_0 \, [1 + (25 + \tau)\alpha]$, es ist also die Volumenänderung gleich:

$$v_0 \, . \, \alpha \, . \, \tau \, .$$

Ist ferner der Compressionscoëfficient β, so ist die durch Compression hervorgerufene Volumenänderung:

$$-\beta v_0 (1 + 25\alpha),$$

alles bezogen auf eine Atmosphäre. Reduciren wir die Volumenänderung auf die Einheit des Anfangsvolumens, so erhalten wir für die erste Grösse:

$$\frac{v_0 \, . \, \alpha \, . \, \tau}{v_0 (1 + 25\alpha)},$$

für die zweite $-\beta$, und es besteht die Gleichung:

$$\beta = D_t = D_m + \frac{\alpha \tau}{1 + 25\alpha}.$$

In dieser Gleichung ist der Einfluss der Compression des Gefässes vernachlässigt.

Die im Folgenden mitgetheilten Versuchsresultate gestatten also eine experimentelle Prüfung der Thomson'schen Gleichung, welche, soviel mir bekannt, bisher nur durch die Versuche von Joule[1]) für Wasser bestätigt war.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die von mir untersuchten Flüssigkeiten nicht vorher durch Auskochen von der absorbirten Luft befreit wurden. Es ist nun zwar nach den Versuchen von Colladon und Sturm[2]) der Compressionscoëfficient des von Luft nicht befreiten Wassers kleiner, als der des ausgekochten Wassers, es ist jedoch diese Beobachtung durch die neueren sorgfältigen Versuche von Amagat[3]) bei Aether, Aceton und Ammoniaklösung nicht bestätigt worden.

1) Joule, Phil. Mag. (5) **17.** p. 61. 1859.

2) Colladon u Sturm, Ann. de chem. et de phys. (2) **36.** p. 113. 1827.

3) Amagat, l. c.

Ich habe daher auf diesen Umstand keine weitere Rücksicht nehmen zu brauchen geglaubt.

Compressionscoëfficienten der ungemischten Flüssigkeiten.

1. Alkohol.

In der ersten der folgenden Tabellen sind die sämmtlichen Versuchsresultate mitgetheilt, und zwar findet sich in der ersten Columne die Temperatur, in der zweiten der Druck in Millimetern und Atmosphären (da der Druck sich aus der Gleichung $p = (v_0/v - 1)p_0 + (q - q_0) - (k - k_0)$ (p. 881) bestimmt, und die Differenz $k - k_0$ bei der totalen Dilatation grösser ist, als bei der momentanen, so ist bei constantem Stande des Manometers der Druck bei der totalen Compression kleiner als bei der momentanen Compression, daher die doppelten Druckangaben), in der dritten die momentane und totale Volumenänderung ausgedrückt in Millimetern der capillaren Röhren des Piëzometers, in der vierten die daraus berechnete Volumenänderung D_m und D_t in Bruchtheilen des Anfangsvolumens bezogen auf den Druck einer Atmosphäre, in der fünften die aus der momentanen Volumenänderung D_m und der durch Temperaturänderung hervorgerufenen Volumenänderung nach der Gleichung:

$$D_t = D_m + \frac{\alpha\tau}{1 + 25\alpha}$$

berechnete totale Dilatation, in der sechsten die Differenz zwischen der beobachteten und berechneten totalen Dilatation.

Erste Reihe.

Anfangsvolumen der Flüssigkeit im Piëzometer 55,101 ccm.

Capacität eines Millimeters der Capillarröhren in der Gegend, wo die Compression stattfand 0,000 179 ccm, oder in Bruchtheilen des Anfangsvolumens 0,000 003 254.

Berechnete Temperaturerhöhung für eine Atmosphäre Druck $\tau = 0{,}0162^0$.

Daraus sich ergebende Volumenänderung $\alpha\tau/(1 + 24{,}78\alpha)$ $= 0{,}000\,017\,5$ in Bruchtheilen des Anfangsvolumens.

1.	2.		3.		4.		5.	6.
t	Druck in		Volumenänderung in mm		$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$	$10^7 . D_t$	Diff.
	mm	Atm.	mom.	totale		beob.	ber.	
24,780	3424	4,505	131,0	—	946	—	—	—
	3412	4,489	—	155,2	—	1125	1121	4
	1125	1,480	42,8	—	941	—	—	—
	1121	1,475	—	50,8	—	1120	1116	4
	871	1,145	33,4	—	948	—	—	—
	868	1,142	—	39,6	—	1128	1123	5
				Mittel:	945	1124	1120	4

Der für das berechnete D_t angegebene Mittelwerth ist hier und im Folgenden, wo nicht für jede momentane Dilatation die entsprechende totale angegeben ist, aus dem Mittelwerthe für D_m berechnet. In den folgenden Tabellen ist der Druck nur in Millimetern angegeben und Columne 3 weggelassen.

Zweite Reihe.

t	Druck in mm	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beob.	$10^7 . D_t$ ber.	Differenz
25,300	4115	949	1119	1124	5
	3935	943	—	—	—
	3852	944	1114	1119	5
	1298	952	—	—	—
	1284	949	—	—	—
	2144	949	1124	1124	0
	2123	944	—	—	—
	2197	946	—	—	—
	2182	939	—	—	—
	Mittel:	945	1119	1120	1

Dritte Reihe.

t	Druck in mm	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beob.	$10^7 . D_t$ ber.	Differenz
25,450	1159	945	—	—	—
	1914	940	1111	1116	5
	3660	943	—	—	—
	Mittel:	943	1111	1118	7

Als Mittelwerth für D_t erhalten wir demnach 0,0001120. Hiezu ist zu addiren der Compressionscoëfficient des Glases

0,000 001 8. Es ist somit der Compressionscoëfficient für Alkohol bei 25°: $\beta = 0{,}000\,113\,8$.

2. Schwefelkohlenstoff.

$$\tau = 0{,}028\,12^{\circ}, \qquad \frac{\alpha\tau}{1 + 25\alpha} = 0{,}000\,033\,35.$$

t	Druck in mm	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beob.	$10^7 . D_t$ ber.	Differenz
24,770	3925	623	—	—	—
	3893	615	—	—	—
	1984	625	—	—	—
	1887	615	—	—	—
	1181	623	930	956	26
	912	627	—	—	—
	587	629	—	—	—
	Mittel:	622	930	955	25
	513	622	—	—	—
	1843	632	954	965	11
	1758	628	—	—	—
	6198	—	950	—	—
	Mittel:	627	952	960	8

Als Mittelwerth ergibt sich:

$$D_t = 0{,}000\,095\,7,$$

und daraus für den Compressionscoëfficienten des Schwefelkohlenstoffes: $\beta = 0{,}000\,097\,5$.

3. Chloroform.

$$\tau = 0{,}026\,96^{\circ}, \qquad \frac{\alpha\tau}{1 + 25\alpha} = 0{,}000\,034\,42:$$

t	Druck in mm	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beob.	$10^7 . D_t$ ber.	Differenz
24,210°	771	700	—	—	—
	1604	—	1041	—	—
	4593	703	—	—	—
	4627	702	1025	—	—
	Mittel:	702	1033	1046	13
24,790	956	698	—	—	—
	1196	715	—	—	—
	1925	707	1035	1051	18
	1984	706	—	—	—
	3608	710	—	—	—
	Mittel:	707	1035	1051	18

Als Mittel für D_t finden wir also:

$$D_t = 0{,}0001049,$$

und demnach für den Compressionscoëfficienten des Chloroforms bei 25°: $\beta = 0{,}0001067$.

4. Wasser.

Bei Wasser ist die Temperaturerhöhung für eine Atmosphäre bei 15°:

$$\tau = 0{,}001849^0,$$

und demnach die Volumenänderung:

$$\frac{\alpha\tau}{1 + 25\alpha} = 0{,}0000004688.$$

Diese sehr kleine Volumenänderung entzog sich bei den Versuchen der Beobachtung namentlich deshalb, weil auch das das Piëzometer umgebende Wasser des Compressionsapparates dieselbe Temperaturerhöhung erleidet, und der Ausgleich mit dem Wasser des äusseren Bades zu lange dauert, als dass es möglich wäre, dieses während einer solchen Zeit absolut in der Temperatur constant zu erhalten. Auf die Untersuchung der übrigen Flüssigkeiten ist diese Temperaturerhöhung des Wassers im Compressionsapparate von wenig Einfluss, da die Temperaturerhöhung dieser Flüssigkeiten mehr als das Zehnfache beträgt.

Ich gebe in folgender Tabelle die Resultate einer Versuchsreihe bei genau 25°.

Druck in mm	700	1178	2010	4729	5072	6884
$10^7 . D_m$	435	428	430	428	434	435

Mittel: $D_m = 0{,}0000432$.

Addiren wir hierzu obige Zahl 0,0000005 und den Compressionscoëfficienten des Glases, so erhalten wir den des Wassers bei 25°.

$$\beta = 0{,}0000455.$$

In der folgenden Tabelle finden sich die im Vorigen enthaltenen Resultate und ausserdem noch einige von mir bei anderer Temperatur gefundene mit denen anderer Beobachter zusammengestellt.

Name d. Flüssigk.	Beobachter: Grassi		Amaury et Descamp		Cailletet		Amagat		Dreck[illegible]	
	t	β	t	β	t	β	t	β	t	β
Alkohol	7,3°	0,0000828	0°	0,0000835	9°	0,0000694	—	—	—	—
		853	—	—		719	—	—	—	—
	13,1°	0,0000904	—	—		—	14°	0,000101	20°	0,000
		991	15°	0,0000911	11°	0,0000745	99,4°	0,000202	25°	0,000
Schwefelkohlenst.			14°	0,0000635	8°	0,0000998	—	—	—	—
							15,6°	0,0000872	18°	0,000
									20°	0,000
							100°	0,000174	25°	0,000
Chloroform	8,5°	0,0000625	—	—	—	—	—	—	18,5°	0,000
							100°	0,000211	22°	0,000
								206	25°	0,000
Wasser	13,4°	0,0000477	—	—	8°	0,0000469	—	—	12,8°	0,000
							15°	0,0000457		
	25°	0,0000456	—	—	—	—	—	—	25°	0,000

Am besten stimmen die für Wasser angegebenen Werthe überein, während namentlich die für Chloroform und Schwefelkohlenstoff Abweichungen zeigen, welche 50 Proc. übersteigen. Nun sind es gerade diese Stoffe, bei welchen die Bestimmung des Compressionscoëfficienten am meisten durch die durch Compression hervorgerufene Temperaturerhöhung erschwert wird. Amaury und Descamp[1]), sowie Cailletet[2]) geben die Details der Beobachtungen nicht an.

Grassi macht zwar auf die bei der Compression stattfindende Temperaturerhöhung aufmerksam, sagt auch, dass der Ausgleich der Temperatur bei Alkohol, Chloroform und Aether mehr Zeit erfordere, als etwa bei Wasser; jedoch geht aus seinen Angaben hervor, dass beim Ablesen der Contraction dieser Ausgleich noch nicht stattgefunden haben konnte, indem er sagt, dass bei hohen und plötzlich ausgeführten Drucken dieser Ausgleich nur „mehrere Minuten" in Anspruch genommen habe. Amagat findet dagegen bei einem etwa zehnmal so kleinem Piëzometer, als das Grassi'sche, dass der Ausgleich der Temperatur bei den von ihm angewandten Druckdifferenzen von 30 Atmosphären $^1/_4$ Stunde in Anspruch nehme.

1) Amaury und Descamp, Compt. rend. 68. p. 1564. 1869.
2) Cailetet, Compt. rend. 75. p. 77. 1872.

Bei meinem Piëzometer, welches etwa fünfmal so gross als das Amagat'sche war, dauerte der Ausgleich bei Druckdifferenzen von vier bis sechs Atmosphären 20—30 Minuten. Aus der fehlerhaften Beobachtung Grassi's erklärt es sich auch, weshalb er bei höheren Drucken für Alkohol einen grösseren Compressionscoëfficienten fand, woraus er den Schluss zog, dass die Compressibilität mit steigendem Druck zunehme, dies ist jedoch auf das deutlichste sowohl durch die Versuche von Cailletet, als auch durch die von Amagat widerlegt worden. Da nun gerade die zahlreichsten Beobachtungen der Compressionscoëfficienten der Flüssigkeiten in der Arbeit von Grassi enthalten sind, so dürfte es bei der Wichtigkeit der Kenntniss derselben zur Lösung mancher Probleme der mechanischen Wärmetheorie wünschenswerth erscheinen, die Compressibilität einer grösseren Anzahl von Flüssigkeiten einer erneuerten Prüfung zu unterziehen, und ich beabsichtige, in dieser Hinsicht weitere Versuche anzustellen.

Die Resultate der Amagat'schen Beobachtungen stimmen, wenn man die Verschiedenheit der Temperatur, bei welcher sie angestellt wurden, in Rücksicht zieht, sehr gut mit den von mir gefundenen überein.

Die kleinen Werthe des Compressionscoëfficienten, welche Cailletet für Alkohol angibt, finden zum Theil ihre Erklärung in dem grossen Wassergehalte des von ihm benutzten Alkohols; er gibt das specifische Gewicht desselben auf 0,858 an, dem entspricht ein Alkohol mit etwa 20 Proc. Wasser.

Compressionscoëfficienten der Gemische.

Die Versuchsresultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt; ich bemerke dazu, dass die für D_m angegebenen Werthe der zweiten Columne Mittelwerthe aus je zehn Beobachtungen, diejenigen der dritten Columne Mittelwerthe aus je drei bis vier Beobachtungen sind. Die Zahlen der sechsten Columne geben die Compressionscoëfficienten der Gemische, wie sie sich unter der Annahme der Constanz der Compressibilität der Flüssigkeiten in der Mischung aus dem Procentgehalte berechnen. Es ist also:

$$\beta' = \frac{\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2}{v_1 + v_2},$$

wenn β_1 und β_2 die Compressionscoëfficienten, v_1 und v_2 die Volumentheile der zur Mischung verwandten Flüssigkeiten bedeuten.

Alle Angaben beziehen sich auf die Temperatur 25° Celsius.

Tabelle IX.

Compressionscoëfficienten der Wasser-Alkoholgemische.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Gewichtsprocente Alkohol	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beob.	$10^7 . D_t$ ber.	$10^7 . \beta$	$10^7 . \beta'$
0	432	—	437	455	—
12,37	392	—	402	420	555
23,91	376	397	393	411	645
34,61	404	—	430	448	728
50,29	483	529	527	545	840
62,95	568	627	632	650	920
79,72	686	788	789	807	1026
85,13	748	—	868	886	1056
100	945	1117	1120	1138	—

Tabelle X.

Compressionscoëfficienten der Schwefelkohlenstoff-Alkoholgemische.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Gewichtsprocente Alkohol	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beob.	$10^7 . D_t$ ber.	$10^7 . \beta$	$10^7 . \beta'$
0	625	950	957	975	—
18,54	728	980	1012	1030	1018
27,48	783	—	1048	1066	1036
40,32	826	1040	1075	1093	1059
51,76	858	1070	1095	1113	1078
64,15	896	1140	1120	1138	1095
74,89	920	—	1132	1150	1109
89,54	946	1090	1136	1154	1127
100	945	1117	1120	1138	—

Tabelle XI.

Compressionscoëfficienten der Chloroform-Alkoholgemische.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Gewichtsprocente Alkohol	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beobachtet	$10^7 . D_t$ berechnet	$10^7 . \beta$	$10^7 . \beta'$
0	705	1034	1049	1067	—
10,33	747	1024	1045	1063	1079
20,84	787	1030	1046	1064	1090
31,21	826	1058	1062	1080	1099
40,56	833	—	1058	1076	1106
50,52	824	1010	1036	1054	1113
64,28	840	1000	1038	1056	1121
79,30	889	1058	1073	1091	1129
100	945	1117	1120	1138	—

Tabelle XII.

Compressionscoëfficienten der Chloroform-Schwefelkohlenstoffgemische.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Gewichtsprocente Schwefelkohlenstoff.	$10^7 . D_m$	$10^7 . D_t$ beobachtet	$10^7 . D_t$ berechnet	$10^7 . \beta$	$10^7 . \beta'$
0	705	1034	1049	1067	—
12,46	700	1045	1049	1067	1053
25,25	679	1054	1035	1053	1041
33,35	682	1032	1034	1052	1032
45,93	661	1001	1011	1029	1021
58,38	658	981	1004	1022	1010
72,07	640	967	981	999	998
100	625	950	957	975	—

Die in den vorstehenden Tabellen mitgetheilten Werthe der Compressionscoëfficienten sind in den mit 4_a und 4_b bezeichneten Curven der Fig. 2 bis 5 graphisch dargestellt. Die Curven 4_a geben die wahren, 4_b die aus den Bestandtheilen der Mischung berechneten Compressionscoëfficienten. Der Maassstab ist für alle Curven derselbe, wie aus den am Rande beigefügten Anfangs- und Endwerthen hervorgeht, und zwar wurde der Abstand zweier Horizontalen gleich 0,00001

gesetzt. Wie man sieht, ist der beobachtete Compressionscoëfficient bei keiner Mischung gleich dem berechneten, vielmehr ist derselbe bei Wasser-Alkohol und Chloroform-Alkohol kleiner, bei Alkohol-Schwefelkohlenstoff und Chloroform-Schwefelkohlenstoff grösser als der berechnete; es findet also bei den untersuchten Gemischen die merkwürdige Beziehung statt, dass da, wo die Differenz $v_0 - v'_0$ positiv, auch $\beta - \beta'$ positiv ist und umgekehrt. Am grössten ist die Abweichung zwischen β und β' bei den Wasser-Alkoholgemischen. Diese waren auch schon von Duprê und Page in der bereits mehrfach citirten Abhandlung auf ihre Compressibilität untersucht worden, jedoch bei niedrigerer Temperatur, so dass die dortigen Angaben für meinen Zweck nicht zu gebrauchen waren. Auch war die Temperatur, bei welcher beobachtet wurde, nicht bei allen Mischungen dieselbe; sie lag zwischen 8° und 11,5°. Bei einer etwa 15°/₀ Alkohol enthaltenden Mischung ist der von genannten Physikern angegebene Compressionscoëfficient gleich dem von mir bei 25° gefundenen, bei den weniger Alkohol enthaltenden Mischungen ist er grösser, bei den übrigen kleiner. Da nun der Ausdehnungscoëfficient des Wassers mit steigender Temperatur ab, der des Alkohols mit steigender Temperatur zunimmt, so können die Resultate beider Beobachtungen sehr wohl in Uebereinstimmung sein.

Bei denjenigen Mischungen, bei welchen in den Tabellen eine Angabe der totalen Compression in Columne 3 fehlt, war die Beobachtung durch eingetretene Temperaturveränderungen gestört worden; ich glaubte, in diesen wenigen Fällen eine Wiederholung des Versuches unterlassen zu dürfen, da es durch die bereits gefundenen Resultate hinlänglich bewiesen war, dass eine in angegebener Weise angestellte Berechnung der totalen Compression aus der momentanen zum richtigen Resultate führt.

III. Specifische Wärme bei constantem Volumen.

Mit Hülfe der im Vorstehenden mitgetheilten Resultate meiner Beobachtungen lässt sich nun die specifische Wärme der untersuchten Flüssigkeiten bei constantem Volumen aus der bereits bekannten bei constantem Druck berechnen. Bezeichnet man erstere mit c_v, letztere mit c_p, so ist:

$$c_v = c_p + \frac{T}{E} \frac{\left(\frac{d v}{d t}\right)^2}{\frac{d v}{d p}}.$$ [1])

Da alle mitgetheilten Zahlen sich auf 25° beziehen, so ist $T = 298$, E setzten wir nach Joule gleich 424; ferner ist:

$$\frac{d v}{d t} = \alpha_{25} v_0 \quad \text{und} \quad \frac{d v}{d p} = -\beta v = -\beta v_0 (1 + 25 \alpha).$$

Da übrigens in obiger Formel dp nicht in Atmosphären, sondern in kg pro qm auszudrücken ist, so sind die für β angegebenen Werthe noch mit 10334 zu multipliciren, auch ist v_0 in cbm pro kg auszudrücken.

Es ergibt sich also:

$$c_v = c_p - \frac{298}{424} \cdot \frac{\alpha_{25}^2 v_0}{\beta (1 + 25 \alpha)} \cdot 10334.$$

Nach dieser Gleichung habe ich die specifischen Wärmen bei constantem Volumen aus den Schüller'schen Werthen für die specifischen Wärmen bei constantem Druck berechnet und in Columne 2 der folgenden Tabellen zusammengestellt. Columne 3 gibt die unter der Annahme berechneten specifischen Wärmen, dass sich durch die Mischung die specifische Wärme der Bestandtheile nicht ändere. Es ist also:

$$c' = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2}{p_1 + p_2}$$

sowohl für c'_p, als für c'_v, wenn c_1 und c_2 die specifischen Wärmen und p_1 und p_2 die Gewichtstheile der in der Mischung enthaltenen Bestandtheile bedeuten. Die vierte Columne gibt die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten specifischen Wärmen und die fünfte das Verhältnis c_p / c_v.

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie. 1. 2. Aufl. 1. p. 189.

Tabelle XIII.

Wasser-Alkohol.

1.	2.		3.		4.		5.
Gewichts-procente Alkohol	Specif. Wärme bei constantem Druck c_p (Schüller.)	Specif. Wärme bei constantem Volumen c_v	Specif. Wärmen, berechnet aus den sp. W. d. Bestandtheile c'_p	c'_v	Differenz zwisch. beobachteten u. berechneten spec. Wärmen $c_p - c'_p$	$c_v - c'_v$	$\frac{c_v}{c_p}$
0	1,001	0,990	—	—	—	—	1,0101
8,253	1,022	1,006	0,968	0,950	0,052	0,056	1,0139
16,666	1,043	1,014	0,935	0,910	0,108	0,104	1,0286
25,668	1,040	0,977	0,900	0,867	0,140	0,110	1,0644
34,523	1,013	0,921	0,865	0,825	0,148	0,096	1,1000
45,041	0,956	0,849	0,825	0,776	0,121	0,073	1,1260
54,473	0,879	0,769	0,787	0,732	0,092	0,037	1,1430
65,503	0,820	0,709	0,745	0,680	0,075	0,029	1,1565
76,339	0,760	0,649	0,703	0,628	0,057	0,021	1,1710
86,631	0,690	0,583	0,662	0,580	0,028	0,003	1,1835
100	0,613	0,518	—	—	—	—	1,1834

Tabelle XIV.

Schwefelkohlenstoff-Alkohol.

1.	2		3.		4.		5.
Gewichts-procente Schwefel-kohlen-stoff	Specif. Wärme bei constantem Druck c_p (Schüller.)	Specif. Wärme bei constantem Volumen c_v	Specif. Wärmen, berechnet aus den sp. W. d. Bestandtheile c'_p	c'_v	Differenz zwisch. beobachteten u. berechneten spec. Wärmen $c_p - c'_p$	$c_v - c'_v$	$\frac{c_v}{c_p}$
0	0,244	0,160	—	—	—	—	1,525
10,025	0,302	0,207	0,278	0,195	0,024	0,012	1,459
20,141	0,357	0,260	0,315	0,232	0,042	0,028	1,375
29,663	0,395	0,298	0,350	0,265	0,045	0,033	1,325
40,604	0,425	0,327	0,387	0,304	0,038	0,023	1,300
49,807	0,450	0,352	0,422	0,338	0,028	0,014	1,278
60,073	0,483	0,386	0,459	0,375	0,024	0,012	1,251
71,091	0,515	0,418	0,500	0,415	0,015	0,003	1,232
79,976	0,542	0,445	0,532	0,445	0,010	0,000	1,218
88,421	0,569	0,475	0,563	0,476	0,006	0,001	1,198
100	0,613	0,518	—	—	—	—	1,183

Tabelle XV.

Chloroform-Alkohol.

1.	2.		3.		4.		5.
Gewichtsprocente Alkohol	c_p (Schüller.)	c_v	c'_p	c'_v	$c_p - c'_p$	$c_v - c'_v$	$\frac{c_p}{c_v}$
0	0,234	0,159	—	—	—	—	1,472
10,349	0,297	0,213	0,273	0,193	0,024	0,020	1,394
19,939	0,347	0,261	0,308	0,228	0,039	0,033	1,330
30,037	0,397	0,310	0,346	0,264	0,051	0,046	1,281
40,074	0,432	0,339	0,384	0,300	0,048	0,039	1,275
49,971	0,463	0,370	0,421	0,335	0,042	0,035	1,251
59,958	0,495	0,401	0,460	0,372	0,035	0,029	1,234
70,000	0,529	0,435	0,496	0,408	0,033	0,027	1,216
79,968	0,557	0,464	0,535	0,445	0,022	0,019	1,200
90,030	0,582	0,488	0,571	0,482	0,011	0,006	1,193
100	0,607	0,513	—	—	—	—	1,183

Tabelle XVI.

Chloroform-Schwefelkohlenstoff.

1.	2.		3.		4.		3.
Gewichtsprocente Schwefelkohlenstoff	c_p (Schüller)	c_v	c'_p	c'_v	$c_p - c'_p$	$c_v - c'_v$	$\frac{c_p}{c_v}$
0	0,233	0,158	—	0,158	—	—	1,472
9,680	0,234	0,158	—	0,158	—	0	1,481
17,702	0,235	0,157	—	0,158	—	−0,001	1,497
27,688	0,236	0,157	—	0,158	—	−0,001	1,503
39,834	0,237	0,157	—	0,159	—	−0,002	1,510
46,379	0,238	0,157	—	0,159	—	−0,002	1,516
56,043	0,239	0,158	—	0,159	—	−0,001	1,513
66,400	0,240	0,158	—	0,159	—	−0,001	1,519
82,626	0,242	0,159	—	0,160	—	−0,001	1,522
100	0,244	0,160	—	—	—	—	1,525

Nach den vorstehenden Tabellen sind sowohl die Schüller'schen Werthe für die specifischen Wärmen bei constantem Druck, als auch die specifischen Wärmen bei constantem Volumen auf den Fig. 2 bis 5 graphisch dargestellt. Die Curven 5_a gelten für c_p, 5_b für c'_p, 6_a für c_v und 6_b für c'_v. Der Abstand zweier Horizontalen ist für diese Curven gleich 0,05 angenommen, Anfangs- und Endwerthe finden sich am Rande beigefügt.

Bei den Gemischen von Chloroform-Schwefelkohlenstoff fand Schüller die Differenz zwischen beobachteter und be-

rechneter specifischer Wärme bald positiv, bald negativ, jedoch stets so klein, dass dieselbe durch unvermeidliche Beobachtungsfehler erklärt werden kann. Ich habe daher die berechnete specifische Wärme als die wahre angenommen und in Tab. XVI die Columne für c'_p unausgefüllt gelassen. Die Differenzen zwischen den specifischen Wärmen bei constantem Volumen $c_v - c'_v$ sind zwar stets negativ, aber auch niemals grösser, als die von Schüller für $c_p - c'_p$ angegebenen Zahlen. Ich enthalte mich daher in Bezug auf diese Gemische jeder weiteren Folgerung.

Ganz anders verhält sich die Sache bei den Gemischen, welche Alkohol enthalten. Bei diesen ist die specifische Wärme sowohl bei constantem Druck als auch bei constantem Volumen grösser, als die unter Annahme der Constanz der specifischen Wärme der Bestandtheile berechnete. Es sind aber die Differenzen $c_v - c'_v$ stets kleiner als die Differenzen $c_p - c'_p$. Daraus folgt, dass die innere Arbeit, welche bei der Ausdehnung geleistet wird, in den Gemischen eine grössere ist als in den getrennten Bestandtheilen. Zwar ist dieselbe nicht soviel grösser, dass dadurch die Differenz zwischen beobachteter und berechneter specifischer Wärme vollständig erklärt würde, da ja alsdann $c_v - c'_v = 0$ sein müsste, vielmehr müssen wir, um den Clausius'schen Satz von der Constanz der wahren Wärmecapacität eines Körpers aufrecht zu erhalten, noch die Annahme machen, dass auch diejenige innere Arbeit, welche bei constantem Volumen bei der Temperaturerhöhung geleistet wird, bei den Gemischen eine grössere ist als bei den getrennten Bestandtheilen. Aber die durch die mitgetheilten Versuche constatirte Thatsache, dass der bestimmbare Theil der inneren Arbeit bei den Flüssigkeitsgemischen grösser ist, als bei den getrennten Bestandtheilen, ist immerhin schon als ein für die allgemeine Gültigkeit des Clausius'schen Satzes günstiges Resultat zu betrachten, sowie sie andererseits, jenen Satz als allgemein gültig vorausgesetzt, beweist, dass in den Flüssigkeiten auch bei constanten Volumen bei der Temperaturerhöhung noch innere Arbeit geleistet wird.

X. *Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper;* *von A. Ritter in Aachen.*

Siebenzehnte Abtheilung.

§ 69. Hypothesen über den gegenwärtigen Zustand des „Sirius“.

Als Maass der Geschwindigkeit, mit welcher der Zustand eines gasförmigen Weltkörpers sich ändert, kann die Grösse σ/r, oder das Verhältniss der jährlichen Abnahme des Halbmessers zu der augenblicklichen Grösse desselben betrachtet werden. Nach Gleichung (620) hat also die Geschwindigkeit der Zustandsänderung eines gasförmigen Weltkörpers von der Masse und dem Volumen der Sonne die Grösse:

$$(638) \qquad \frac{\sigma_0}{r_0} = \left(\frac{5k-6}{3k-4}\right)\frac{w_0}{AN_0 r_0}.$$

Indem man hierin den Index „Null“ fortlässt, welcher speciell auf die Sonne, und zwar auf den gegenwärtigen Zustand derselben sich beziehen sollte, erhält man für die Geschwindigkeit der Zustandsänderung irgend eines anderen gasförmigen Weltkörpers die Gleichung:

$$(639) \qquad \frac{\sigma}{r} = \left(\frac{5k-6}{3k-4}\right)\frac{w}{ANr}.$$

Das Verhältniss dieser beiden Geschwindigkeiten hat also die Grösse:

$$(640) \qquad \frac{\left(\frac{\sigma}{r}\right)}{\left(\frac{\sigma_0}{r_0}\right)} = \frac{w N_0 r_0}{w_0 N r}.$$

Bei gleichen mittleren Dichtigkeiten verhalten sich nach dem Newton'schen Gesetze die Gravitationskräfte an den Oberflächen der beiden Weltkörper wie die Halbmesser derselben, und die Massen verhalten sich wie die dritten Potenzen der Halbmesser. Unter Voraussetzung übereinstimmender Dichtigkeitszustände kann also:

$$(641) \qquad \frac{N}{N_0} = \frac{r}{r_0} = \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

gesetzt werden, und mit Benutzung dieser Gleichung erhält man für das obige Geschwindigkeitsverhältniss den Werth:

$$(642)\qquad \frac{\left(\frac{\sigma}{r}\right)}{\left(\frac{\sigma_0}{r_0}\right)} = \left(\frac{w}{w_0}\right)\left(\frac{S_0}{S}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Nach dem in § 66 gefundenen Satze verhalten sich die Oberflächentemperaturen zweier Fixsterne von gleichen Dichtigkeiten annähernd wie die Quadratwurzeln aus ihren Massen, und nach der in § 64 angewendeten Stefan'schen Hypothese verhalten sich die Ausstrahlungsintensitäten wie die vierten Potenzen der Oberflächentemperaturen. Mit Benutzung der dort gewählten Bezeichnungsweise erhält man hiernach die Gleichungen:

$$(643)\qquad \frac{q}{q_0} = \frac{S^2}{S_0^2}, \qquad \text{und:} \qquad (644)\qquad \frac{Q}{Q_0} = \frac{q r^2}{q_0 r_0^2} = \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{8}{3}}.$$

Bei gleichen Dichtigkeiten verhalten sich also die totalen Wärmeausstrahlungen annähernd wie die $^8/_3$-ten Potenzen der Massen.

Für das Verhältniss der pro Masseneinheit jährlich ausgestrahlten Wärmequantitäten ergibt sich hieraus der Werth:

$$(645)\qquad \frac{w}{w_0} = \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\frac{5}{3}},$$

und nach Substitution desselben erhält man für das obige Geschwindigkeitsverhältniss den Werth:

$$(646)\qquad \frac{\left(\frac{\sigma}{r}\right)}{\left(\frac{\sigma_0}{r_0}\right)} = \frac{S}{S_0}.$$

Bei gleichen Dichtigkeiten verhalten sich also die Geschwindigkeiten der Zustandsänderungen zweier Fixsterne annähernd wie die Massen derselben.

Bei den Anwendungen dieses Satzes ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Gültigkeit desselben speciell auf diejenige Entwickelungsperiode sich beschränkt, welche in § 65 als Gegenstand der Untersuchung gewählt wurde. Was die **Sonne** betrifft, so erstreckt sich diese Periode von dem gegenwärtigen Zustande derselben **rückwärts** bis zu demjenigen Zustande, bei welchem die Voraussetzung eines sehr

kleinen Werthes der Verhältnisszahl z/r, oder die Voraussetzung einer sehr geringen Grösse des Unterschiedes zwischen dem mittleren Halbmesser der ausstrahlenden Oberflächenschicht und dem Halbmesser der ganzen Kugel, aufhörte, genügend erfüllt zu sein. Da zu Anfang dieser Periode die Geschwindigkeit der Zustandsänderung ausserordentlich viel grösser war, als am Ende derselben, so durfte bei der Berechnung der Länge dieses Zeitraumes ohne Bedenken angenommen werden, dass derselbe rückwärts bis zu dem Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung (oder der Helligkeit) sich erstreckte.

Die gleiche Annahme darf annäherungsweise auch in Bezug auf einen Fixstern gemacht werden, dessen Masse grösser ist, als die Sonnenmasse. Zwar wird bei einem solchen Fixsterne die Verhältnisszahl z/r unter sonst gleichen Umständen stets kleiner sein, als bei der Sonne, und infolge dessen wird jene Entwickelungsperiode bei dem betreffenden Fixsterne verhältnissmässig weiter nach rückwärts sich erstrecken als bei der Sonne. Indessen zeigt die Gleichung (602), dass die Verhältnisszahl z/r mit zunehmender Massengrösse nur langsam abnehmen würde. So z. B. würde man für den „Sirius", dessen Masse 13,8-mal so gross ist als die Sonnenmasse[1]) — jenachdem man $k = 1{,}41$ oder $k = {}^5/_3$ setzt — Werthe erhalten, welche um ca. 22, resp. 30 Proc. kleiner sind, als die für die Sonne berechneten Werthe. Andererseits ist auch hier wieder der bereits oben erwähnte Umstand zu berücksichtigen, dass gerade zu Anfang der erwähnten Periode die Zustandsänderung mit ausserordentlich grosser Geschwindigkeit erfolgt, und dass aus diesem Grunde die Verlegung ihres Anfangspunktes eine verhältnissmässig geringe Aenderung ihrer ganzen Dauer bedingen würde. Wenn also die Masse des betreffenden Fixsternes nicht ausserordentlich viel grösser ist, als die Sonnenmasse, so wird man die oben gefundene Gleichung ohne Bedenken für die ganze Dauer des Ueberganges vom Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung bis zum Culminationspunkte

1) Sim. Newcomb, „Populäre Astronomie". Deutsch von Rud. Engelmann, p. 498.

der Oberflächentemperatur als gültig betrachten dürfen. Aus jener Gleichung ergibt sich hiernach der folgende Satz:

Die Dauer des Ueberganges eines Fixsternes vom Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung bis zum Culminationspunkte der Oberflächentemperatur ist der Masse desselben umgekehrt proportional.

Während die Sonne zu diesem Uebergange (nach § 65) einige Millionen Jahre gebrauchte, müsste also bei einem Fixsterne von der Masse des Sirius dieser Uebergang in wenigen hunderttausend Jahren sich vollziehen. Hiernach scheint die Frage eine nähere Erwägung zu verdienen: ob vielleicht mittelst der hier aufgestellten Theorie die anscheinend wohl verbürgte Thatsache[1]) des innerhalb historischer Zeiten erfolgten Farbenüberganges des Siriuslichtes vom „Roth" zum „Bläulichweiss" sich erklären liesse? Wenn man für die Grösse w_0 statt des von Pouillet angegebenen Werthes $w_0 = {}^4/_3$ den nach neueren Beobachtungen wahrscheinlich richtigeren Werth $w_0 = 2$ einsetzt, und wenn man ferner für das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen den Mittelwerth $k = 1{,}5$ annimmt, so führen die Gleichungen des § 65 zu dem Resultate: dass der Sonnenhalbmesser in 28150 Jahren von der Grösse $100 . r_0$ bis zu der Grösse $20 . r_0$ abnahm. Nach dem oben gefundenen Satze würde also bei dem Sirius die Dauer dieses Ueberganges nur: $28150/13{,}8 = 2040$ Jahre betragen.

Wenn die gegenwärtige Oberflächentemperatur der Sonne mit τ_0 bezeichnet wird, so ergibt sich ferner aus den Gleichungen des § 64, dass die Oberflächentemperatur der Sonne während jenes Ueberganges von der Grösse $0{,}215 . \tau_0$ bis zu der Grösse $0{,}368 . \tau_0$ zunahm. Da bei gleichen Dichtigkeitszuständen (nach § 66) die Oberflächentemperaturen annähernd wie die Quadratwurzeln aus den Massen sich verhalten, so würde man die obigen Werthe mit der Zahl $\sqrt{13{,}8} = 3{,}715$ zu multipliciren haben, um die correspondirenden Oberflächentemperaturen für den Sirius zu erhalten. Hieraus ergibt sich, dass die Oberflächentemperatur des Sirius

1) C. F. W. Peters, „Die Fixsterne". p. 8 u. 9.

während jenes Ueberganges von der Grösse $0{,}80 . r_0$ bis zu der Grösse $1{,}37 . r_0$ zunehmen musste. Wenn man also annimmt, dass der Halbmesser des Sirius gegenwärtig zwanzigmal so gross ist als derjenige Halbmesser, welchen derselbe bei dem gegenwärtigen Dichtigkeitszustande der Sonne besitzen würde, oder dass die gegenwärtige mittlere Dichtigkeit des Sirius den 8000-sten Theil von der gegenwärtigen mittleren Dichtigkeit der Sonne beträgt, so würde hieraus folgen, dass die Oberflächentemperatur des Sirius vor 2040 Jahren um 20 Proc. kleiner war und gegenwärtig um 37 Proc. grösser ist als die jetzige Oberflächentemperatur der Sonne. Da das Licht der letzteren gegenwärtig gelblichweiss erscheint, so ist es recht wohl denkbar, dass einer um 20 Proc. niedrigeren Temperatur eine röthliche, und einer um 37 Proc. höheren Temperatur eine bläuliche Färbung desselben entsprechen würde.

Einer Erklärung des oben erwähnten Farbenwechsels würden daher keine erheblichen Schwierigkeiten entgegenstehen, wenn man annehmen dürfte, dass der Sirius gegenwärtig einen Durchmesser von etwa neun Millionen Meilen besitzt. Da die Entfernung des Sirius etwa zwanzig Billionen Meilen beträgt, so würde dieser Annahme ein scheinbarer Durchmesser von etwa neun Hundertstel (0,09) Bogensecunden entsprechen. Zugleich würde aus den obigen Hypothesen zu folgern sein, dass die Helligkeit des Sirius erst seit wenigen Jahrtausenden im Abnehmen begriffen ist, dass dagegen die Oberflächentemperatur desselben noch im Zunehmen begriffen ist, insofern die letztere gegenwärtig erst einen Werth erreicht hat, welcher etwa 36,8 Proc. ihres Maximalwerthes beträgt. Hiernach ist zu erwarten, dass die Intensität der bläulichen Färbung des Siriuslichtes in Zukunft noch beträchtlich zunehmen wird.

Für das Verhältniss der Wärmequantitäten, welche gegenwärtig von dem Sirius und von der Sonne ausgestrahlt werden, erhält man nach den Gleichungen (644) und (609) den Werth:

$$(647) \qquad \frac{Q}{Q_0} = 13{,}8^{\frac{8}{3}} . 20^{\frac{2}{3}} = 8073.$$

Dieses letztere Resultat scheint allerdings im Widerspruche zu stehen mit den Resultaten directer photometrischer Beobachtungen, nach welchen das Verhältniss der Lichtstärke des Sirius zur Lichtstärke der Sonne zwischen den Grenzwerthen 50 und 1360 liegen würde.[1] Da jedoch die Massengrösse und die Entfernung des Sirius bis jetzt nur erst annäherungsweise bekannt sind, und da überdies die hier gefundenen Zahlenwerthe zum Theil aus empirischen Formeln und willkürlichen Voraussetzungen abgeleitet wurden, so scheint trotz jenes Widerspruches noch Raum zu bleiben für die Hoffnung, dass die hier aufgestellte Theorie in ihren Grundgedanken als richtig sich bewähren wird.

§ 70. Ableitung eines unteren Grenzwerthes für die Abkühlungsdauer eines Fixsternes.

Der Culminationspunkt der Oberflächentemperatur bildet den Anfangspunkt der Abkühlungsperiode, und die Dauer dieser Periode wird jedenfalls um so grösser sein, je grösser die Masse des Fixsternes ist.

Die jährlich ausgestrahlten Wärmequantitäten verhalten sich unter sonst gleichen Umständen wie die ausstrahlenden Oberflächen, also wie die Quadrate der Halbmesser, und da bei gleichen Dichtigkeiten die Massen wie die dritten Potenzen der Halbmesser sich verhalten, so darf man annehmen, dass unter sonst gleichen Umständen die pro Masseneinheit jährlich ausgestrahlten Wärmequantitäten sich verhalten würden wie die reciproken Werthe der Halbmesser, oder wie die reciproken Werthe der Cubikwurzeln aus den Massengrössen. Die Abkühlungsdauer eines Fixsternes, dessen Masse achtmal so gross ist als die Sonnenmasse, würde also unter sonst gleichen Umständen doppelt so gross sein, als die Abkühlungsdauer der Sonne. Da jedoch (nach § 66) ein Fixstern eine um so höhere Oberflächentemperatur erreicht, je grösser die Masse desselben ist, so wird die wirkliche Abkühlungsdauer jenes Fixsternes jedenfalls mehr als das Doppelte betragen.

Die Abkühlungsdauer der Sonne würde man berechnen

1) C. F. W. Peters, „Die Fixsterne". p. 31 u. 32.

können, wenn es möglich wäre, die folgenden beiden Fragen zu beantworten: erstens, wie viele Wärmeeinheiten wird die Sonne in Zukunft noch ausstrahlen? zweitens, nach welchem Gesetze wird diese Wärmeausstrahlung auf die ganze Dauer der Abkühlung sich vertheilen?

Um die Wärmequantität zu berechnen, welche die Sonne in Zukunft noch ausstrahlen wird, hat man von der Wärmequantität, welche während der ganzen Existenzdauer der Sonne durch die Gravitationsarbeit überhaupt erzeugt wird, diejenige Wärmequantität zu subtrahiren, welche bis zum gegenwärtigen Zeitpunkte von der Sonne ausgestrahlt wurde. Die erstere ist gleich dem Wärmeäquivalente des Potentialwerthes $\mathfrak{A}_1$, welcher dem Endzustande der Sonne entspricht, und hat die Grösse:

(648) $$W_1 = A\,\mathfrak{A}_1.$$

Die bisher ausgestrahlte Wärmequantität ist gleich dem Wärmeäquivalente des gegenwärtigen Potentialwerthes $\mathfrak{A}_0$ vermindert um die Grösse des gegenwärtig in der Sonne enthaltenen Wärmevorrathes, und hat die Grösse:

(649) $$W_0 = A\,(\mathfrak{A}_0 - U_0).$$

Für die Grösse W_0 erhält man einen oberen Grenzwerth, indem man die Sonne als eine Kugel von constanter Dichtigkeit betrachtet und zugleich annimmt, dass die in derselben enthaltene Wärmequantität gleich Null ist. Zwar würde aus der Annahme einer von der Oberfläche nach dem Mittelpunkte zunehmenden Dichtigkeit für das gegenwärtige Potential $\mathfrak{A}_0$ ein grösserer Werth sich ergeben; doch wird (nach Gleichung 611 und Gleichung 613) dieser Unterschied mehr als ausgeglichen durch den aus dieser Annahme hervorgehenden Zuwachs des für die Grösse U_0 in Rechnung zu bringenden Werthes, welcher alsdann von dem Potentialwerthe $\mathfrak{A}_0$ zu subtrahiren sein würde. Einen oberen Grenzwerth für die Grösse W_0 kann man daher berechnen aus der Gleichung:

(650) $$\frac{W_0}{S} = \tfrac{3}{5}\,A\,N_0\,r_0 = 26{,}7 \text{ Millionen Wärmeeinheiten.}$$

In Bezug auf den Zustand, welchen die Sonne am Ende der Abkühlungsdauer erreichen wird, darf man als wahr-

scheinlich annehmen, dass die Contraction mindestens noch so weit fortschreiten wird, bis die Dichtigkeit der Sonne so gross geworden ist, wie die gegenwärtige Mittelpunktsdichtigkeit der Erde, und da diese letztere Dichtigkeit ungefähr achtmal so gross ist als die gegenwärtige mittlere Dichtigkeit der Sonne, so darf man annehmen, dass der Sonnenhalbmesser mindestens noch bis auf die Häfte der gegenwärtigen Grösse, also bis auf die Grösse $r_1 = \frac{1}{2} r_0$ abnehmen wird. Aus der Voraussetzung, dass die Sonne in ihrem Endzustande ebenfalls eine Kugel von constanter Dichtigkeit sein wird, ergibt sich alsdann für die Grösse W_1 die Gleichung:

$$(651)\quad \frac{W_1}{S} = \frac{3}{5} A N_1 r_1 = \frac{6}{5} A N_0 r_0 = 53{,}4 \text{ Mill. Wärmeeinheiten,}$$

und für die Differenz der obigen beiden Wärmequantitäten erhält man den Werth:

$$(652)\quad \frac{W_1}{S} - \frac{W_0}{S} = 26{,}7 \text{ Mill. Wärmeeinheiten.}$$

Man darf also annehmen, dass die Sonne pro Massenkilogramm mindestens noch 26,7 Millionen Wärmeeinheiten ausstrahlen wird, und da die Sonne gegenwärtig etwa zwei Wärmeeinheiten pro Massenkilogramm jährlich ausstrahlt, so folgt hieraus: dass die Abkühlungsdauer mindestens 13,35 Millionen Jahre betragen würde, wenn die jährlich ausgestrahlte Wärmequantität während der ganzen Abkühlungsdauer stets so gross bliebe wie im gegenwärtigen Zeitpunkte. Der obige Werth ist daher als das absolute Minimum des unteren Grenzwerthes der Abkühlungsdauer zu betrachten. Die wirkliche Abkühlungsdauer muss beträchtlich grösser sein, weil während der Abkühlung einerseits die ausstrahlende Oberfläche bis auf den vierten Theil ihrer ursprünglichen Grösse abnimmt, und andererseits die Oberflächentemperatur allmählich bis auf die Grösse Null abnimmt.

Unter Voraussetzung eines gleichförmigen Abnehmens der ausstrahlenden Oberfläche würde man zunächst zu dem Resultate gelangen, dass die Abkühlungsdauer das $\frac{8}{5}$-fache des obigen Werthes, also mindestens etwa 21 Millionen Jahre betragen würde, wenn die Intensität der Ausstrahlung wäh-

rend der Abkühlung constant bliebe. Unter Voraussetzung eines gleichförmigen Abnehmens der Oberflächentemperatur würde man ferner (mit Benutzung der bereits in § 64 angewendeten Stefan'schen Hypothese, nach welcher die Ausstrahlungsintensitäten sich verhalten wie die vierten Potenzen der Oberflächentemperaturen) zu dem Resultate gelangen, dass die Abkühlungsdauer etwa 76 Millionen Jahre betragen müsste. Da es keinem Zweifel unterliegt, dass die Sonne weit über den Zeitpunkt hinaus, in welchem ihre Oberflächentemperatur bis auf die Hälfte der gegenwärtigen Grösse derselben abgenommen haben wird, noch intensiv leuchtende Wärmestrahlen aussenden wird, so ergibt sich aus den obigen Hypothesen, dass die Sonne mindestens noch 38 Millionen Jahre hindurch (und höchstwahrscheinlich beträchtlich länger) fortfahren wird, leuchtende Wärmestrahlen auszusenden.

Man darf daher als in hohem Grade wahrscheinlich annehmen, dass ein Fixstern, dessen Masse beträchtlich grösser ist als die Sonnenmasse, nach dem Erreichen des Maximums seiner Oberflächentemperatur noch gegen hundert Millionen Jahre hindurch fortfahren kann, zu leuchten. Da nach § 66 überhaupt nur Fixsterne von grossen Massen diejenige Oberflächentemperatur erreichen, welche der bläulichweissen Lichtfarbe entspricht, so ergibt sich hieraus nach dem vorigen Paragraphen der folgende Satz:

Die Dauer des Ueberganges vom röthlichen zum bläulichen Lichte ist verschwindend klein im Verhältniss zur Dauer des nachherigen Rückganges vom bläulichen zum röthlichen Lichte.

Während die Dauer des ersteren Ueberganges höchstens einige hunderttausend Jahre beträgt, darf die Dauer des letzteren vielleicht auf Hunderte von Millionen Jahren geschätzt werden.

§ 71. Hypothesen über die Farben der Doppelsterne.

In den vorigen beiden Paragraphen wurde gezeigt, dass die Geschwindigkeit der Zustandsänderung eines Fixsternes während des Wachsens der Oberflächentemperatur um so

grösser, während des Abnehmens derselben dagegen um so kleiner ist, je grösser die Masse des Fixsternes ist, und dass die Geschwindigkeit des Wachsens stets sehr gross ist im Verhältniss zur Geschwindigkeit des nachher folgenden Abnehmens der Oberflächentemperatur.

Wenn also von zwei gleichalterigen Fixsternen A und B der erstere eine verhältnissmässig grosse, der letztere dagegen eine verhältnissmässig kleine Masse besitzt, so wird der Stern A anfangs in seiner Entwickelung dem anderen voraneilen und den Culminationspunkt seiner Oberflächentemperatur früher als jener erreichen, später aber den gewonnenen Vorsprung wieder verlieren. Während der sehr langen Abkühlungsperiode wird der Stern A in seiner Zustandsänderung von dem anderen Sterne wieder überholt werden, und der Stern B wird seinen Endzustand früher als der Stern A erreichen. Da der Stern A (nach § 66) eine höhere Oberflächentemperatur erreicht und diese höhere Temperatur nicht nur früher annimmt, sondern auch länger behält, so wird zu allen Zeiten der Stern A eine höhere Oberflächentemperatur als der Stern B besitzen.

Ein Fixstern, dessen Masse so gross ist, dass derselbe zur Zeit des Culminationspunktes seiner Oberflächentemperatur ein bläuliches Licht aussendet, wird die Entwickelungsphase des gelblichen oder röthlichen Lichtes zweimal durchlaufen, das erste mal vor und das zweite mal nach dem Erreichen jenes Culminationspunktes. Wenn also ein solcher Stern zur Zeit ein gelbliches oder röthliches Licht aussendet, so würde ein Zweifel darüber entstehen können, ob der Stern in der ersten oder in der zweiten von jenen beiden Entwickelungsphasen sich befindet, d. h. ob derselbe den Culminationspunkt seiner Oberflächentemperatur noch nicht erreicht oder bereits überschritten hat. Da nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Satze jene beiden Entwickelungsphasen durch eine Zwischenzeit von ausserordentlich langer Dauer getrennt sind, so würde dieser Zweifel beseitigt werden können, wenn das Alter des Sternes auch nur annähernd bekannt wäre oder aus der Beschaffenheit eines anderen gleichalterigen Sternes erschlossen werden könnte.

Wenn in Bezug auf zwei bestimmte Sterne *A* und *B*, von denen der erstere bläuliches, der letztere gelbliches oder röthliches Licht aussendet, vorausgesetzt werden dürfte, dass dieselben ungefähr in gleichen Abständen von der Erde und ungefähr in gleichem Alter sich befinden — was z. B. dann zulässig sein würde, wenn dieselben einen Doppelstern bilden —, so würde man hieraus schliessen dürfen, dass der Stern *A* die grössere, und der Stern *B* die kleinere Masse besitzt.

Denn aus dem bläulichen Lichte des Sternes *A* würde nach § 66 zu schliessen sein, dass die Masse desselben grösser ist als die Sonnenmasse. Wenn aber die Masse des Sternes *B* noch grösser wäre als die des Sternes *A*, so müsste der Stern *B* jedenfalls zur Kategorie derjenigen Sterne gehören, auf welche der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundene Satz Anwendung findet. Der Stern *B* müsste in diesem Falle die dem bläulichen Lichte entsprechende Entwickelungsphase allerdings früher als der Stern *A* erreicht haben, aber da der Rückgang vom bläulichen zum gelbröthlichen Lichte ausserordentlich lange dauert, so ist entweder anzunehmen, dass derselbe während dieses Rückganges den vorher gewonnenen Vorsprung längst wieder verloren haben musste, oder wenn dies auch nicht geschehen sein sollte, so würde doch (nach § 69) anzunehmen sein, dass jener Vorsprung verschwindend klein war im Verhältniss zu derjenigen Grösse, welche diese Zeitdifferenz haben müsste, um während der ausserordentlich langsam fortschreitenden Abkühlung eine merkliche Farbendifferenz zu bedingen. In beiden Fällen aber würde der Stern *A* ebenfalls gelbröthlich erscheinen müssen, was der Voraussetzung widerspricht.

Wenn hiernach als in hohem Grade wahrscheinlich anzunehmen ist, dass die Masse des Sternes *B* die kleinere von den beiden Massen ist, so würde noch die fernere Frage in Betracht kommen: ob der Stern *B* in seiner Entwickelung den Stern *A* bereits überholt oder noch nicht erreicht hat? Diese Frage würde sofort im letzteren Sinne entschieden werden können, wenn zugleich der Stern *B* der hellere von

den beiden Sternen wäre. Denn die kleinere Masse des Sternes *B* würde unmöglich heller leuchten können, wenn dieselbe von dem Culminationspunkte ihrer Helligkeit bereits weiter sich entfernt hätte als die grössere Masse des anderen Sternes. Der Stern *B* befindet sich also höchst wahrscheinlich noch in der Periode des Wachsens der Oberflächentemperatur, und die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme wird um so grösser, je grösser der Helligkeitsunterschied ist. Da als Hauptstern derjenige bezeichnet zu werden pflegt, welcher die grössere Helligkeit besitzt, so ergibt sich hieraus in Bezug auf die ungleichfarbigen Doppelsterne der folgende Satz:

Wenn der Hauptstern gelblich und der Begleitstern bläulich erscheint, so ist der Hauptstern derjenige, welcher die geringere Massengrösse besitzt.

Nach der hier aufgestellten Theorie würde überhaupt die Masse des Hauptsternes immer dann als die kleinere von den beiden Massen anzusehen sein, wenn die Lichtfarbe desselben dem rothen Ende des Spectrums näher liegt als die des Begleiters, also z. B. auch dann, wenn das Licht des Hauptsternes röthlich und das des Begleitsternes gelblich gefärbt erscheint, oder wenn z. B. das Licht des Hauptsternes grünlich und das des Begleitsternes bläulich erscheint.

In dem umgekehrten Falle dagegen würde unter allen Umständen die Masse des Hauptsternes als die grössere zu betrachten sein. Wenn z. B. das Licht des Hauptsternes bläulich, und das des Begleiters gelblich gefärbt erscheint, so ist anzunehmen, dass der erstere infolge seiner grösseren Masse denjenigen Zustand, welcher dem Maximum der Oberflächentemperatur entspricht, früher erreicht und zugleich länger in demselben verweilt als der andere. In diesem Falle ist es ebensowohl denkbar, dass der Begleitstern infolge seiner geringeren Masse das Maximum seiner Oberflächentemperatur zur Zeit noch nicht erreicht hat, als auch dass derselbe schon längst in die Abkühlungsperiode eingetreten ist, und in seiner Zustandsänderung den langsamer sich abkühlenden Hauptstern bereits überholt hat.

Von zwei gleichalterigen Sternen hat immer derjenige, dessen Lichtfarbe dem rothen Ende des Spectrums näher liegt, die kleinere Masse.

Da unter den bisher beobachteten Fällen von ungleichfarbigen Doppelsternen die Zahl derjenigen Fälle überwiegt, in welchen die Lichtfarbe des Hauptsternes dem rothen Ende des Spectrums näher liegt als die des Begleiters, so würde aus den Resultaten der obigen Untersuchung zugleich geschlossen werden dürfen, dass die meisten ungleichfarbigen Doppelsterne noch in der Periode des Jugendalters sich befinden, insofern nach der hier aufgestellten Theorie als in hohem Grade wahrscheinlich anzunehmen sein würde, dass in allen jenen Fällen der Hauptstern das Maximum seiner Oberflächentemperatur noch nicht erreicht hat.

Berichtigung. Im vorletzten Absatze des § 49 ist die Gleichung (499) nebst den dieselbe betreffenden Zeilen des Textes zu streichen, und an die Stelle derselben ist das Folgende zu setzen:

— „Wenn z. B. dem centralen kugelförmigen Massenelemente soviel Wärme entzogen wird, dass der Radius desselben bis auf die Hälfte abnimmt, so wird zwar das Gewicht eines an der Oberfläche desselben befindlichen Massentheilchens hierbei bis auf das Vierfache wachsen; aber das Gewicht der ganzen über einer Flächeneinheit stehenden radialen Säule wird hierbei nur eine unendlich kleine Aenderung erleiden. Die Zustandsänderung des centralen Massenelementes entspricht also der Gleichung:

$$(499) \qquad p = \text{Const.}, \text{ oder: } \frac{T}{v} = \text{Const.},$$

aus welcher sich ergibt, dass die absolute Temperatur bis auf den achten Theil abnimmt, wenn der Radius bis auf die Hälfte abnimmt."

XI. *Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper;* *von A. Ritter in Aachen.*

Achtzehnte Abtheilung.

§ 72. Zustandsänderung eines gasförmigen Weltkörpers von sehr kleiner Masse.

Für die Untersuchungen der letzteren Paragraphen war die Zustandsänderung der Sonne als Ausgangspunkt gewählt worden, und die Resultate derselben dürfen zunächst nur auf solche Weltkörper angewendet werden, deren Massen eine der Sonnenmasse vergleichbare Grösse besitzen. Das in § 69 gefundene Gesetz, nach welchem die Dauer des Ueberganges vom Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung zu dem der Oberflächentemperatur um so grösser ist, je kleiner die Masse des Weltkörpers ist, wurde aus der Voraussetzung abgeleitet, dass während dieses Ueberganges die ganze Masse des Weltkörpers stets im rein gasförmigen Aggregatzustande sich befindet. Diese Voraussetzung darf um so mehr als erfüllt betrachtet werden, je grösser die Masse des Weltkörpers angenommen wird. Die Zustandsänderung eines Weltkörpers, dessen Masse sehr viel kleiner ist als die Sonnenmasse, wird dagegen nach Gesetzen erfolgen, welche von den oben gefundenen wesentlich verschieden sind, insofern die Art der Zustandsänderung eines gasförmigen Weltkörpers von bestimmter Dichtigkeit durch die in demselben auftretenden Condensationsprocesse in um so höherem Grade beeinflusst werden muss, je kleiner die Masse des Weltkörpers ist.

Von der Richtigkeit dieser letzteren Behauptung kann man sich überzeugen, indem man die adiabatische Zustandslinie eines Weltkörpers von sehr grosser Masse mit der adiabatischen Zustandslinie eines Weltkörpers von sehr kleiner Masse vergleicht, und zwar zunächst unter Voraussetzung einer unbeschränkten Gültigkeit des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes. Da es sich bei einer solchen Vergleichung nicht um absolute Zahlenwerthe, sondern nur um Verhältnisszahlen handelt, so ist es hierbei gleichgültig, welche Werthe für die specifische Wärme des Gases und

für das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen angenommen werden.

Wenn man beispielsweise $c_p = 1$ und $k = {}^5/_3$ setzt, so ergibt sich in Bezug auf einen gasförmigen Weltkörper von der Grösse und Masse der Sonne aus den Untersuchungen des § 36 für die Mittelpunktstemperatur der Werth $T = 60{,}1$ Millionen Grad und für die Mittelpunktsdichtigkeit der Werth $\gamma_0 = 8568$ Kil. Nach den Gleichungen (599) und (600) würde würde man ferner für die Tiefe $z = 0{,}01 . r$ unter der Oberfläche die Temperatur $T = 445\,200$ Grad und die Dichtigkeit $\gamma = 5{,}462$ Kil. erhalten. Auf ähnliche Weise würden für einen Weltkörper von grösserer oder kleinerer Masse die Werthe der obigen Grössen berechnet werden können. Wenn mit S die Sonnenmasse und mit M die Masse eines anderen Weltkörpers von derselben mittleren Dichtigkeit bezeichnet wird, so erhält man mit Benutzung der oben gewählten Bezeichnungsweise die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

$\frac{M}{S}$ =	1000	1	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$
T_0 =	6010 000 000	60 100 000	601 000	6010
γ_0 =	8568	8568	8568	8568
T =	44 520 000	445 200	4452	44,52
γ =	5,462	5,462	5,462	5,462

In dieser Tabelle sind für je zwei Punkte der Zustandslinien eines jeden von den vier Weltkörpern die Coordinaten angegeben: der eine Punkt entspricht dem Zustande im Mittelpunkte, der andere dem Zustande in der Tiefe $z = 0{,}01 . r$ unter der Oberfläche. Die Coordinaten der übrigen Punkte würden auf dieselbe Weise berechnet werden können.

Wenn das Gas, aus welchem die vier Weltkörper bestehen, die Eigenschaft der Condensirbarkeit besässe, so würden die auf solche Weise berechneten Coordinatenwerthe für denjenigen Theil der Zustandslinie, welcher in das Condensationsgebiet der Temperaturfläche hineinfällt, nicht mehr als gültig betrachtet werden dürfen. Die obige Tabelle zeigt jedoch, dass die Möglichkeit eines Condensationsprocesses unter den hier vorausgesetzten Umständen nur bei einem

Weltkörper von sehr kleiner Masse in Frage kommen kann. Man darf mit Sicherheit annehmen, dass in einem Gase, welches im übrigen hinsichtlich seiner Eigenschaften mit dem Stoffe der Sonnenmasse übereinstimmt, bei der Temperatur $T = 44{,}52$ Millionen Grad und bei der Dichtigkeit $\gamma = 5{,}462$ kg noch keine Condensation eintreten wird; und mit ebenso grosser Sicherheit darf man annehmen, dass in einem solchen Gase eine Condensation eintreten würde, wenn bei unverändert bleibender Dichtigkeit $\gamma = 5{,}462$ kg die absolute Temperatur bis auf die Grösse $T = 44{,}52$ Grad abnähme.

Wenn man sich bei jedem von den vier Weltkörpern den Halbmesser bis auf das Zehnfache oder das Volumen bis auf das Tausendfache vergrössert denkt, so würden aus der Voraussetzung des rein gasförmigen Aggregatzustandes die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe sich ergeben:

$\frac{M}{S} =$	1000	1	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$
$T_0 =$	601 000 000	6 010 000	60 100	601
$\gamma_0 =$	8,568	8,568	8,568	8,568
$T =$	4 452 009	44 520	445,2	4,452
$\gamma =$	0,005 462	0,005 462	0,005 462	0,005 462

Diese Tabelle zeigt, dass bei einem Weltkörper von der Masse $M = 1000 \,.\, S$, und höchst wahrscheinlich auch noch bei einem Weltkörper von der Masse $M = S$, die Zustandslinie der ganzen Masse — mit Ausnahme einer Oberflächenschicht von verschwindend geringer Stärke — immer noch ausserhalb des Condensationsgebietes liegen würde, während bei einem Weltkörper von der Masse $M = S/1\,000\,000$ die Zustandslinie ohne Zweifel ganz in das Condensationsgebiet hineinfallen, und infolge dessen die wirkliche Zustandslinie eine von der obigen abweichende Form annehmen würde. Man überzeugt sich auf diese Weise von der Richtigkeit der folgenden beide Sätze:

Bei gegebener **Mittelpunktsdichtigkeit** des Weltkörpers fällt ein um so grösserer Theil der Zustandslinie in das Condensationsgebiet hinein, je kleiner die **Masse** derselben ist.

Bei gegebener **Masse** des Weltkörpers fällt ein um so grösserer Theil der Zustandslinie in das Condensationsgebiet hinein, je grösser das **Volumen** desselben ist.

Wenn aber die Zustandslinie ganz in das Condensationsgebiet hineinfällt, d. h. wenn das Auftreten von Condensationsprocessen bis zum Mittelpunkte des Weltkörpers sich erstreckt, so wird nicht nur die Zustandslinie desselben eine andere Form annehmen, sondern auch die Zustandsänderung desselben nach Gesetzen erfolgen müssen, welche von den oben aus der Voraussetzung des rein gasförmigen Aggregatzustandes abgeleiteten Gesetzen wesentlich verschieden sind.

In § 27 wurde an dem Beispiele des Wasserdampfes gezeigt, dass die Eigenschaft der Condensirbarkeit eines Gases denselben Einfluss hat, welchen bei einem idealen Gase eine beträchtliche Verkleinerung des Werthes von k, verbunden mit einer beträchtlichen Vergrösserung des Werthes von c_p haben würde. In § 33 wurde ferner gezeigt, dass der adiabatische Gleichgewichtszustand nur dann als ein stabiler Gleichgewichtszustand gelten kann, wenn k grösser als $^4/_3$ ist, und dass überhaupt kein adiabatischer Gleichgewichtszustand mehr möglich ist, wenn k kleiner als $^6/_5$ ist. Da es kaum einem Zweifel unterliegen kann, dass nicht nur bei dem Wasserdampfe, sondern auch bei anderen condensirbaren Gasen die Grösse k innerhalb des Condensationsgebietes einen Werth annimmt, welcher beträchtlich kleiner als $^4/_3$ ist, so ergibt sich hieraus der folgende Satz:

Wenn die ganze Zustandslinie in das Condensationsgebiet hineinfällt, so ist der adiabatische Gleichgewichtszustand, soweit ein solcher überhaupt möglich ist, stets ein labiler Gleichgewichtszustand.

In diesem Falle wird der Weltkörper aus dem labilen in den nächstliegenden stabilen Gleichgewichtszustand übergehen und nach Schwingungen von abnehmender Amplitude in demselben zur Ruhe gelangen. Die Contraction wird anfangs mit Beschleunigung stattfinden. Hierbei wird ein

Theil der Gravitationsarbeit unmittelbar in Wärme, der andere Theil aber zunächst in lebendige Kraft und erst später in Wärme umgewandelt. Infolge der fortgesetzten Wärmeerzeugung wird später ein allmählich wachsender rein gasförmiger Kern sich bilden, und die Zustandslinie immer mehr derjenigen Form sich nähern, welche dem stabilen Gleichgewichtszustande des rein gasförmigen Weltkörpers entspricht.

Eine solche Zustandsänderung kann eine „dynamische“ Contraction genannt werden, im Gegensatze zu der früher stets vorausgesetzten „statischen“ Contraction, bei welcher die Bedingungen des Gleichgewichtes auch für jeden Zwischenzustand stets als erfüllt betrachtet werden durften. Während die Voraussetzung einer sehr grossen Masse des Weltkörpers in § 69 zu dem Resultate führte, dass die Contraction um so langsamer stattfindet, je kleiner die Masse ist, wird also in dem hier vorausgesetzten Falle das gerade Gegentheil stattfinden, insofern die Contraction einer sehr kleinen Masse während jenes Ueberganges aus dem labilen in den stabilen Gleichgewichtszustand nahezu plötzlich stattfinden, oder wenigstens in verhältnissmässig sehr kurzer Zeit sich vollziehen muss.

Nach Beendigung der dynamischen Contraction wird zwar die weitere Zustandsänderung der kleinen Masse im allgemeinen ebenfalls den Gesetzen der statischen Contraction gemäss erfolgen; doch wird hinsichtlich der Art dieser Zustandsänderung zwischen dem kleinen Weltkörper und einem grossen Weltkörper von derselben mittleren Dichtigkeit immer noch ein Unterschied stattfinden, weil bei dem kleinen Weltkörper das Condensationsgebiet bis zu einer verhältnissmässig grösseren Tiefe hinab sich erstreckt, und die ausstrahlende Oberflächenschicht stets eine verhältnissmässig grössere Quantität von Condensationsproducten enthalten wird. Durch die abkühlende Wirkung der beständig nach dem Mittelpunkte hinabsinkenden Condensationsproducte wird in dem centralen Theile des Weltkörpers eine Annäherung an die isothermische Zustandslinie, und hierdurch zugleich (nach § 54) eine Vergrösserung der Mittelpunktsdichtigkeit hervorgebracht. Infolge dessen wird die Mittel-

punktsdichtigkeit des kleinen Weltkörpers schon verhältnissmässig früh diejenige Grenze erreichen, bei welcher das fernere Wachsen derselben, und damit zugleich (nach § 35, Fig. 16) die Wärme erzeugende Wirkung der Gravitationsarbeit nahezu ganz aufhört.

§ 73. Isentropische Gaskugeln von ungleichen Massen und gleichen Entropiewerthen.

Der adiabatische oder isentropische Gleichgewichtszustand eines vollkommen gasförmigen Weltkörpers entspricht der Bedingungsgleichung:

$$\frac{T}{\gamma^{k-1}} = E = \frac{T_0}{\gamma_0^{k-1}}, \tag{653}$$

in welcher E die Constante der isentropischen Zustandslinie bedeutet. Diese Constante kann aus dem gegebenen Zustande im Mittelpunkte für den im vorigen Paragraphen angenommenen Fall berechnet werden nach der Gleichung:

$$E = \frac{T_0}{\gamma_0^{\frac{2}{3}}}. \tag{654}$$

Indem man diese Gleichung auf die im vorigen Paragraphen miteinander verglichenen vier Weltkörper anwendet, erhält man zunächst für den Zustand, auf welchen die erste von den beiden Tabellen desselben sich bezieht. die Werthe:

$\frac{M}{S} =$	1000	1	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$
$E =$	14 353 000	143 530	1435,3	14,353

Diese Tabelle zeigt, dass bei gegebener Mittelpunktsdichtigkeit die isentropische Constante einen um so grösseren Werth annimmt, je grösser die Masse des Weltkörpers ist.

Für den (der tausendfachen Volumenvergrösserung entsprechenden) Zustand, auf welchen die zweite Tabelle des vorigen Paragraphen sich bezieht, erhält man die Werthe:

$\frac{M}{S} =$	1000	1	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1\,000\,000}$
$E =$	143 530 000	1 435 300	14 353	143,53

Die Vergleichung dieser letzteren Tabelle mit der vorigen zeigt, dass bei gegebener Masse die isentropische Constante einen um so grösseren Werth annimmt, je grösser das

Volumen des Weltkörpers ist, dass also bei hinreichender Volumenvergrösserung einer **kleinen** Masse die isentropische Constante desselben ebenso gross werden kann wie die einer **grossen** Masse von gegebenem Volumen.

Wenn mit E' die isentropische Constante eines Weltkörpers von der Mittelpunktstemperatur T_0' und von der Mittelpunktsdichtigkeit γ_0' bezeichnet wird, so hat (nach Gleichung 654) das Verhältniss der beiden isentropischen Constanten E und E' die Grösse:

$$(655) \qquad \frac{E}{E'} = \frac{T_0}{T_0'} \cdot \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_0'}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Wenn ferner die Masse des ersteren Weltkörpers n-mal so gross ist als die Masse des letzteren, und das Volumen des ersteren ε-mal so gross als das Volumen des letzteren, so ist:

$$(656) \qquad \frac{\gamma_0}{\gamma_0'} = \frac{n}{\varepsilon}$$

zu setzen, weil die Mittelpunktsdichtigkeiten wie die mittleren Dichtigkeiten sich verhalten, und die mittlere Dichtigkeit dem Quotienten: „Masse dividirt durch Volumen“ gleich ist.

Die Mittelpunktstemperatur ist (nach Gleichung 89) proportional dem Producte Nr oder dem Quotienten: „Masse dividirt durch Halbmesser“, und da die Grösse des letzteren der Cubikwurzel aus dem Volumen proportional ist, so hat das Verhältniss der beiden Mittelpunktstemperaturen die Grösse:

$$(657) \qquad \frac{T_0}{T_0'} = \frac{n}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}}.$$

Nach Substitution der obigen beiden Ausdrücke erhält man für das Verhältniss der beiden isentropischen Constanten den Werth:

$$(658) \qquad \frac{E}{E'} = (n\,\varepsilon)^{\frac{1}{3}},$$

und für die Bedingung, welche erfüllt sein muss, wenn diese beiden Constanten gleiche Werthe annehmen sollen, die Gleichung:

$$(659) \qquad n\varepsilon = 1, \text{ oder: } \varepsilon = \frac{1}{n}.$$

Für ein Gas von der hier vorausgesetzten (dem Werthe $k = {}^5/_3$ entsprechenden) Beschaffenheit gilt also der folgende Satz:

Die Volumina zweier isentropischer Gaskugeln von gleicher Entropie verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen.

Da man sich die kleinere Masse aus der grösseren durch Theilung der letzteren in n gleiche Theile entstanden denken kann, indem man annimmt, dass jeder von diesen n Theilen ohne Aenderung seiner Entropie (d. h. ohne Wärme-Zuführung oder -Entziehung) allmählich in den Zustand einer isolirt im Raume schwebenden Kugel übergeführt wird, so kann man unter den hier gemachten Voraussetzungen dem obigen Satze auch die folgende Form geben:

Wenn die Masse der Gaskugel in n gleiche Theile zerlegt wird, so nimmt jeder Theil ein Volumen an, welches n-mal so gross ist, als das ursprüngliche Volumen des Ganzen.

§ 74. Zustandsänderungen der Planeten.

Nach der Kant-Laplace'schen Hypothese würden die Sonne und ihre Planeten in gewissem Sinne als gleichalterige Weltkörper betrachtet werden können, insofern eine jede Planetenmasse vor dem Zeitpunkte, als dieselbe nach obiger Hypothese in Form eines Ringes von der Sonnenmasse sich trennte, an den Zustandsänderungen der letzteren theilgenommen und im Entstehungsmomente dieselbe Entropie erreicht hatte, wie die Sonnenmasse. Wenn also die Voraussetzung zulässig wäre, dass die Sonnenmasse zur Zeit der Trennung die Eigenschaften einer im adiabatischen Gleichgewichtszustande befindlichen idealen Gaskugel besass, und dass der Planetenmasse während des nach der Trennung erfolgenden Ueberganges aus der Ringform in die Kugelform keine Wärme entzogen wurde, so müsste aus dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Satze gefolgert werden, dass die Planetenmasse nach der Trennung zunächst ein Volumen annahm, welches — dem umgekehrten Massenverhältniss entsprechend — beträchtlich grösser war als das

Volumen, welches die Sonnenmasse in jenem Zeitpunkte besass. Eine solche Voraussetzung würde jedoch in mehrfacher Hinsicht der Wirklichkeit nur ungenügend entsprechen.

Zunächst ist zu berücksichtigen, dass der Planet aus einem Theile derjenigen Masse entstand, welcher vor der Trennung die Oberflächenschicht der Sonnenmasse bildete. Da nach der Theorie des adiabatischen Gleichgewichtszustandes die mittlere Temperatur der Oberflächenschicht von dem Nullpunkte der absoluten Temperatur nur wenig verschieden sein konnte, und da bei niedriger Temperatur einer geringen Wärmeabgabe schon eine verhältnissmässig grosse Entropieabnahme entspricht, so ist anzunehmen, dass die Planetenmasse während ihres Verweilens in der Ringform und während des nachherigen Ueberganges in die Kugelform eine beträchtliche Entropieabnahme erleiden musste, und dass infolge dessen die neu entstehende Kugel bei weitem nicht dasjenige Volumen erreichen konnte, welches nach dem Gesetze des vorigen Paragraphen sich ergeben würde.

Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass zur Zeit der Trennung die Sonnenmasse jedenfalls infolge ihrer Rotationsbewegung eine von der Kugelgestalt weit abweichende sphäroïdische Form hatte, und dass in dem sich ablösenden Ringe die Schwerkraft durch die Centrifugalkraft vollständig aufgehoben wurde, wodurch eine beträchtliche Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie bedingt werden musste. Während in Bezug auf eine ruhende Gaskugel angenommen werden darf, dass bei sehr grosser Masse derselben die in der Oberflächenschicht entstehenden Condensationsproducte sofort in heissere Regionen herabsinken und gleich nach dem Entstehen sich wieder auflösen, würde in Bezug auf den vorliegenden Fall vielmehr anzunehmen sein, dass die Condensationsproducte vor dem Augenblicke der Trennung schon in dem Ringe sich angehäuft hatten, weil einerseits bei den schon entstandenen Condensationsproducten die Tendenz zum Herabsinken fehlte, und weil andererseits das grössere Emissionsvermögen derselben eine verstärkte Wärmeausstrahlung bedingte, wodurch das Entstehen neuer Condensationsproducte begünstigt wurde.

Hieraus folgt, dass die Ringmasse unmittelbar nach der Trennung schon eine verhältnissmässig grosse Quantität von Condensationsproducten enthalten und demgemäss eine verhältnissmässig geringe Entropie besitzen musste. Dass unter besonders günstigen Umständen — insbesondere bei längerer Dauer des Verweilens in der Ringform — dieses Vorherrschen von Condensationsproducten eine nahezu vollständige Condensation der Ringmasse und einen Uebergang derselben in einen Schwarm von kleinen festen Weltkörpern zur Folge haben konnte, scheinen der Planetoïdenring und der Ring des Saturn als Beispiele zu beweisen.

Unmittelbar nach dem Uebergange aus der Ringform in die Kugelform befand sich die Planetenmasse höchst wahrscheinlich in einem Zustande, bei welchem zunächst die am Schlusse des § 72 als „dynamische Contraction“ definirte Art der Zustandsänderung eintreten musste. Bei einem Planeten von sehr kleiner Masse konnte während dieser sehr rasch sich vollziehenden dynamischen Contraction die Mittelpunktsdichtigkeit bereits nahezu ihre obere Grenze erreichen, und die fernere Zustandsänderung erfolgte alsdann nach den Gesetzen der Abkühlung, welche bei der kleinen Masse ebenfalls verhältnissmässig rasch fortschreiten musste.

Wenn dagegen die Masse des Planeten so gross war, dass unmittelbar nach Beendigung der dynamischen Contraction die Mittelpunktsdichtigkeit noch verhältnissmässig weit von ihrer oberen Grenze entfernt war, so musste auf die dynamische Contraction zunächst noch eine Periode der langsamen, mit Wärmeerzeugung und Temperaturzunahme verbundenen, statischen Contraction folgen, und hierbei annäherungsweise das Gesetz des § 69 zur Geltung kommen, nach welchem die Contraction der kleineren Planetenmasse langsamer als die Contraction der grösseren Sonnenmasse — die Contraction der grösseren Jupitermasse rascher als die der kleineren Saturnmasse — erfolgen musste.

Soweit die Kant-Laplace'sche Theorie der Planetenentstehung überhaupt als einwurfsfrei gelten kann, würde auf diese Weise vielleicht zu erklären sein, dass die kleinen Planeten in ihrer Zustandsänderung die Sonne bereits überholt

haben, während die grossen Planeten noch hinter derselben zurückgeblieben sind, insofern die letzteren den gegenwärtigen Dichtigkeitszustand der Sonne noch nicht ganz erreicht haben.

Da jedoch die Entwickelungsdauer der Planeten theilweise von Umständen abhing, welche — wie z. B. die Dauer des Verweilens im Zustande der Ringform — aller Berechnung sich entziehen, so darf ein streng gesetzmässiges Hervortreten des Einflusses der Massengrösse auf die Entwickelungsdauer von vornherein nicht erwartet werden. Dass z. B. der Saturn in seiner Entwickelung von den kleineren Massen des Uranus und des Neptun bereits überholt wurde, könnte vielleicht theilweise von der schützenden Wirkung des Ringes herrühren, welcher einen Theil der von den Planeten ausgehenden Wärmestrahlen wieder zurücksendete und dadurch eine Verminderung der Contractionsgeschwindigkeit desselben verursachte.

§ 75. Hypothesen über den gegenwärtigen Zustand des Jupiters.

Dass der Jupiter die Entwickelungsstufe der dynamischen Contraction bereits in längst vergangener Zeit überschritten haben musste, scheint aus dem gegenwärtigen Zustande der kleineren Masse des Saturns geschlossen werden zu dürfen, insofern der letztere jedenfalls schon seit längerer Zeit im stabilen Gleichgewichtszustande sich befindet und bei diesem Zustande eine Dichtigkeit besitzt, welche nur ungefähr halb so gross ist, als die des Jupiters. Man darf hieraus schliessen, dass seit Beendigung der dynamischen Contraction die Dichtigkeit des Jupiters während der später folgenden langsamen statischen Contraction mindestens bis auf das Doppelte gewachsen ist, wozu jedenfalls ein sehr langer Zeitraum erforderlich war.

Da die Dichtigkeit des Jupiters gegenwärtig nahezu die Dichtigkeit der Sonne erreicht hat, und die Masse desselben nahezu den tausendsten Theil von der Sonnenmasse beträgt, so können für die Beurtheilung der muthmasslichen gegenwärtigen Beschaffenheit der Jupitermasse die in der ersten

Tabelle des § 72 für einen gasförmigen Weltkörper von der Masse $M = S/_{1000}$ angegebenen Zahlenwerthe als vorläufige Anhaltepunkte benutzt werden. Wenn man den Jupiter zunächst als eine ideale Gaskugel betrachtet und annimmt, dass die Masse desselben aus einem Gase besteht, welches die in § 72 vorausgesetzten Eigenschaften besitzt, so würde aus jener Tabelle sich ergeben, dass in der Tiefe $z = r / 100$ die Temperatur nahezu 4500 Grad und die Dichtigkeit etwa 5,5 kg beträgt. Nach dem Mittelpunkte hin würde die Temperatur bis auf etwa 600 000 Grad und die Dichtigkeit bis auf etwa 8500 kg zunehmen. Aus Gleichung (634) würde ferner sich ergeben, dass die Oberflächentemperatur des Jupiters etwa den vierzigsten Theil von der Oberflächentemperatur der Sonne beträgt, und nach Gleichung (644) müsste die Wärmeausstrahlung des Jupiters ungefähr den 100 000 000-sten Theil von der Wärmeausstrahlung der Sonne betragen. Wenn also die Lichtausstrahlung der Wärmeausstrahlung proportional vorausgesetzt werden dürfte — was freilich bei so grossem Temperaturunterschiede keineswegs zulässig sein würde —, so müsste der Jupiter, aus einer Entfernung von 100 Millionen Meilen betrachtet, ohne Sonnenbeleuchtung schon heller als ein Fixstern erster Grösse erscheinen. Zugleich würde aus den Untersuchungen des § 66 zu folgern sein, dass der gegenwärtige Zustand des Jupiters, ebenso wie der gegenwärtige Zustand der Sonne, nicht wesentlich verschieden sein kann von demjenigen Zustande, welcher dem Culminationspunkte der Oberflächentemperatur entspricht.

Da jedoch in Wirklichkeit der Stoff, aus welchem die Jupitermasse besteht, die Eigenschaft der Condensirbarkeit besitzt, so wird innerhalb der mit Condensationsproducten erfüllten Oberflächenschicht jedenfalls die Form der Zustandslinie von der in § 72 aus der Voraussetzung des rein gasförmigen Aggregatzustandes abgeleiteten Form beträchtlich abweichen müssen. Wenn man beispielsweise annähme, dass den Werthen $T = 4500$ und $\gamma = 5{,}5$ ein Zustandspunkt entspricht, welcher gerade in die Grenzlinie des Condensationsgebietes der Temperaturfläche hineinfällt, dass also die Entstehung von Condensationsproducten in derjenigen Schicht

beginnt, welche bei rein gasförmigem Aggregatzustande in einer Tiefe von etwa hundert Meilen unter der Oberfläche liegen würde, so ist anzunehmen, dass die wirkliche Stärke der oberhalb dieser Schicht befindlichen Oberflächenschicht beträchtlich mehr als hundert Meilen betragen muss, weil innerhalb des Condensationsgebietes für die Grösse c_p ein beträchtlich grösserer Werth in Rechnung zu bringen sein würde. Da diese Oberflächenschicht als eine Atmosphäre betrachtet werden kann, so würde aus dem in § 1 gefundenen Satze sich ergeben, dass z. B. dem Werthe $c_p = 3$ (welcher in § 27 für das Condensationsgebiet des Wasserdampfes als Annäherungswerth sich ergab) eine Atmosphärenhöhe entsprechen würde, welche dreimal so gross ist als diejenige Atmosphärenhöhe, welche dem in § 72 angenommenen Werthe $c_p = 1$ entsprach, dass also die wirkliche Tiefe, bis zu welcher das Condensationsgebiet hinab sich erstreckt, etwa dreihundert Meilen betragen würde.

Da die wirklichen Eigenschaften des Stoffes, aus welchem die Jupitermasse besteht, nicht bekannt sind, so kann von einer genaueren numerischen Bestimmung der wirklichen Tiefe des Condensationsgebietes vorläufig nicht die Rede sein. Indessen darf nach obiger Untersuchung in Uebereinstimmung mit den Resultaten directer Beobachtungen als durchaus wahrscheinlich angenommen werden, dass bis zu einer Tiefe von mehreren hundert Meilen unter der Oberfläche des Jupiters noch Condensationsproducte entstehen können, und dass bis zu dieser Tiefe die ganze Oberflächenschicht desselben eine wolkenartige Beschaffenheit besitzt. Auch ist es keineswegs als unwahrscheinlich zu betrachten, dass der Jupiter gegenwärtig eine Mittelpunktstemperatur von einigen hunderttausend Graden erreicht hat.

Infolge des wolkenartigen Aggregatzustandes der Oberflächenschicht wird die wirkliche Intensität der Wärmeausstrahlung höchst wahrscheinlich geringer sein als diejenige, welche dem rein gasförmigen Aggregatzustande der Oberflächenschicht entsprechen würde. Das grössere Emissionsvermögen der Condensationsproducte würde zwar bei gleicher Temperatur eine Verstärkung der Wärmeausstrahlung be-

dingen. Da jedoch die Wolkenhülle eine für Wärmestrahlen nahezu undurchdringliche Decke bildet, welche die tiefer liegenden heisseren Schichten vor directer Ausstrahlung schützt, so wird die Tiefe der ausstrahlenden Oberflächenschicht und demgemäss auch die mittlere Temperatur derselben beträchtlich kleiner sein, als dieselbe bei rein gasförmigem Aggregatzustande sein würde. Infolge dessen kann die Aussendung von leuchtenden Wärmestrahlen nur an solchen Stellen stattfinden, wo die aus dem heissen Inneren aufsteigenden Ströme die Wolkenschicht durchbrechen.

Eine Vergleichung der für die beiden Massengrössen $M = S/1000$ und $M = S$ in der ersten Tabelle des § 72 angegebenen Zahlenwerthes zeigt zugleich, dass in Betreff des Aggregatzustandes der Oberflächenschicht ein bemerkenswerther Unterschied zwischen dem Jupiter und der Sonne stattfindet. Denn bei der in § 72 vorausgesetzten Zustandslinie würde der Temperatur $T = 4452$ Grad in dem Weltkörper von der Masse $M = S/1000$ die Dichtigkeit $\gamma = 5{,}5$ Kilogramm und die Tiefe $z = r/100$, in dem Weltkörper von der Masse $M = S$ dagegen die Dichtigkeit $\gamma = 0{,}0055$ Kilogramm und die Tiefe $z = r/10000$ unter der Oberfläche entsprechen. Soweit also die Anwendung der Theorie des adiabatischen Gleichgewichtes auf die Oberflächenschicht der Sonne überhaupt als zulässig betrachtet werden darf, muss angenommen werden, dass die an der Sonnenoberfläche beobachteten Erscheinungen durch etwaige Condensationsprocesse — falls solche überhaupt vorkommen — nur in verschwindend geringem Maasse beeinflusst werden können.

§ 76. Zustandsänderung eines gasförmigen Weltkörpers von sehr grosser Masse und sehr grossem Volumen.

Der in § 69 gefundene Satz, nach welchem die Contractionsgeschwindigkeit annäherungsweise der Massengrösse proportional gesetzt werden darf, verliert seine Gültigkeit nicht nur dann, wenn die Masse des Weltkörpers sehr viel kleiner ist, sondern auch dann, wenn die Masse desselben sehr viel grösser ist als die Sonnenmasse.

Von der Richtigkeit dieser letzteren Behauptung kann

man sich überzeugen, indem man die Gleichungen des § 65 z. B. auf einen Weltkörper anwendet, dessen Masse tausendmal so gross ist als die Sonnenmasse. In Bezug auf die Sonnenmasse selbst würde den Werthen $k = 5/3$ und $r/r_0 = 215$ nach den Gleichungen (621) und (622) der Werth $\sigma = 1400$ Millionen Meter entsprechen als jährliche Abnahme des Halbmessers. Hiernach erhält man für die Grösse u, um welche der Halbmesser pro Secunde abnimmt, oder für die Geschwindigkeit, mit welcher die der Oberflächenschicht angehörenden Massentheile dem Mittelpunkte sich nähern, den Werth:

$$u = \frac{1400\,000\,000}{31\,536\,000} = 44{,}36 \text{ m.}$$

Nach dem Satze des § 69 würde für einen Weltkörper von der Masse $M = 1000\,S$ unter sonst gleichen Umständen die Verhältnisszahl σ/r einen tausendmal so grossen, und die Grösse σ selbst einen zehntausendmal so grossen Werth annehmen. Für den letzteren Weltkörper würde also eine theoretische Contractionsgeschwindigkeit von 443 600 Metern oder von etwa 60 Meilen pro Secunde sich ergeben. Da jedoch bei einem solchen Weltkörper die — nach § 37 aus der Gleichung $u' = \sqrt{2\,Ngr}$ zu berechnende — Endgeschwindigkeit eines aus unendlicher Höhe auf die Oberfläche desselben herabfallenden Körpers nur etwa 56 Meilen betragen würde, und die Geschwindigkeit des Herabsinkens eines der Oberflächenschicht angehörenden Massentheilchens unmöglich grösser sein kann als diejenige Endgeschwindigkeit, welche dasselbe bei freiem Falle aus unendlicher Höhe erreicht haben würde, so folgt hieraus, dass die Gleichungen des § 65 für den vorliegenden Fall, sowie überhaupt für Weltkörper von sehr grosser Masse und von sehr grossem Volumen, nicht mehr gültig sind.

Aber auch selbst dann, wenn für die nach § 65 berechnete theoretische Contractionsgeschwindigkeit ein Werth sich ergeben hätte, welcher jenen oberen Grenzwerth u' nicht ganz erreichte, so würde doch die Zustandsänderung der Masse $M = 1000\,S$ bei dem hier vorausgesetzten grossen Volumen nicht mehr nach den Gesetzen der in § 65 voraus-

gesetzten statischen Contraction erfolgen können — schon allein aus dem Grunde nicht, weil bei so grossen Contractionsgeschwindigkeiten die Annahme nicht mehr zulässig sein würde, dass die ganze Gravitationsarbeit unmittelbar in Wärme umgewandelt wird, wie in § 65 stets vorausgesetzt wurde. Ein beträchtlicher Theil jener Arbeit wird im vorliegenden Falle — anstatt in Wärme — vielmehr zunächst in lebendige Kraft umgewandelt, und infolge dessen wird die Intensität der Wärmeausstrahlung stets geringer sein, als bei jener früheren Untersuchung vorausgesetzt wurde.

Nach § 65 würde die theoretische Contractionsgeschwindigkeit u mit wachsenden Werthen von r beständig zunehmen, und da die Grösse u', als oberer Grenzwerth für die wirkliche Contractionsgeschwindigkeit, mit wachsenden Werthen von r beständig abnimmt, so folgt hieraus mit Nothwendigkeit, dass in einem bestimmten Zeitpunkte und bei einer bestimmten Volumengrösse die wirkliche Contractionsgeschwindigkeit ein Maximum erreichen musste. Dieser Zeitpunkt, welchen man den Culminationspunkt der Contractionsgeschwindigkeit nennen kann, bildet also den Endpunkt einer Periode, in welcher die Contractionsbewegung mit Beschleunigung stattfinden musste, und den Anfangspunkt einer Periode, in welcher die Contractionsbewegung mit Verzögerung stattfindet. Hieraus ergibt sich der folgende Satz:

Solange das Volumen des Weltkörpers eine bestimmte Grenze überschreitet, ist die Contraction stets eine *beschleunigte.*

Die während der beschleunigten Contraction angesammelte lebendige Kraft wird später während der verzögerten Contraction in Wärme umgewandelt. Infolge dessen wird dasjenige Volumen, welchem der Culminationspunkt der Wärmeausstrahlung entspricht, kleiner sein müssen, als aus den Gleichungen des § 65 sich ergeben würde.

Ausser der oben genannten ist noch eine andere Ursache vorhanden, welche bei sehr grossem Volumen unter allen Umständen eine beschleunigte Contraction bedingt, nämlich die bei einem wirklich existirenden Gase stets vor-

aus zu setzende Eigenschaft der Condensirbarkeit. Die Vergleichung der beiden Tabellen des § 72 zeigte, dass bei dem Weltkörper von der Masse $M = S/1\,000\,000$ eine Vergrösserung des Halbmessers auf das Zehnfache schon ausreichte, um einen Zustand herbeizuführen, bei welchem die Entstehung von Condensationsproducten bis zum Mittelpunkte sich erstreckte. Ein Weltkörper von der Masse $M = 1000\,S$ würde allerdings erst bei einer beträchtlich grösseren Zunahme des Halbmessers einen solchen Zustand erreichen. Wie gross aber auch die Masse des Weltkörpers sein möge: immer wird einer bestimmten Volumengrösse desselben ein Zustand entsprechen, bei welchem das Condensationsgebiet bis zum Mittelpunkte desselben sich erstreckt, und bei diesem Zustande wird an die Stelle der statischen stets die mit Beschleunigung verbundene dynamische Contraction treten müssen, wie bereits in § 35 und § 72 nachgewiesen wurde.

Je grösser das Volumen des Weltkörpers ist, um so weniger wird überhaupt von einer bestimmten Form der Zustandslinie die Rede sein können, und um so mehr wird die wirkliche Form der Zustandslinie von den Zufälligkeiten der Entstehungsweise abhängen. Die Zustandsänderung eines Nebelfleckes wird daher nach Gesetzen erfolgen, welche von den für die Fixsterne geltenden wesentlich verschieden sind.

Da die Endgeschwindigkeit des freien Falles aus der dem Anfangsvolumen entsprechenden Fallhöhe stets als oberer Grenzwerth für die wirkliche Geschwindigkeit des Sinkens der Oberflächentheile anzusehen ist, so kann man einen unteren Grenzwerth für die Dauer jener beschleunigten Contraction aus der Annahme ableiten, dass während der ganzen Dauer dieser Periode das Sinken der Oberflächentheile stets mit der Geschwindigkeit des freien Falles erfolgte.

Die Fallbahn eines aus sehr grosser Höhe a auf die Sonne herabfallenden Körpers kann als eine Ellipse angesehen werden, deren grosse Axe gleich a, und deren kleine Axe gleich Null ist. Zur Berechnung der Falldauer kann daher das dritte Kepler'sche Gesetz benutzt werden, nach welchem die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der grossen Axen sich verhalten. Da die Erde ein

halbes Jahr gebraucht, um die Hälfte einer Ellipse zu durchlaufen, deren grosse Axe etwa 40 Millionen Meilen beträgt, so wird die Zeit, welche ein anfänglich im Abstande $a =$ vier Billionen Meilen von der Sonne befindlicher Körper gebraucht, um auf die Sonne herab zu fallen:

$$\sqrt{\left(\frac{4 \cdot 10^{12}}{40 \cdot 10^{6}}\right)^{3}}$$

halbe Jahre, also etwa 16 Millionen Jahre betragen.

Die Zeit, nach welcher der Abstand des fallenden Körpers bis auf die Grösse des Neptunsbahnhalbmessers abgenommen hatte, wird von der oben berechneten Falldauer verhältnissmässig sehr wenig verschieden sein, da der Neptunsbahnhalbmesser nur etwa den 67 000-sten Theil von der ganzen Fallhöhe beträgt, und der letzte Theil der Fallbahn mit sehr grosser Geschwindigkeit durchlaufen wird. Wenn man also annähme, dass der Sonnenhalbmesser anfangs eine Grösse hatte, welche ungefähr mit dem halben Abstande des nächstliegenden Fixsternes übereinstimmte, so würde als Resultat aus den obigen Untersuchungen sich ergeben, dass der Sonnenhalbmesser jedenfalls mehr als 16 Millionen Jahre gebraucht haben musste, um bis auf die Grösse des Neptunsbahnhalbmessers oder bis auf irgend eine zwischen dem letzteren und dem Erdbahnhalbmesser liegende Grösse abzunehmen.

Für die ganze Erscheinungsdauer eines Fixsternes von der Masse der Sonne würde man aus den obigen Hypothesen mit Zuziehung der in § 65 und § 70 gefundenen Resultate, als unteren Grenzwerth einen Zeitraum von etwa 58 Millionen Jahren erhalten, von denen etwa 16 Millionen Jahre auf die Nebelfleckperiode, vier Millionen Jahre auf die zwischen dem Culminationspunkte der Wärmeausstrahlung und dem Culminationspunkte der Oberflächentemperatur liegende Periode der mit Temperaturzunahme verbundenen statischen Contraction, und etwa 38 Millionen Jahre auf den der Fortdauer des Leuchtens entsprechenden Theil der Abkühlungsperiode zu rechnen sein würden.

XII. Beiträge zur Kenntniss der vanadinsauren und phosphorsauren Salze; von C. Rammelsberg.

(Aus den Sitzungsber. der k. preuss. Acad. der Wiss. zu Berlin vom 11. Jan. 1882; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

I. Die Vanadate der Alkalimetalle.

Berzelius hat bekanntlich seine Erfahrungen in diesem Gebiet auf die kurze Beschreibung zweier Arten von Salzen beschränkt, nämlich weisser Salze, welche er neutrale nannte und rother, welche er als zweifach saure bezeichnete. Allein mit Ausnahme des Ammoniaksalzes, welches wir heute als $AmVO_3$ kennen, finden wir blos eine Wasserbestimmung bei seinem zweifach vanadinsauren Kali angeführt, sonst aber keine analytische Untersuchungen, woran ihn wohl die geringe Menge Vanadin gehindert haben mag, mit deren Hülfe er die zahlreichen Versuche in seiner classischen Arbeit über das seltene Element vor zweiundfünfzig Jahren durchzuführen gezwungen war.

Carl v. Hauer theilte in den Jahren 1856, 1859 und 1860 Versuche über die Vanadate von Ammonium und Calcium mit[1]), jedoch nicht nach einem bestimmten Plan, und ohne die Krystallformen zu bestimmen, welche Lücke, wenigstens bezüglich der Erdsalze, später von Grailich theilweise ausgefüllt wurde.

Roscoe, welcher den Irrthum, in den Berzelius in Hinsicht auf das Atomgewicht des Vanadins und der Sauerstoffmultipeln seiner Oxyde verfallen war, aufdeckte, hat seine Forschungen nur auf einzelne Vanadate ausgedehnt, während Carnelley die Thalliumsalze untersuchte.

Schon aus diesen Arbeiten ergab sich, dass die Vanadinsäure weit mehr als blos zwei Sättigungsstufen bildet.

Im Jahre 1875 theilte Blomstrand eine grössere Zahl von Formeln mit, welche sich für die Vanadate der Alkalien und der Erden aus einer Untersuchung von Norblad in Upsala ergeben hatten[2]), allein diese Arbeit ist bis jetzt, wie es scheint, bei uns unbekannt geblieben. Inzwischen hatte ich selbst dieses Gebiet in Angriff genommen, unterstützt durch grössere Mengen von Vanadinsäure, welche ich

1) C. v. Hauer, Journ. f. prakt. Chem. 69. p. 385. 1856; 76. p. 156. 1859; 80. p. 324. 1860.

2) Norblad, Ber. d. deutsch. chem. Ges. 8. p. 126. 1875.

aus südamerikanischen Erzen (Vanadinit und Descloizit) darstellen liess. Um die von mir erlangten Resultate mit denen Norblad's vergleichen zu können, hatte Prof. Blomstrand in Lund die Güte, mir das Original mitzutheilen[1]), und ich habe die wichtigsten Punkte in die nachfolgende Abhandlung aufgenommen.

Meine Untersuchungen beschränken sich auf die Alkalisalze. Die basischen und normalen wurden auf trockenem Wege, die sauren aus jenen durch Einwirkung von Essigsäure oder Salpetersäure dargestellt. Diese gelben, rothen oder orangefarbigen sauren Salze werden, wenn man sie durch Erhitzen entwässert, unlöslich, und eben solche unlösliche Salze erhält man, wenn man die Carbonate der Alkalien oder die normalen Vanadate mit einer bestimmten grösseren Menge Vanadinsäure schmilzt, ein Umstand, der zu weiteren Versuchen auffordert.

Zur Trennung des Vanadins vom Kalium, Natrium oder Lithium wurde die Lösung mit essigsaurem Blei und ein wenig Ammoniak gefällt, das Filtrat durch kohlensaures Ammoniak vom Blei befreit und das Alkali als Sulfat bestimmt, während der Bleiniederschlag in Salpetersäure gelöst, das Blei durch Schwefelsäure entfernt und die Vanadinsäure durch Abdampfen und schwaches Glühen erhalten wurde.

Vanadinsaures Ammoniak.

1. Normales Salz. — Von allen Vanadaten das bekannteste, da es wegen seiner Schwerlöslichkeit unter Umständen zur Vanadinbestimmung dient. Berzelius erhielt 77,59, Roscoe 77,75 Proc. V_2O_5, während die Rechnung für $AmVO_3$ 77,82 Proc. V_2O_5 ergibt.

Norblad führt an, dass man zuweilen deutliche Krystalle erhalte, welche mit denen von KVO_3 isomorph seien, jedoch theilte er keine Messungen mit.

Auch bei grossem Ammoniaküberschuss erhält man kein basischeres Salz in fester Form.

2. Zweifach saures Salz. — Das von Hauer als solches beschriebene Salz ist, wie wir weiterhin sehen werden, siebendrittelfach saures.

Norblad, welcher zur Darstellung den von Berzelius und von Hauer eingeschlagenen Weg betrat, gibt keine Beschreibung des Salzes, nur eine Analyse, nach welcher er allerdings: $Am_2V_4O_{11} + 4aq$ vor sich hatte.

1) Norblad, Bidrag till kännedomen om Vanadiums Amfidsalter. Upsala Universitets Årsskrift 1873.

Vanadin	41,81	$4V = 205{,}6$	$= 41{,}99$
Ammonium	7,36	$2Am = 36$	$= 7{,}35$
Wasser	15,00	$11O = 176$	
		$4H_2O = 72$	$= 14{,}70$
		489,6	

3. **Fünfhalbfach saures Salz.** — Fügt man zur Lösung des normalen nur soviel Essigsäure, dass sie dauernd rothgelb gefärbt ist, so erhält man bei freiwilligem Verdunsten schöne, rothe Krystalle,

$$Am_4V_{10}O_{27} + 10aq.$$

	a.	b.	c.		
Vanadin	42,56	42,66	42,87	$10V = 514$	$= 42{,}81$
Ammonium	5,88	5,89	5,78	$4Am = 72$	$= 6{,}02$
				$27O = 432$	
				$10H_2O = 180$	$= 15{,}03$
				1198.	

Dieses Salz enthält nur 1 Proc. Vanadin mehr als das vorige, bei fast gleicher Wassermenge. Meine Ammoniumbestimmungen erlauben aber nicht, es für identisch mit jenem zu halten. Ueberdies werden wir die gleiche Sättigungsstufe auch bei einem Natronsalze finden.

Die Krystalle gehören dem viergliedrigen System an. Es sind Combinationen des zweiten Prismas *a* mit einem Quadratoktaëder *o*, der Endfläche *c* und zwei Vierflächnern *s* und *t* aus der Endkantenzone von *o*.

$o = a:a:c \quad s = a:{}^1/_2a:c \quad t = a:{}^1/_3a:c \quad a = a:\infty a:\infty c$

$c = c:\infty a:\infty a \quad a:c = 1:0{,}7595.$

	Berechnet	Beobachtet
o $2A =$	— —	*117° 40′
o $2C =$	94° 6′	94 30
$o:a =$	121 10	121 30
$c =$	132 57	133 0
s $2X =$	134 40	—
s $2Y =$	115 14	—
s $2Z =$	119 0	—

	Berechnet	Beobachtet
$s:a =$	140° 25′	—
$c =$	120 30	—
$o =$	160 45	160° 45′
t $2X =$	146 4	—
t $2Y =$	131 14	—
t $2Z =$	134 42	—
$t:a =$	151 8	151 5
$o =$	150 2	150 0
$s =$	169 17.	

Die Vierkantner *s* und *t*, welche immer nur schmale Abstumpfungen der Kanten *ao* bilden, sind nur unvollzählig vorhanden, die Krystalle überhaupt durch Vorherrschen einer Fläche *o* und Zurücktreten der *a* unsymmetrisch ausgebildet.

4. **Siebendrittelfach saures Salz.** — Aus essigsaurer Lösung erhielt ich nur einmal diese Verbindung in Gestalt eines schwerlöslichen, pulverigen gelbrothen Salzes, dessen Analyse auf die Formel:

$$Am_3V_7O_{19} + 2aq \text{ führt.}$$

Vanadin	47,93	7V = 359,8	= 47,73
Ammonium	7,23	3 Am = 54	= 7,16
		19O = 304	
		$2H_2O$ = 36	
		753,8.	

Dieselbe Sättigungsstufe hat Hauer[1]) als Divanadat beschrieben, was seiner Analyse widerspricht, weil dieselbe Am : V = 1 : 2,34 gibt. Danach hätte er:

$$Am_3V_7O_{19} + 7aq \quad \text{gehabt.}$$

Vanadin	42,37	7V = 359,8	= 42,64
Ammonium	6,35	3 Am = 54	= 6,40
		19O = 304	
		$7H_2O$ = 126	= 14,93
		843,8	

Ich möchte indessen glauben, dass Hauer das Salz $Am_4V_{10}O_{27}$ + 10aq unter Händen gehabt hat. Eine krystallographische Bestimmung seinerseits würde darüber entschieden haben.

5. Dreifach saures Salz. — Bei grösserem Zusatz von Essigsäure zum normalen, gleichwie aus der Mutterlauge vom fünfhalbfachen scheidet sich beim Erhitzen ein gelbes, krystallinisches Pulver ab, während die Flüssigkeit sich entfärbt. In ähnlicher Art hat Norblad es dargestellt, der es als ein goldglänzendes Pulver erhielt, welches bei 350° alles Ammoniak verliert.

	Rammelsberg.				Norblad.			
	a.	b.	c.	d.	a.	b.	c.	d.
Vanadin	51,05	50,71	50,98	50,39	51,29	51,29	—	—
Ammonium	6,17	6,14	6,26	6,14	6,08	6,08	5,87	5,94

AmV_3O_8

3V = 154,2	= 51,36
Am = 18	= 6,00
8O = 128	
300,2	

Hauer gibt an, dass sein vermeintliches Divanadat bei mehrfachem Umkrystallisiren sich in leichtlösliche grosse rothe Krystalle verwandle, die er wiederum leider nicht näher bestimmt hat. Ihre Analyse führt aber auf ein Hydrat des Trivanadats:

$$AmV_3O_8 + 3aq.$$

	a.	b.		
Vanadin	43,17	43,32	3V = 154,2	= 43,54
Ammonium	5,31	4,87	Am = 18	= 5,08
			8O = 128	
			$3H_2O$ = 54	
			354,2	

1) Hauer, Journ. f. prakt. Chem. **69.** p. 385. 1856. u. **80.** 324. 1860.

Weder Norblad noch mir ist die Darstellung eines krystallisirten wasserhaltigen Ammoniumtrivanadats gelungen.

Vanadinsaures Kali.

1. Drittelvanadat. — Durch Zusammenschmelzen von 1 Mol. V_2O_5 und 3 Mol. K_2CO_3 entsteht eine gelblichweisse krystallinische Masse, welche durch Wasser, wie wir weiterhin sehen werden, in freie Basis und Halbvanadat zersetzt wird.

2. Halbvanadat. — Die alkalische Lösung des Drittelvanadats liefert bei starker Concentration undeutliche weisse Krystalle des Salzes. Nach den übereinstimmenden Versuchen von mir und Norblad ist es:

$$K_4V_2O_7 + 3aq.$$

	R.	N.		
Vanadin . .	24,26	23,19 — 24,04	2V = 102,8	= 24,20
Kalium . . .	36,35	36,56	4K = 156	= 36,72
Wasser . . .	—	12,62 — 13,75	7O = 112	
			3HO = 54	= 12,71
			424,8	

Norblad dampfte eine Lösung von KVO_3 mit HKO stark ein, und erhielt das Salz in gut ausgebildeten, jedoch zerfliesslichen, angeblich zwei- und eingliedrigen Krystallen der Combination *o*, *o'*, *a*, *b*. Messungen fehlen. Ueber Schwefelsäure verlieren sie 1 Mol., bei 100° 2 Mol. und beim Schmelzen alles Wasser.

3. Vierfünftelvanadat. — Setzt man der Mutterlauge des vorigen soviel Essigsäure hinzu, dass die entstehende Färbung nach längerem Erwärmen wieder verschwindet, so setzen sich beim Verdunsten weisse, kugelig gruppirte feine Krystalle ab, welche der Analyse nach:

$$K_{10}V_8O_{25} + 7aq \text{ sind.}$$

	a.	b.		
Vanadin . .	30,97	30,95	8V = 411,2	= 30,97
Kalium . .	29,62	29,64	10K = 390	= 29,38
			25O = 400	
			$7H_2O$ = 126	= 9,48
			1327,2	

4. Normales Salz. — Durch Schmelzen gleicher Molecüle V_2O_5 und K_2CO_3 entsteht eine weisse, krystallinische Masse, deren Lösung undeutliche Krystalle von:

$$KVO_3 + 7aq \text{ gab.}$$

Vanadin . . .	19,57	V = 51,4	= 19,44
		K = 39	= 14,75
		3O = 48	
		$7H_2O$ = 126	= 47,66
		264,4	

Norblad erhielt durch Auflösen von Vanadinsäure in Kalilauge, Neutralisiren mit Essigsäure und Eindampfen mikroskopische, farblose, linsenförmige Krystalle von KVO_3.

	a.	b.	c.		
Vanadin . .	36,28	37,07	36,88	V = 51,4	= 37,14
Kalium . .	—	—	28,43	K = 39	= 28,18
				3O = 48	
				138,4	

Ausserdem beschreibt Norblad zwei Hydrate. Das eine bildete sich beim Kochen einer Lösung von Ammoniumdivanadat mit Kalilauge und erscheint in feinen, seidenglänzenden, kugelig gruppirten Nadeln, welche bei 110° ihren Wassergehalt verlieren. Die Analyse ergab $KVO_3 + aq$.

	a.	b.			
Vanadin . .	32,87	32,22	V =	51,4	= 32,86
Kalium . .	25,23	25,52	K =	39	= 24,94
Wasser . .	11,68	11,66	3O =	48	
			H_2O =	18	= 11,51
				156,4	

5. Anderthalbfach saures Salz. — Nur einmal habe ich diese Sättigungsstufe erhalten, als zu einer Lösung von KVO_3 Essigsäure gesetzt wurde. Es bildete sich ein braunrother krystallinischer Niederschlag, welcher in reinem Wasser schwer löslich war.

Die Analyse führt zu $K_4V_6O_{17} + 2aq$.

Vanadin . . .	39,48	6V = 308,4	= 39,93
Kalium . . .	21,42	4K = 156	= 20,20
Wasser . . .	4,60	17O = 272	
		$2H_2O$ = 36	= 4,66
		772,4.	

6. Zweifach saures Salz. — Es bildet sich vorzugsweise leicht und scheidet sich in Form schöner, goldglänzender Blätter oder Schuppen ab, wenn eine warme Lösung von normalem Salz mit Essigsäure oder Salpetersäure versetzt wird und erkaltet. Beim Erhitzen verliert es Wasser und schmilzt zu einer rothbraunen Masse.

Auch Norblad beschreibt dieses Salz und sagt, es bilde rhombische Prismen mit den Hexaidflächen *a* und *c*, es verliere das Wasser bei 200° C. und das vorher geschmolzene sei fast unlöslich in Wasser. Es ist $K_2V_4O_{11} + 4aq$.

	R.		N.			
	a.	b.	a.	b.		
Vanadin	38,31	38,55	38,00	38,03	4V = 205,6	= 38,67
Kalium	14,85	—	16,35	—	2K = 78	= 14,67
Wasser	14,77	—	13,78	13,66	11O = 176	
					$4H_2O$ = 72	= 13,55
					531,6	

Ein äusserlich ganz ähnliches und auf ähnliche Art dargestelltes Salz hält Norblad für ein anderes Hydrat, nämlich $2K_2V_4O_{11} + 7aq$. Er fand in demselben 38,96 V, 15,43 K und 12,06 H_2O, es dürfte indessen mit dem vorigen identisch sein.

Nach der Beschreibung, welche Berzelius von dem Divanadat gibt, möchte man gleichfalls an das Hydrat mit 4aq denken, obwohl er den Wassergehalt nur 10,42 Proc. angibt, was allerdings 3aq (10,53 berechnet) entspricht.

7. Dreifach saures Salz. — Die stark gefärbte Mutterlauge des vorigen gab beim Erhitzen eine gelbe pulverige Ausscheidung, während die Flüssigkeit sich entfärbte. Jene ist:

$$KV_3O_8.$$

Dieses höchst schwer lösliche Salz wurde auch bei Norblad's Versuchen unter gleichen Erscheinungen erhalten.

	R.	N. a.	N. b.		
Vanadin	48,45	48,02	47,57	3V = 154,2	= 48,01
Kalium	11,54	11,58	12,89	K = 39	= 12,14
				8O = 128	
				321,2	

Ausserdem erwähnt Norblad auch des Hydrates:

$$KV_3O_8 + 3aq,$$

welches sich aus der sauren Flüssigkeit als krystallinisches, braunes, in Wasser unlösliches Pulver abgeschieden hatte.

	a.	b.		
Vanadin	40,51	40,84	3V = 154,2	= 41,10
Kalium	10,35	—	K = 39	= 10,39
Wasser	14,81	14,88	8O = 128	
			$3H_2O$ = 54	= 14,39
			375,2	

Vanadinsaures Natron.

1. Drittelvanadat. — Direct dargestellt, bildet Na_3VO_4 eine weisse krystallinische Masse. Roscoe erhielt aus ihrer Lösung feine Nadeln von:

$$Na_3VO_4 + 16aq.$$

2. Halbvanadat. — Die Drittelvanadate von Kalium und Natrium verhalten sich gegen Wasser ganz gleich; sie werden in Halbvanadat und freie Basis zersetzt, wie Roscoe dies beim Natronsalz zuerst beobachtete.

Die farblosen, durchsichtigen Krystalle des Halbvanadates enthalten 18 Mol. Wasser:

$$Na_4V_2O_7 + 18aq,$$

welche Formel bereits Roscoe aufstellte, und die auch aus meinen und Norblad's Versuchen folgt.

	R.	N. a.	N. b.		
Vanadin . . .	15,72	16,15	—	2V = 102,8	= 16,30
Natrium . . .	—	14,77	14,68	4Na = 92	= 14,59
Wasser . . .	51,36	51,59	51,86	7O = 112	
				$18H_2O$ = 324	= 51,36
				630,8	

Die Krystalle gehören dem sechsgliedrigen System an. Es sind Combinationen zweier Dihexaëder, des ersten Prismas und der Endfläche.

$$d = a:a:\infty a:c \qquad p = a:a:\infty a:\infty c$$
$$d^2 = a:a:\infty a:2c \qquad c = c:\infty a:\infty a:\infty a$$
$$a:c = 1:0{,}962.$$

		Berechnet	Beobachtet	Berechnet	Beobachtet
d	$2A$ =	136° 22′	—	$c:d$ = —	* 132° 0′
	$2C$ =	96 0	96° 30′	d^2 = 114° 22′	114—115°
d^2	$2A$ =	125 44	—	$p:d$ = 138 0	—
	$2C$ =	131 36	—	d^2 = 155 48	156 ungef.

Sie bilden sehr dünne Tafeln nach *c*, an deren Rändern die übrigen Flächen erscheinen, welche etwas matt sind. Da die Krystalle an der Luft verwittern, so sind genaue Messungen nicht möglich.

Sie sind optisch einaxig und geben das Interferenzbild solcher Krystalle sehr schön.

Hiernach ist Norblad's Angabe, sie seien zwei- und eingliedrig, zu berichtigen.

3. Normales Salz. — In Ermangelung eigener Versuche bemerke ich blos, dass $NaVO_3$ von Roscoe sowohl, wie von Norblad dargestellt wurde. Letzterer sättigte die Lösung des Halbvanadats mit Kohlensäure, dampfte ab und zog das Natroncarbonat durch Wasser aus, löste den Rest in heissem Wasser und erhielt durch langsames Verdampfen in der Wärme mikroskopische Krystalle. Auch aus dem Divanadat und Natronlauge stellte er das Salz dar. Er fand:

	a.	b.		
Vanadin . . .	39,19	38,94	V = 51,4	= 42,00
Natrium . . .	19,53	—	Na = 23	= 18,79
			3O = 48	
			122,4	

Die Vanadinbestimmungen können mithin nicht richtig sein.

Auch ein Hydrat $NaVO_3 + 2aq$ hat Norblad beim Verdunsten der Lösung über Schwefelsäure in warzenförmig gruppirten Prismen erhalten. Nach dem Schmelzen,

wobei es ein Aufglühen wie die Säure selbst zeigt, löst es sich, obwohl langsam, in Wasser.

	a.	b.		
Vanadin . . .	32,34	32,49	V = 51,4	= 32,45
Natrium . . .	15,12	14,84	Na = 23	= 14,52
Wasser . . .	22,03	22,11	3O = 48	
			$2H_2O$ = 36	= 22,73
			158,4	

4. Anderthalbfach saures Salz. — Fügt man zur Lösung des Halbvanadates Essigsäure bis zur intensiven Färbung, so schiessen beim Verdunsten schöne rothe Krystalle an, welche: $Na_4V_6O_{17} + 16\,aq$ sind.

	a.	b.		
Vanadin . . .	32,46	32,06	6V = 308,4	= 32,11
Natrium . . .	9,19	9,49	4Na = 92	= 9,58
			17O = 272	
			$16H_2O$ = 288	= 30,00
			960,4	

Die Krystalle gehören dem eingliedrigen System an. Es sind eingliedrige Dodekaide, gebildet aus den Flächen:

$$p = a:b:\infty c \qquad q = b:c:\infty a \qquad r = a:c:\infty b$$
$$p' = a:b':\infty c \qquad q' = b':c:\infty a \qquad r' = a':c:\infty b,$$

zu denen sich die Endfläche $c = c:\infty a:\infty b$ und die Fläche $q'/2 = 2b':c:\infty a$ gesellen. Sie sind mitunter tafelartig nach c, und gewöhnlich ist die Zone c, r, r' die herrschende, während p und p' nur als Abstumpfung der Ecken erscheinen.

Hr Websky hat die Güte gehabt, die Krystalle zu messen und zu berechnen, und ich füge einige eigene minder genaue Messungen hinzu.

$$a:b:c = 0{,}9189 : 1 : 1{,}025$$

$$A = 83^\circ 44' \qquad \alpha = 83^\circ 52'$$
$$B = 91\ 49 \qquad \beta = 91\ 19$$
$$C = 94\ 41 \qquad \gamma = 94\ 31.$$

	Berechnet	Beobachtet W.	Beobachtet R.
$p:p'$ =	94° 34′	—	94° 10′
$q:q'$ =	88 24,5	—	—
$c:q$ =	—	* 137° 25,5′	137 30
q' =	—	* 133 31	—
$q':\frac{q'}{2}$ =	150 28	—	—
$r:r'$ =	96 6	—	—
$c:r$ =	—	* 130 57	130 40
r' =	—	* 132 57	133 0
$c:p$ =	93 3	92 47	—
p' =	84 38	84 57	—
$p':q$ =	123 3	123 4	123 20

	Berechnet	Beobachtet W.	Beobachtet R.
$p':q'$ =	118° 3'	118° 13'	118° 20'
r =	120 42	120 53	120 45
r' =	128 9,5	128 8	—
$q:r$ =	116 16	—	116 20
$q':r'$ =	—	* 113 47,5	—

Sie verwittern an der Luft und zerfallen zu einem helleren Pulver.

Das wasserfreie Salz ist nach dem Schmelzen braunschwarz und löst sich weder in Wasser, noch in Säure oder Ammoniak auf.

Norblad erhielt bei der Darstellung des Divanadates mehrmals Krystalle derselben Sättigungsstufe, jedoch nur 10 Mol. Wasser[1]) enthaltend:

$$Na_4V_6C_{17} + 10\,aq.$$

	a.	b.		
Vanadin . . .	35,70	35,81	6V = 308,4	= 36,18
Natrium . . .	—	10,73	4Na = 92	= 10,80
Wasser . . .	20,80	20,76	17O = 272	—
			$10H_2O$ = 180	= 21,12
			852,4	

5. Zweifach saures Salz. — Bei meinen Versuchen hat es sich niemals gezeigt, jedoch wird es von Hauer und von Norblad beschrieben. Ersterer sagt, es sei leicht löslich und bilde grosse Krystalle, deren Form er indess nicht bestimmt hat. Schon Berzelius führt an, das zweifach vanadinsaure Natron bilde grosse orangerothe Krystalle, welche an der Luft verwittern, allein diese Angaben passen ebenso gut auf das anderthalbfach saure Salz.

Hauer's Analyse und zwei Wasserbestimmungen Norblad's, welcher den bekannten(?) Eigenschaften des Salzes nichts hinzuzufügen hat, führen zu:

$$Na_2V_4O_{11} + 9\,aq.$$

	H.	N. a.	N. b.		
Vanadin . . .	34,63	—	—	4V = 205,6	= 34,87
Natrium . . .	7,50	—	—	2Na = 46	= 7,80
Wasser . . .	27,72	27,73	27,96	11O = 176	—
				$9H_2O$ = 162	= 27,48
				589,6	

6. Fünfhalbfach saures Salz. — Wird eine concentrirte warme Lösung des Halbvanadates mit einem starken Ueberschuss von Essigsäure versetzt, so bildet sich eine

1) Im schwedischen Original ist die Formel stets unrichtig, mit $9H_2O$, angegeben.

braunrothe, deutlich krystallinische Fällung eines in Wasser kaum löslichen Salzes $2Na_4V_{10}O_{27} + 7$ aq.

Vanadin . . .	46,73	10V = 514	= 46,68
Natrium . . .	8,17	4Na = 92	= 8,35
Wasser . . .	5,75	27O = 432	—
		$3,5H_2O$ = 65	= 5,72
		1101	

7. Achtdrittelfach saures Salz. — Ich selbst habe kein saureres Natronsalz darzustellen vermocht als das vorige. Norblad beschreibt als Trivanadat mit 4,5 Mol. Wasser ein in jeder Hinsicht ähnliches; allein seine Analysen thun dar, dass darin Na : V nicht = 1 : 3, sondern = 1 : $2^2/_3$ ist. Es entspricht ihnen die Formel:

$$Na_6V_{16}O_{43} + 24 \text{ aq.}$$

	a.	b.		
Vanadin . . .	39,88	39,42	16V = 822,4	= 39,53
Natrium . . .	6,63	6,70	6Na = 138	= 6,63
Wasser . . .	—	20,47	43O = 688	—
			$24H_2O$ = 432	= 20,77
			2080,4	

Vanadinsaures Lithion.

Berzelius sagt, er habe zwei leichtlösliche Salze erhalten, das neutrale, welches farblos sei und in strahligen Krystallgruppen anschiesse, und das zweifach saure, welches grosse orangerothe, an der Luft verwitternde Krystalle bilde. Die Zusammensetzung dieser Salze scheint Berzelius nicht untersucht zu haben.

Ich werde nun die Lithionvanadate beschreiben, welche ich erhalten habe, und bemerke zunächst, dass die Darstellung der basischeren durch Schmelzen von Vanadinsäure mit kohlensaurem Lithion besser geschieht, wenn man statt dieses das salpetersaure Salz verwendet.

1. Drittel vanadinsaures Lithion. — Beim Erhitzen von 1 Mol. Vanadinsäure mit 3 Mol. Lithioncarbonat tritt auch in der Glühhitze keine Schmelzung ein. Das gelbe Pulver ist in Wasser unlöslich. (1.)

Auch beim Schmelzen der Säure mit weniger als 6 Mol. Lithionnitrat bildet sich eine gewisse Menge dieses basischsten Salzes, welches beim Auskochen mit Wasser ungelöst bleibt. (2.)

Zur Analyse wurden die Proben in verdünnter Salpetersäure gelöst.

	1.	2.	Li_3VO_4	
Vanadin . . .	37,81	37,63	V = 51,4	= 37,61
Lithium . . .	15,10	15,01	3Li = 21,0	= 15,39
Wasser . . .	0,50	0,97	4O = 64,0	
			136,4	

2. Halbvanadinsaures Lithion. — Die Schmelze von 1 Mol. Vanadinsäure und 4 Mol. Lithionnitrat liefert eine Lösung, aus welcher sich nach freiwilligem Verdunsten bis zum anfangenden Dickflüssigwerden weisse Krystallmassen von undeutlicher Form abscheiden. 1,569 gaben 0,893 V_2O_5 und 1,174 Li_2SO_4. Hieraus folgt:

$$Li_4V_2O_7 + 7\,aq.$$

Vanadin	32,04	2V = 102,8	= 32,66
Lithium	9,52	4Li = 28,0	= 8,90
		7O = 112	
		$4H_2O$ = 72	= 22,87
		314,8	

3. Zweidrittel vanadinsaures Lithion. — Aus der Lösung des Drittelvanadates in möglichst wenig Salpetersäure erhielt ich weisse feinstrahlige Krystallgruppen, welche sich in Wasser nicht ganz leicht lösen.

Die Analysen beziehen sich auf Proben von verschiedener Darstellung und führen zu:

$$Li_6V_4O_{13} + 15\,aq.$$

	1.	2.		
Vanadin . . .	28,63	27,84	4V = 204,8	= 28,26
Lithium . . .	5,69	5,82	6Li = 42	= 5,80
			13O = 208	
			$15H_2O$ = 270	= 37,25
			724,8	

4. Einfach vanadinsaures Lithion. — Die Schmelze von 1 Mol. Säure und 1 Mol. Lithioncarbonat löst sich in Wasser und liefert im Exsiccator eine gelblichweisse krystallinische Salzmasse. In Wasser ziemlich leicht löslich.

a) 2,68 verloren beim Erhitzen 0,716 und schmolzen zu weisser krystallinischer Masse.

b) 1,399 lieferten 0,895 V_2O_5 und 0,606 Li_2SO_4.

Hiernach ist das Salz:

$$LiVO_3 + 2\,aq.$$

Vanadin	36,00	V = 51,4	= 36,10
Lithium	5,51	Li = 7	= 4,92
Wasser	26,72	3O = 48	
		$2H_2O$ = 36	= 25,28
		142,4	

5. Sechsfünftel vanadinsaures Lithion. — Eine mit wenig Essigsäure versetzte rothe Lösung des vorigen lieferte erst bei sehr starker Concentration durchsichtige rothe Krystalle, welche sich, weil sie rasch verwitterten, nicht genauer bestimmen liessen. Dieses Salz ist sehr leicht löslich. 2,89 gaben 1,785 V_2O_5 und 0,892 Li_2SO_4. Hiernach ist es:

$$Li_{10}V_{12}O_{35} + 30\,aq.$$

Vanadin	34,73	12V = 616,8	= 34,52
Lithium	3,93	10Li = 70	= 3,92
		35O = 560	
		$30H_2O$ = 540	
		1786,8	

6. Vierdrittel vanadinsaures Lithion. — Aus Lösungen von normalem und Drittelvanadat in verdünnter Essigsäure wurden kleine rothe durchsichtige Krystalle eines ziemlich leichtlöslichen Salzes erhalten, welches der Analyse zufolge:

$$Li_6V_8O_{23} + 12\,aq.$$

ist. Denn 1,616 gaben 1,136 V_2O_5 und 0,524 Li_2SO_4

Vanadin	39,53	8V = 411,2	= 39,65
Lithium	4,12	6Li = 42	= 4,05
		23O = 368	
		$12H_2O$ = 216	= 20,82
		1037,2	

Die Form der Krystalle ist wegen ihrer geringen Grösse, und weil sie vielfach miteinander verwachsen sind, schwer zu bestimmen. Sie scheinen dem eingliedrigen System anzugehören und bilden ein vollständiges Dodekaid mit den Hexaidflächen *a*.

$$p = a : b : \infty c \quad q = b : c : \infty a \quad r = a : c : \infty b$$
$$p' = a : b' : \infty c \quad q' = b' : c : \infty a \quad r' = a' : c : \infty b.$$

Nach *p*, *a*, *p'* sind sie prismatisch verlängert. Approximative Messungen ergaben:

$p : p' = 130°\,30'$	$r : r' = 131°\,40'$	$p : r = 105°\,0'$
$a = 107\ \ 30$	$p : q = 128\ \ 6$	$q : r = 130\ \ 0$
$p' : a = 121\ \ 50$	$p : q' = 121\ \ 30$	$q' : r = 132\ \ 0$
$a : r = 123\ \ 30$	$p' : q = 131\ \ 40$	$q : a = 99\ \ 45$
$r' = 105\ \ 15$		

7. Anderthalbfach vanadinsaures Lithion. — Der farblosen Lösung von normalem Vanadat wurde etwas Salpetersäure hinzugefügt; die rothe Flüssigkeit gab beim Verdunsten das Salz in rothen Krystallen. Es ist: $Li_4V_6O_{17} + 15\,aq.$

Aus 1,988 wurden 1,258 V_2O_5 und 0,477 Li_2SO_4 erhalten.

Vanadin	35,58	6V = 308,4	= 35,11
Lithium	3,05	4Li = 28	= 3,19
		17O = 272	
		$15H_2O$ = 270	
		878,4	

Die Krystalle erscheinen als Prismen *p*, deren scharfe Kante durch *a* abgestumpft ist. Die Flächen der Endigung, meist schlecht ausgebildet, sind eine herrschende schiefe Endfläche *c*, eine sehr kleine hintere *r'* und zwei schmale Ab-

stumpfungen der scharfen Kanten *pc*. Da die Flächen ihren Glanz sehr bald einbüssen, lassen sich die Winkel nur annähernd messen. Danach scheinen die Krystalle eingliedrig zu sein.

Beobachtet	Beobachtet	Beobachtet
$p:p' = 80^0$	$a:c = 107^0$	$c:o' = 131^0$
$a = 130$	$r' = 120^3/_4$	$o:p' = 135$
$c:p = 119$	$c:r' = 134$	$o':p = 110^1/_2$.
$p' = 94$	$c:o = 129$	

Bei einem gleichen Versuch wurden kleine rothe Krystalle gewonnen, dasselbe Salz, jedoch mit nur 11 Mol. Wasser:

Vanadin	37,76	6V	= 308,4	= 38,24
Lithium	3,66	4Li	= 28	= 3,47
		17O	= 272	
		$11H_2O$	= 198	
			806,4	

Ferner ist hervorzuheben, dass sich aus einer essigsauren Lösung des normalen Salzes ein braunrothes Salz absetzte, welches nur 3 Mol. Wasser enthielt.

0,662 = 0,545 V_2O_5 und 0,230 Li_2SO_4

Vanadin	46,30	6V	= 308,4	= 46,56
Lithium	4,42	4Li	= 28	= 4,23
		17O	= 272	
		$3H_2O$	= 54	= 8,15
			662,4	

Bei 100° verliert das Salz 1 Mol. Wasser = 2,71 (gefunden 2,87) Proc.

8. Fünfdrittelfach vanadinsaures Lithion. — Beim Erhitzen der Mutterlauge von $Li_6V_8O_{23} + 12$ aq auf dem Wasserbade schied sich ein körniges orangerothes Salz in reichlicher Menge ab, welches in kaltem Wasser sehr schwer löslich ist und sich als $Li_3V_5O_{14} + 7$ aq zu erkennen gab.

1,375 = 1,007 V_2O_5 und 0,354 Li_2SO_4

Vanadin	41,19	5V	= 257	= 40,92
Lithium	3,28	3Li	= 21	= 3,34
		14O	= 224	
		$7H_2O$	= 126	= 20,07
			628	

Als zweifach saures Salz, dessen Darstellung mir nie gelang, beschreibt Norblad ein aus essigsaurer Lösung beim Abdampfen bis zur Syrupsconsistenz erhaltenes orangerothes Krystallpulver, welches beim Umkrystallisiren grössere Krystalle bildet, über deren Form er jedoch nichts mittheilt. Sie verwittern schnell. Dies ist jedoch keineswegs ein Divanadat, sondern das von mir beschriebene Fünfdrittelvanadat mit 12 Mol. Wasser: $Li_3V_5O_{14} + 12$ aq.

	a.	b.	
Vanadin . . .	36,36	36,29	5V = 257 = 35,80
Lithium . . .	2,90	3,06	3Li = 21 = 2,92
Wasser . . .	29,12	29,11	14O = 224
			$12H_2O$ = 216 = 30,08
			718

Kaum eine andere Säure bietet so zahlreiche Sättigungsstufen in ihren Salzen dar, wie die Vanadinsäure, denn es sind deren nicht weniger als achtzehn bekannt, obwohl einige wenige noch zweifelhaft sein dürften. In dieser Hinsicht steht sie der Molybdänsäure und der Wolframsäure nahe. Wenn die von Hauer und Gerland beschriebenen Körper nicht ein Hydrat des Anhydrids, $V_2O_5 + H_2O$, sondern wirklich Vanadinsäure sind, so ist dieselbe, HVO_3, entsprechend der Metaphosphorsäure.

Allein mit den Phosphaten lassen sich die Vanadate direct nicht vergleichen, wenngleich die $R''_3P_2O_8$ und die $R''_3V_2O_8$, gleichwie die $R''_4V_2O_9$ und die $R''_4P_2O_9$ isomorph sind. Denn es fehlt das Analogon der Phosphorsäure, und die Salze R'_3VO_4 von Kalium und Natrium zersetzen sich durch Wasser nicht in freie Basis und HR'_2VO_4, sondern es resultirt ein minder basisches Salz, welches kein chemisch gebundenes Wasser enthält und also nicht einem Phosphat, sondern einem Pyrophosphat analog zusammengesetzt ist. Ferner ist die grosse Zahl saurer Vanadate charakteristisch für die Säure und entfernt sie weit von der Phosphorsäure.

Um eine bestimmte Nomenclatur zu ermöglichen, ist in der vorliegenden Arbeit die Sättigungsstufe $R'VO_3 = R''V_2O_6$ als die normale oder einfache bezeichnet worden.

Als selbständig glaube ich blos folgende Sättigungsstufen betrachten zu dürfen:

Basische	$R'_8V_2O_9$	$= R''_4V_2O_9$	= Viertel-V.
	R'_3VO_4	$= R''_3V_2O_8$	= Drittel-V.
	$R'_4V_2O_7$	$= R''_2V_2O_7$	= Halb-V.
	$R'VO_3$	$= R''V_2O_6$	= Normale V.
Saure	$R'_2V_4O_{11}$	$= R''V_4O_{11}$	= Zweifach-V.
	$R'V_3O_8$	$= R''V_6O_{16}$	= Dreifach-V.

Alle übrigen sauren Salze erscheinen dann als Verbindungen theils von normalen und zweifach sauren, theils als solche von zweifach und dreifach sauren, gleichwie dies für abnorm zusammengesetzte Molybdate, Wolframiate, Silicate u. s. w. angenommen werden kann.

II. Ueber vanadinsaures Vanadinoxyd.

Bekanntlich hat Berzelius schon Verbindungen gleichen Namens beschrieben, welche jedoch noch nicht näher untersucht sind.

Beim Glühen einer schwarzen oxydhaltigen Vanadinsäure mit kohlensaurem Lithion blieb beim Lösen in Wasser ein schwarzer Rückstand, aus mikroskopischen Krystallen bestehend, der nur eine Spur Lithium enthielt.

Die Substanz löst sich in verdünnter Schwefelsäure oder in Salpetersäure mit blaugrüner Farbe und die Lösung gibt mit Ammoniak einen schwarzen Niederschlag und ein farbloses Filtrat.

0,687 gaben 0,711 V_2O_5 = 103,5 Proc. = 58,20 V.

0,57 in schwefelsaurer Lösung ergaben mit übermangansaurem Kali 0,0244 O = 4,28 Proc.

Mithin ist die Verbindung:

$$V_4O_9 = V_2O_5 + 2\,VO_2$$

Vanadin . . .	58,20	4V = 205,6	= 58,81
Sauerstoff. . .	41,32	9O = 144	= 41,19
	99,52	349,6	100

III. Ueber die Pyrophosphate des Natrons.

I. Normales. In Betreff dieses wohlbekannten Salzes, $Na_4P_2O_7 + 10\,aq$, sei nur bemerkt, dass seine Krystalle mitunter ein früher nicht beobachtetes vorderes Augitpaar $a:b:\frac{1}{2}c$ aufweisen, und dass sie theils nach c und dem Flächenpaar q, theils nach der Verticalzone oder den Flächen c, r, r' prismatisch sind, letzteres namentlich dann, wenn sie aus Mutterlaugen des folgenden, die freie Essigsäure enthalten, anschiessen.

II. Saures. Graham zeigte, dass saures phosphorsaures Natron, H_2NaPO_4, durch passendes Erhitzen sich in das Pyrophosphat $H_2Na_2P_2O_7$ verwandelt. Er führt dann nur noch an, es sei sehr löslich und reagire sauer.

In seiner Abhandlung über die pyrophosphorsauren Salze[1]) beschreibt Schwarzenberg die Darstellung dieses Salzes durch Auflösen des normalen in Essigsäure und Zusatz von Alkohol. Der krystallinische Niederschlag ist nach ihm $H_2Na_2P_2O_7$:

	Berechnet		Gefunden
2Na =	46 = 20,72		20,40
2P =	62 = 27,93		27,57
2H =	2 = 8,11	H_2O	8,43
7O =	112		
	222		

Ich versetzte die Lösung von normalem Pyrophosphat in der Wärme mit Essigsäure und erhielt dadurch das Salz beim Abkühlen in sehr ausgezeichneten Krystallen. Seine Zusammensetzung ergeben folgende Analysen:

1) Schwarzenberg, Lieb. Ann. 65. p. 133. 1848.

1. 2,134 verloren beim Glühen 0,804 Wasser.

2. 2,442 verloren 0,92. Der Rest, mit kohlensaurem Natron geschmolzen, lieferte 1,684 $Mg_2P_2O_7$.

3. 2,925 verloren 1,117 und gaben 2,0 $Mg_2P_2O_7$.

	Gefunden		
	1.	2.	3.
Phosphor	—	19,22	19,09
Wasser	37,68	37,67	38,19

Es ist mithin ein Hydrat mit 6 Mol. Wasser:

$$H_2Na_2P_2O_7 + 6\,aq.$$

2Na =	46 =	13,94	
2P =	62 =	18,80	
7O =	112		
2H =	2 =	5,46 H_2O	38,18
6aq =	108 =	32,72 aq	
	330		

Die Krystalle verwittern an der Luft sehr bald. Ueber Schwefelsäure verlieren sie sämmtliches Krystallwasser, denn eine Probe hatte hierbei 31,66 Proc. verloren und gab dann beim Schmelzen noch 6,37 ab. Das Metaphosphat bildet ein klares Glas (Hexametaphosphat).

Die Krystalle, oft von ziemlicher Grösse, farblos und durchsichtig, gehören dem zweigliedrigen System an und sind Combinationen von:

$o = a : b : c$ $\quad q = b : c : \infty a$ $\quad c = c : \infty a : \infty b$

$\frac{o}{3} = a : b : {}^1/_3 c$ $\quad b = b : \infty a : \infty c$ $\quad a : b : c = 0{,}492 : 1 : 1{,}647$

		Berechnet	Beobachtet
o	$2A =$		*129° 30′
	$2B =$	59° 50′	59 23
	$2C =$		*150 0
$\frac{o}{3}$	$2A =$	139 46	139 30
	$2B =$	91 16	
	$2C =$	102 24	
$q : q =$		62 32	62 35
$b =$		148 44	147 30

	Berechnet	Beobachtet
$q : c =$	121° 16′	121° 25′
$o : b =$	115 15	115 15
$c =$	105 0	105 0
$\frac{o}{3} : q =$	119 55	120 0
$b =$	110 7	
$c =$	128 48	128 35
$o =$	156 12	156 15

Spaltbar vollkommen nach *c*. Die Flächen *o*, *q*, *c* sind die herrschenden.

Aus der Mutterlauge dieser Krystalle beginnt sehr bald die Ausscheidung eines fein-krystallinischen Salzes, bald in grösserer, bald in geringerer Menge, welches sich als ein Doppelsalz von normalem und saurem Pyrophosphat zu erkennen gibt. Unter Umständen (bei geringerem Gehalt der Flüssigkeit an Essigsäure) beobachtet man es auch vor der Bildung des krystallisirten Hydrates.

1. 1,762 verloren beim Glühen 0,289 und hinterliessen einen geschmolzenen weissen Rückstand.

2. 2,806 verloren 0,456 und gaben 2,219 $Mg_2P_2O_7$.
3. 1,82, welche zuvor im Wasserbade kurze Zeit getrocknet worden, verloren 0,27 und gaben 1,43 $Mg_2P_2O_7$.

	1.	2.	3.
Phosphor		22,09	21,95
Wasser	16,40	16,25	14,83

Diese Zahlen entsprechen einer Verbindung:

$$Na_6P_4O_{13} + 5H_2O = \left.\begin{matrix} Na_4P_2O_7 \\ H_2Na_2P_2O_7 \end{matrix}\right\} + 4\,aq.$$

$$\begin{aligned} 6Na &= 138 = 24,64 \\ 4P &= 124 = 22,14 \\ 13O &= 208 \\ 3H_2O &= \underline{\ 90\ } = 16,08 \\ & \quad 560 \end{aligned}$$

Nr. 3 hatte etwas Wasser verloren, und in der That bleiben nach längerem Trocknen bei 100° nur 2 aq im Salze, denn 1,883 einer derartigen Probe verloren beim Glühen 0,218 und gaben 1,56 $Mg_2P_2O_7$.

$$\left.\begin{matrix} Na_4P_2O_7 \\ H_2Na_2P_2O_7 \end{matrix}\right\} + 2\,aq.$$

		Berechnet	Gefunden
6Na	= 138	= 26,34	
4P	= 124	= 23,66	22,96
13O	= 208		
$3H_2O$	= 54	= 10,30	11,58
	524		

Eine andere Probe gab 10,66 und 11,04 Wasser.

Das Salz verliert das Krystallwasser bei 200°—250°.

Beim Lösen wird es theilweise in beide Salze zersetzt, denn die kleinen prismatischen Krystalle, welche später anschiessen, sind das normale Pyrophosphat, scheinen aber nur 8 Mol. Wasser zu enthalten.

	Gefunden	Berechnet
	—	$Na_4P_2O_7 + 8\,aq$
Na		22,44
P	15,67	15,12
H_2O	35,70	35,12

Doch waren sie vielleicht etwas verwittert, da eine andere Probe 14,52 Phosphor und 40,0 Wasser, also 10 aq ergeben hat.

Einmal bildete sich nach diesem Doppelsalze eine ihm sehr ähnliche krystallinische Abscheidung des von Schwarzenberg beschriebenen wasserfreien sauren Pyrophosphates, denn die Analyse gab 26,45 Phosphor und 9,51 Wasser.

Nach Abscheidung der beschriebenen Salze krystallisirt aus den Mutterlaugen immer noch unverändertes normales Pyrophosphat, jedoch in feinen Prismen, welche vorherrschend

von der Verticalzone der gewöhnlichen Form gebildet werden. Nr. 1 ist eine Analyse derselben, Nr. 2 eine solche von den gewöhnlichen Krystallen des Salzes.

	1	2	$Na_4P_2O_7 + 10\,aq$
Na		—	20,63
P	14,03	—	13,90
H_2O	41,67	40,36	40,36

Die letzten undeutlichen Krystallanschüsse aus der essigsauren Mutterlauge enthalten phosphorsaures Natron, da sie Silbersalze gelb fällen.

Pyrophosphorsaures Ammoniaknatron.

Schwarzenberg erhielt durch Neutralisiren der Lösung des sauren Pyrophosphates mit Ammoniak Krystalle von:

$$Na_2Am_2P_2O_7 + 6\,aq.$$

Ich habe ihre Form näher untersucht. Sie gehören dem zwei- und eingliedrigen System an und stellen Combinationen von:

$p = a:b:\infty c$ $\quad r' = a':c:\infty b$ $\quad a:b:c = 1,8606:1:1,2635$

$r = a:c:\infty b$ $\quad a = a:\infty b:\infty c$ $\quad o = 81^\circ\ 51'$ dar.

	Berechnet	Beobachtet		Berechnet	Beobachtet
$p:p =$	57° 0′	57° 0′	$a:r =$	129° 40′	129° 50′
$a =$		*118 30	$p:r =$	107 44	107 40
$r:r' =$		*111 50	$r' =$	103 10	104 — ungef.
$a:r =$		*118 30			

Sie sind prismatisch nach der Verticalzone, und mit r oder r' aufgewachsen. An der Luft verwittern sie allmählich.

IV. Ueber Lithionpyrophosphate.

Versetzt man eine Lösung von pyrophosphorsaurem Natron mit Chlorlithium, so entsteht nach Nahnsen und Cuno[1]) bei Vorherrschen des Lithionsalzes ein Niederschlag, welcher ein Gemisch der Pyrophosphate beider Metalle ist, und in welchem ihr gegenseitiges Verhältniss sehr variirt.

Mithin ist das Verhalten hier ganz ebenso wie bei Anwendung von gewöhnlichem phosphorsaurem Natron und Zusatz von Aetznatron oder kohlensaurem Natron. Die Niederschläge sind als isomorphe Mischungen zu betrachten.

Merling fand später[2]), dass durch Auflösen einer solchen Pyrophosphatmischung in Essigsäure und Zusatz von Alkohol ein voluminöser Niederschlag entsteht, welcher frei von Natron und reines Lithionpyrophosphat:

$$Li_4P_2O_7 + 2\,aq$$

ist. Dies ist richtig, wie folgende eigene Analysen darthun:

1) Cuno, Lieb. Ann. **182.** p. 165. 1880.
2) Merling, Zeitschr. f. anal. Chem. **18.** p. 563. 1880.

	M.	Rg.	Rg.	Berechnet
Lithium	11,88	—	—	11,77
Phosphor	26,23	26,20	26,00	26,05
Wasser	14,55	13,31	13,94	15,13

Das Salz, ein krystallinisches Pulver bildend, verliert das Wasser bei 200⁰ und schmilzt im Glühen zu einer weissen, undurchsichtigen Masse.

Dagegen liefert die Lösung des pyrophosphorsauren Natronlithions (aus 1 Mol. Natronsalz und 6 Mol. essigsauren Lithions gefällt) in Essigsäure beim Verdunsten krystallinische Producte, welche natronhaltig sind.

	Anschuss I.	II.	III.
Lithium . .	11,18	7,82	9,59
Natrium . .	2,23	4,82	7,18
Phosphor . .	25,49	20,24	26,83
Wasser . .	14,41	30,00	8,97

	Berechnet I.	II.	III.
Lithium . .	10,90	7,70	9,62
Natrium . .	2,24	5,05	7,90
Phosphor . .	25,64	20,49	26,63
Wasser . .	14,71	29,72	8,73

I. = $R_4P_2O_7 + 2\,aq$ Na : 16Li
II. = $R_4P_2O_7 + 5\,aq$ Na : 5Li
III. = $R_4P_2O_8 + aq$ Na : 4Li

Die Darstellung eines sauren Pyrophosphates $H_2Li_2P_2O_7$ aus dem Monophosphat H_2LiPO_4 ist mir nicht gelungen. Wenn letzteres durch Erhitzen sich in jenes verwandelt, muss es 8,65 Proc. verlieren. Ein solcher Verlust tritt bei 210⁰ ein.

Als der Rest mit Wasser behandelt wurde, blieb ein kleiner Theil ungelöst, aber dies ergab sich als $Li_4P_2O_7$, denn die Analyse gab gegen 13,6 Li 30,9 P, d. h. 2 Li : P.

Die Lösung, welche sauer reagirte, bildete zuletzt einen dicken Syrup, der beim Verdünnen und Erhitzen ein Salz abschied, welches im wesentlichen $H_2Li_2P_2O_7 + aq$ zu sein scheint, wie eine Analyse ergab, aber mit Silbersalzen einen gelblichweissen Niederschlag lieferte, mithin nicht rein war.

V. Saures Thalliumphosphat und Thalliumpyrophosphate.

Auf Lamy's Angabe vertrauend, das Salz H_2TlPO_4 verwandle sich bei 240⁰ in ein amorphes saures Pyrophosphat, erhielt ich über 30 g längere Zeit in einer Temperatur von 250⁰ und beobachtete einen Gewichtsverlust von 2,85 Proc. Da es, um $H_2Tl_2P_2O_7$ zu werden, 3 Proc. verlieren muss, wurde die geschmolzene weisse Masse gelöst und lieferte kleine glänzende Krystalle, welche jedoch Silberlösung gelb fällten und 68,1 Tl, 11,4 P und 5,6 H_2O gaben, also das unveränderte Phosphat waren.

Die Krystalle erlaubten jedoch Messungen, welche ihre Identität mit den von Des Cloizeaux bestimmten[1]) erweisen.

1) Siehe mein Handb. d. kryst. phys. Chem. 1. p. 1519.

Ich fand:

(Seitenk.) $o:o' = 150^0 45'$	$a:2r' = 131^0\ 0'$	$o:a = 105^0 40'$
$a:c = 92\ 0$	$c:2r = 138\ 30$	$o':a = 103\ 30$
$2r = 133\ 35$	$2r' = 137\ 0$	$c = 123\ 30$

Dies ist eine Bestätigung meiner früheren Angaben.[1])

Pyrophosphate des Thalliums.

I. Normales $Tl_4P_2O_7$. Wird eine Lösung des folgenden mit einer solchen von Thalliumcarbonat versetzt und die Flüssigkeit im Exsiccator verdunstet, so schiessen feine durchsichtige Nadeln an, welche die von Des Cloizeaux beschriebene Form zeigen, obwohl die Endigung selten gut ausgebildet ist.

Beobachtet $p:p = 74^0 40'$, $p:a = 126^0 40'$, $a:o' = 141-142^0$.

Der Glühverlust betrug nur 1,04 Proc.

Von einer Zersetzung durch Wasser, welche Lamy angibt, habe ich nichts beobachtet. Die Angaben dieses Chemikers über die Eigenschaften des Salzes sind theilweise deshalb ganz falsch, weil er es aus seinem angeblichen HTl_2PO_4 darstellte, welches, wie ich früher nachwies, ein Doppelsalz aus diesem und H_2TlPO_4 war.

Das zwei- und eingliedrige Hydrat mit 2 aq habe ich nicht erhalten.

II. Saures $H_2Tl_2P_2O_7$. Beim anhaltenden Erhitzen von saurem oder Monothalliumphosphat (H_2TlPO_4) auf 275° betrug der Wasserverlust 3,62 Proc. Die Lösung erstarrte bei freiwilligem Verdunsten zu einer krystallinischen Masse, welche leicht löslich ist, und deren Lösung Silbersalz weiss fällt.

1,597 verloren beim Glühen 0,085 und waren zu einem weissen Metaphosphat geschmolzen.

3,503 gaben 2,934 Tl_2SO_4 und 1,19 $Mg_2P_2O_7$.

Das Salz ist mithin: $H_2Tl_2P_2O_7 + aq$.

	Berechnet	Gefunden
Thallium	67,77	67,80
Phosphor	10,30	9,49
Wasser	5,98	5,82

Lamy sagt, durch passendes Erhitzen von H_2TlPO_4 und Auflösen erhalte man undeutliche prismatische, leicht lösliche Krystalle von $H_2Tl_2P_2O_7$, die beim Erhitzen 2,85 Proc. verloren. Die Rechnung gibt 3,08 Proc. für das wasserfreie Salz. Ein solches hat sich bei meinen Versuchen nicht gebildet.

1) Rammelsberg, Sitzgsb. d. Acad. 1882. p. 283.

Namenregister zum Jahrgang 1883.

A.

Antolik, K., Behandlung der Holtz'schen Influenzmaschine und zugehörige Trockenlampe 19, 512.

Aron, H., Herleitung der Krystallsysteme aus der Theorie der Elasticität 20, 72.

B.

Barus, s. Strouhal.

Bauer, K. L., Experimentiren mit der Luftpumpe 20, 542.

Baumeister, M., Torsionselasticität 18, 578.

Baur, C., Radiometer 19, 12. — Strahlung des Steinsalzes bei verschiedenen Temperaturen 19, 17.

Bender, C., Dichteregelmässigkeiten normaler Salzlösungen 20, 560.

Berthold, G., Die Kölner Luftpumpe v. J. 1641 20, 345.

Blake, L. J., Electricitätsentwickelung bei der Verdampfung 19, 518.

Bohn, C., Absolute Maasse 18, 346; 20, 690.

Boltzmann, L., Zu K. Strecker's Abhandlungen: Die specifische Wärme der gasförmigen zweiatomigen Verbindungen von Chlor, Brom, Jod u. s. w. 18, 309.

Braun, F., Unipolare Leitung fester Körper 19, 340.

Budde, E., Reduction der mechanischen Grundeinheiten auf eine einzige Dimension 20, 161. — Unter Wasserstoff arbeitende Wippe 20, 167.

Bunsen, R., Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen 20, 245.

C.

Chappuis, P. Wärmeerzeugung bei der Absorption der Gase durch feste Körper und Flüssigkeiten 19, 21.

Christiansen, C., Brechungsverhältnisse gefärbter Flüssigkeiten 19, 257. — Emissions- und Absorptionsvermögen für Wärme 19, 267.

Clausius, R., Theorie der dynamoelectrischen Maschinen 20, 353.

D.

Drecker, J., Innere Ausdehnungsarbeit von Flüssigkeitsgemischen im Vergleich zu derjenigen ihrer Bestandtheile 20, 870.

Dvořák, V., Versuche mit statischer Electricität 19, 828.

E.

Edlund, E., Wärmeveränderungen an den Polplatten in einem Voltameter beim Durchgange eines electrischen Stromes 19, 287.

Elsas, A., Erzwungene Schwingungen von Platten 19, 474; 20, 468.

Elster, J., u. H. Geitel, Trockene Ladungssäulen 19, 489. — Electricitätserregung beim Contact von Gasen und glühenden Körpern 19, 588.

Exner, K., Newton'sche Staubringe 20, 63.

F.

Fenkner, H., Grundton und Obertöne eines transversal schwingenden, einerseits offenen Metallcylinders 19, 932.

Frankenbach, Magnetische Experimente 18, 703.

Fröhlich, J., Bestimmung des Ohms auf dynamometrischem Wege 19, 106.

Fromme, C., Magnetische Experimentaluntersuchungen 18, 442. — Electrische Untersuchungen 18, 552; 19, 86; 19, 300.

G.

Geitel, H., s. Elster.

Gerland, E., R. Kohlrausch's Methode bei seinen Untersuchungen über Contactelectricität 18, 357. — Geschichte der Luftpumpe im 17. Jahrhundert 19, 534.

Graetz, L., Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten 18, 79.

Groshans, J. A., Wässerige Lösungen 20, 492.

Grossmann, L., Innere Reibung und galvanische Leitung der Flüssigkeiten 18, 119. — Berichtigung dazu 19, 544.

Grotrian, O., Das electrische Leitungsvermögen einiger Cadmium- und Quecksilbersalze in wässerigen Lösungen **18**, 177.

H.

Hagen, E. B., Wärmeausdehnung des Natriums, des Kaliums und deren Legirung im festen und im geschmolzenen Zustande **19**, 436.

Hagenbach, Ed., Fluorescenz nach Stokes' Gesetz **18**, 45.

Hankel, W. G., Thermoelectrische Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits **18**, 421. — Thermo- und Actinoelectricität des Bergkrystalles **19**, 818.

Hecht, B., Axenverhältnisse der Bahnellipsen bei der elliptischen Polarisation im Quarz **20**, 426.

Hellmann, H., Unterschied der positiven und negativen Entladung **19**, 816.

Hertz, H., Die electrische Entladung begleitende Erscheinung, **19**, 78. — Glimmentladung **19**, 782. — Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner **20**, 279.

Himstedt, F., Windungsfläche einer Drahtspule **18**, 433.

Hittorf, W., Leuchten der Flamme **19**, 73. — Electricitätsleitung der Gase **20**, 705.

Hönig, L., s. Warburg.

Holtz, W., Vorlesungsversuch über die schlechte Wärmeabsorption der Metalle **20**, 703.

J.

Johst, W., Brechungscoëfficienten einiger Gemische von Anilin und Alkohol **20**, 47.

K.

Kaempfer, D., Messung electrischer Kräfte mittelst des electrischen Flugrades **20**, 601.

Kahlbaum, G. W. A., Pyknometer **19**, 378.

Kalischer, S., Electricitätserregung bei der Condensation von Wasserdampf **20**, 614.

Ketteler, E., Optische Controversen **18**, 387, 631.

Kirchhoff, G., Theorie der Lichtstrahlen **18**, 663.

Knoblauch, H., Elliptische Polarisation der von Metallen reflectirten Wärmestrahlen **19**, 352.

Koch, F., Magnet-electrische Rotationserscheinungen **19**, 143.

Koch, K. R., Elasticität der Krystalle des regulären Systemes **18**, 325. — Methode zur Prüfung der Mikrometerschraube **18**, 511.

Koch, S., Reibungsconstante des Quecksilberdampfes, Abhängigkeit von der Temperatur **19**, 857.

König, W., Optische Eigenschaften der Platincyanüre **19**, 491.

Kohlrausch, F., Galvanische Ausmessung der Windungsfläche einer Drahtspule **18**, 513. — Messung localer Variationen der erdmagnetischen Horizontalintensität **19**, 130. — Vergleichung electrischer Widerstände unabhängig von Zuleitungswiderständen **20**, 76. — Bestimmungsweisen des absoluten Widerstandes einer Kette, welche einen Erdinductor und ein Galvanometer enthält **20**, 87.

Krebs, G., Gegenseitige Erregung nahezu gleich gestimmter elastischer Körper **19**, 935.

Kundt, A., Optisches Verhalten des Quarzes im electrischen Felde **18**, 228. — Methode zur Untersuchung der Thermo-, Actino- und Piëzoelectricität der Krystalle **20**, 592. — Schlierenmethode zur Untersuchung von Verwachsungen im Quarz **20**, 688.

L.

Langley, S. P., Auswählende Absorption der Energie der Sonne **19**, 226, 384.

Loewe, J., Sauerstoffgas im Zinkgasometer **18**, 176.

Lommel, E., Die Isogyrenfläche der doppelbrechenden Krystalle; Curven gleicher Schwingungsrichtung **18**, 56. — Newton'sche Staubringe **18**, 613. — Fluorescenz des Joddampfes **19**, 356. — Theorie des Lichtes **19**, 908. — Gesetz der Rotationsdispersion **20**, 578. — Spectroskop mit phospho-

rescirendem Ocular; Beobachtungen über Phosphorescenz **20**, 847.
Lorenz, L., Dispersion **20**, 1.

M.

Merkel, J., Elliptische Polarisation des Lichtes durch Reflexion von Körpern mit Oberflächenfarben **19**, 1.
Meyer, H., Methode von Guébhard zur Bestimmung äquipotentialer Linien **18**, 136. — Magnetisirungsfunction von Stahl und Nickel **18**, 233. — Galvanischer Leitungswiderstand des Psilomelans **19**, 70. — Magnetisirungsfunction und Härte des Stahles **19**, 849.
Miller, A., Einfluss der durch Dehnung erzeugten Temperaturveränderung auf die Messung der ersteren **20**, 94.
Müller, P. A., Specifische Wärmen bei Gasen und Dämpfen **18**, 94.

N.

Neesen, F., Specifische Wärme des Wassers **18**, 369.
Niemöller, F., Abhängigkeit der electromotorischen Kraft eines Elementes vom Druck **18**, 429.
Nies, F. und Winkelmann, A., Volumenänderung der Metalle beim Schmelzen **18**, 364.
Noack, K., Tönen zusammenstossender Flammen **19**, 914.

O.

Oberbeck, A., Electrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen **19**, 213. — Die Polarisationserscheinungen durch dieselben **19**, 625.
Olszewski, K., s. Wroblewski.

P.

Planck, M., Thermodynamisches Gleichgewicht von Gasgemengen **19**, 358.
Pringsheim, E., Radiometer **18**, 1. — Wellenlängenmessung im ultrarothen Sonnenspectrum **18**, 32.

Q.

Quincke, G., Aenderung des Volumens und des Brechungsexponenten von Flüssigkeiten durch hydrostatischen Druck **19**, 401. — Electrische Untersuchungen **19**, 545, 705.

R.

Rammelsberg, C., Vanadinsaure und phosphorsaure Salze **20**, 928.
Riecke, E., Boltzmann's Theorie der elastischen Nachwirkung **20**, 484. — Von einer Zamboni'schen Säule gelieferte Electricitätsmenge **20**, 512.
Ritter, A., Constitution gasförmiger Weltkörper **18**, 488. **20**, 137, 897.
Robb, W. L., Galvanisches Verhalten der Amalgame des Zinkes und des Cadmiums **20**, 798.
Röntgen, W. C., Durch electrische Kräfte erzeugte Aenderung der Doppelbrechung des Quarzes **18**, 213, 534. — Optisches Verhalten des Quarzes im electrischen Feld **19**, 319. — Thermo-, actino- und piëzoelectrische Eigenschaften des Quarzes **19**, 513. — Vorlesungsapparat zur Demonstration des Poiseuille'schen Gesetzes **20**, 268.
Rohrbach, C., Flüssigkeit von hohem specifischem Gewicht, hohem Brechungsexponenten und grosser Dispersion **20**, 169.
Ryn van Alkemade, A. C. van, Elliptische Polarisation bei der Reflexion an durchsichtigen Körpern **20**, 22.

S.

Schröder, H., Abhängigkeit der Molecularrefraction flüssiger Verbindungen von ihrer chemischen Constitution **18**, 148.
Schuller, A., Destillation im Vacuum **18**, 317. — Der Foucault'sche Pendelversuch **19**, 249. — Vorlesungsversuche **19**, 252.
Siemens, W., Leuchten der Flamme **18**, 311. — Electrisches Sonnenpotential und dessen Bedeutung zur Erklärung terrestrischer Phänomene **20**, 108.
Slotte, K. F., Innere Reibung einiger Lösungen und die Reibungsconstante des Wassers bei verschiedenen Temperaturen **20**, 257.
Sohncke, L. und Wangerin, A., Ueber Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen **20**, 177, 391.
Stenger, F., Kalkspath im homogenen magnetischen Felde **20**, 304.

Strouhal, V. und Barus, C., Galvanischer Temperaturcoëfficient des Stahles, des Stab- und Gusseisens **20**, 525. — Härte des Stahles und Magnetisirbarkeit **20**, 621. — Einfluss des Anlassens auf die Haltbarkeit der Magnete **20**, 662.

T.

Toepler, A., Kreuzweise verbundene Magnetstäbe **20**, 838.

V.

Vierordt, K., Schallstärkemessung **18**, 471. — Schallschwächung im Telephon **19**, 207.

Vogel, H. W., Lockyer's Dissociationstheorie **19**, 284.

Voigt, W., An Glasflächen verdichtete Luft **19**, 39. — Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe **19**, 44. — Theorie der Nobili-Guébhard'schen Ringe **19**, 183. — Grundgleichungen der optischen Theorie des Hrn. E. Ketteler **19**, 691. — Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media **19**, 873. — Theorie des Lichtes **20**, 444.

Volkmann, P., Abfallende Quecksilbertropfen **19**, 66. — Absolute Maasse **19**, 245.

W.

Wagner, J., Zähigkeit von Salzlösungen **18**, 259.

Waitz, K., Galvanische Polarisation und Reibung **20**, 285.

Waltenhofen, A. von, Neuere dynamoelectrische Maschinen **18**, 253. — Demonstration der Foucault'schen Ströme **19**, 928. — Magnetisirungsfunction des Stahles **20**, 835.

Wangerin, s. Sohncke.

Warburg, E. und Hönig, L., Wärme durch periodisch wechselnde magnetisirende Kräfte im Eisen **20**, 814.

Weber, L., Photometrischer Apparat **20**, 326.

Wiedemann, E., Dissociationswärme des Wasserstoffmolecüls und electrisches Leuchten der Gase **18**, 509. — Thermochemische Untersuchungen **18**, 608. — Volumenänderungen von Metallen und Legirungen beim Schmelzen **20**, 228. — „Die Darlegung der Abhandlung über das Licht" von Ibn al Haitam **20**, 337. — Beziehung zwischen dem Reibungs- und Leitungswiderstand der Lösungen von Salzen in verschiedenen Lösungsmitteln **20**, 537. — Arabische specifische Gewichtsbestimmungen **20**, 539. — Electrische Entladungen in Gasen **20**, 756.

Wild, H., Umwandlung seines Photometers in ein Spectrophotometer **20**, 452.

Winkelmann, A., Wärmeleitung der Gase und Temperatur **19**, 649. — Durch Polarisation bewirkte Phasenänderung von Wechselströmen **20**, 91. — Wärmeleitung **20**, 350, s. auch Nies.

Witkowski, A., Theorie der galvanischen Kette **19**, 844.

Wroblewski, S. v., Absorption der Gase durch Flüssigkeiten unter hohen Drucken **18**, 290. — Specifisches Gewicht des Sauerstoffes **20**, 860.

Wroblewski, S. v. u. Olszewski, K., Verflüssigung des Sauerstoffes, Stickstoffes und Kohlenoxydes **20**, 243.

Wundt, W., Schallstärkemessung **18**, 695.

Z.

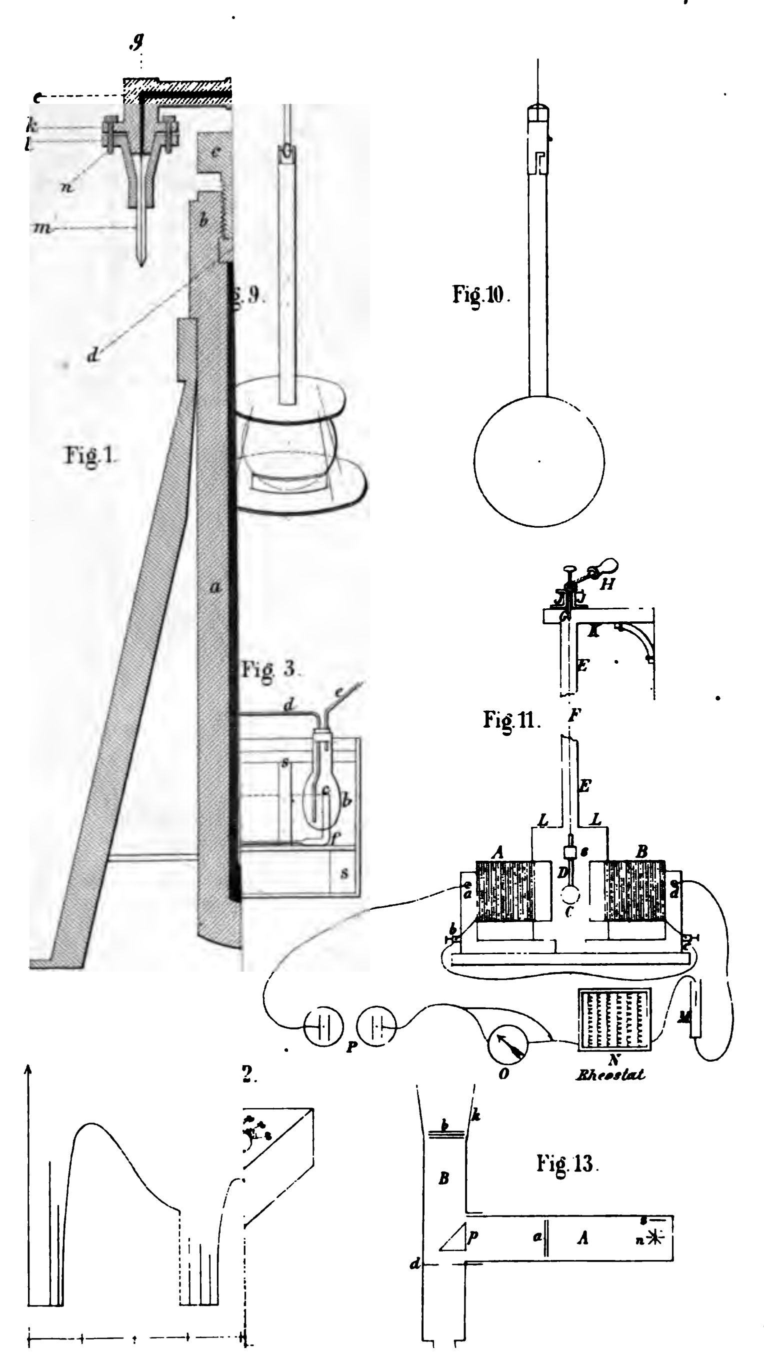
Zöppritz, K., Rechtschreibung einiger aus dem Arabischen stammenden Ausdrücke der Vermessungskunde **20**, 175.

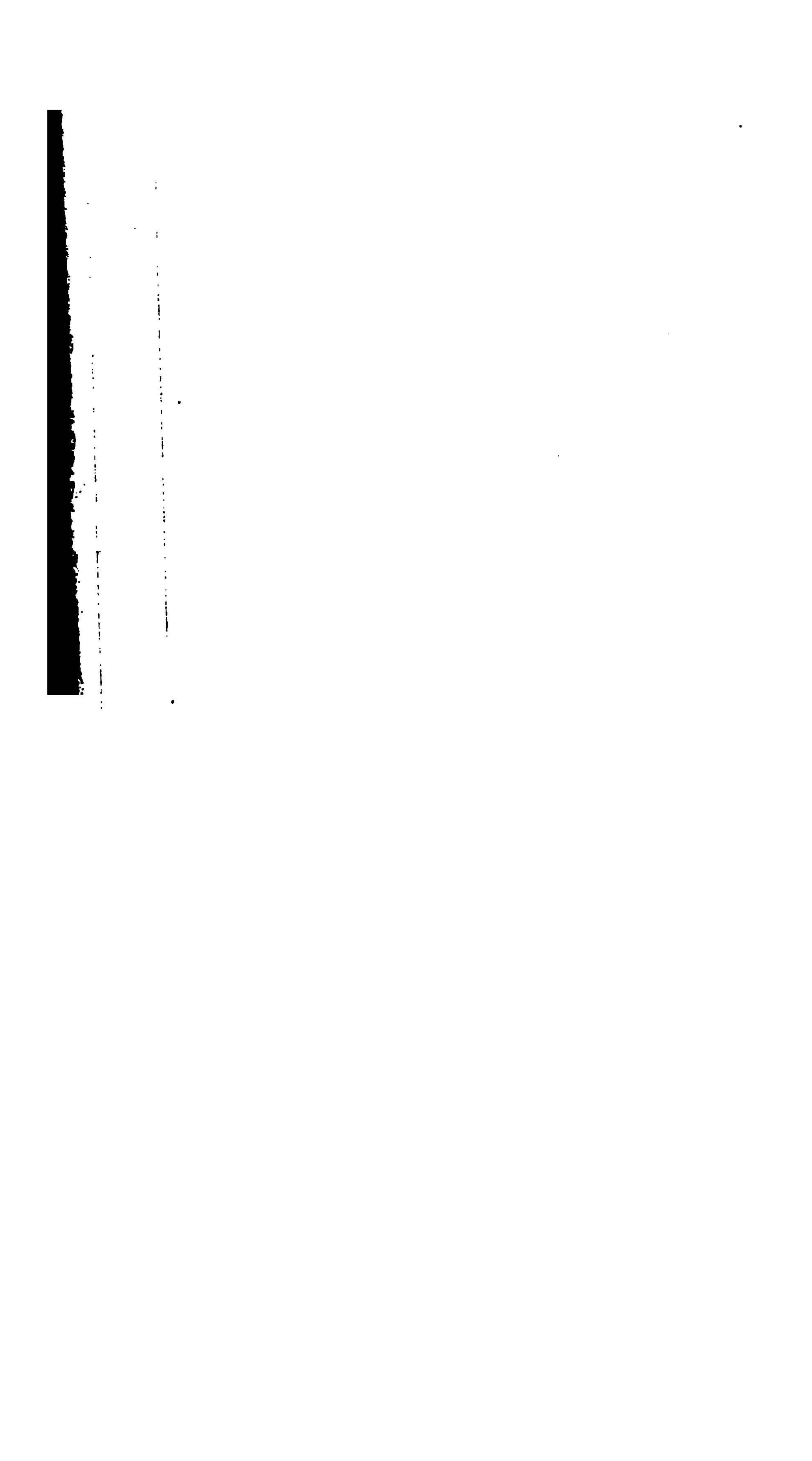
Berichtigungen.

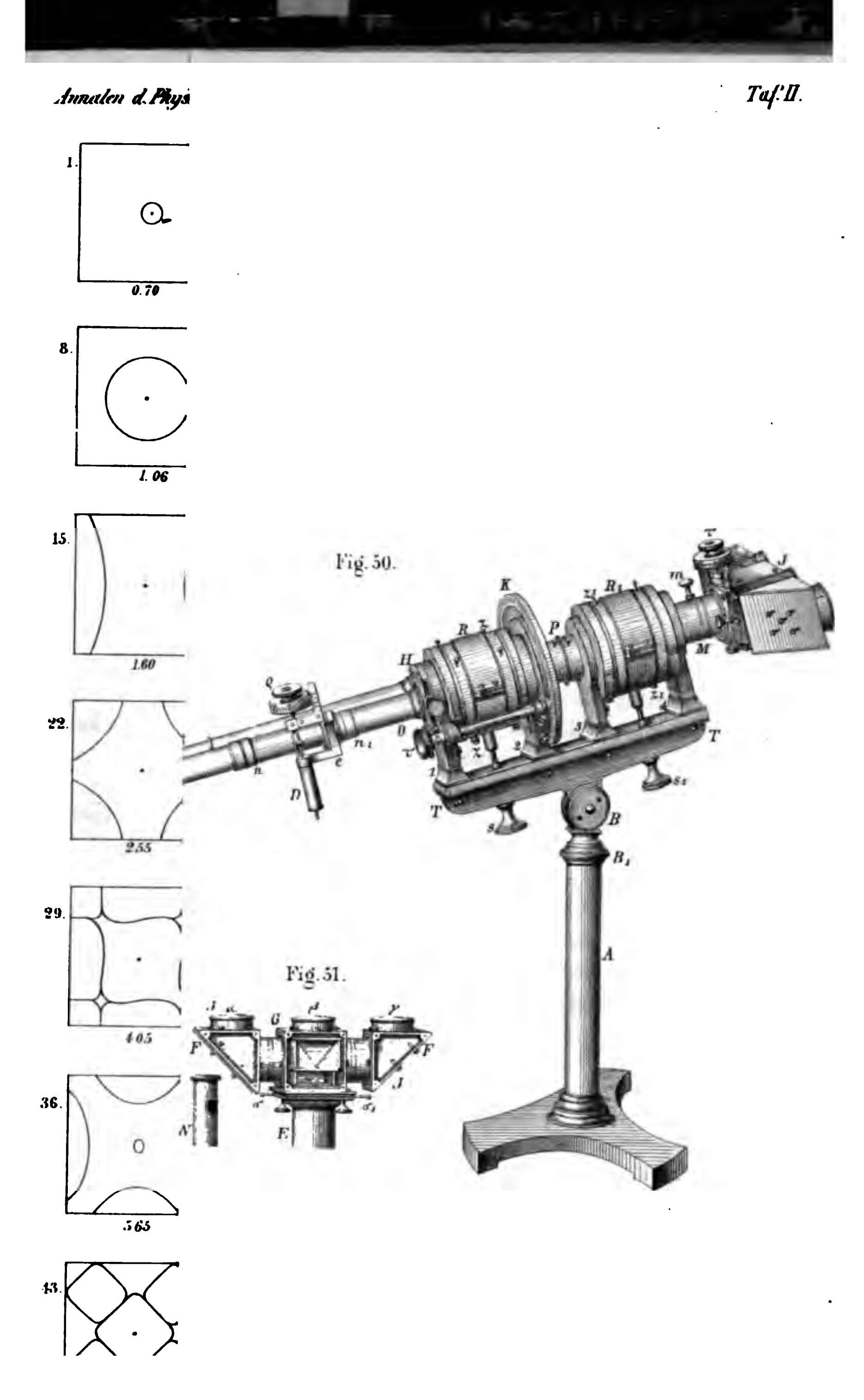
Bd. XX. (Bauer) p. 245 ist statt „Schwefelpulver" „Zinkoxyd" zu setzen

Bd. XX. (v. Wroblewski u. Olszewski) p. 245 Z. 3 v. o. lies „470" statt „450".
p. 246 Z. 23 v. o. lies „gewissen" statt „grossen".
p. 250 Z. 1 v. u. lies „flüssiger" statt „fester".

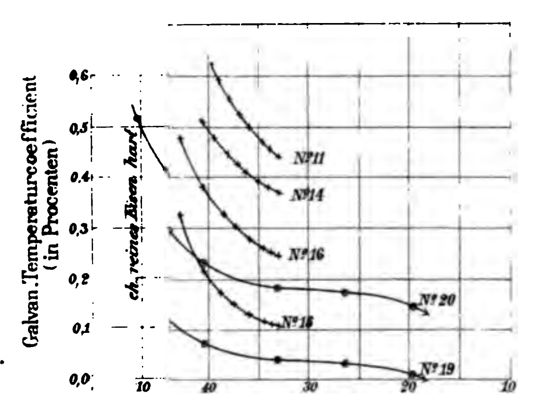
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.


g
e
k
l
n
m
c
b
d
a
Fig. 1.
[Fi]g. 9.
Fig. 3.
d
e
s
c
b
f
s
Fig. 10.
H
K
E
Fig. 11.
F
E
L
L
A
B
s
D
C
a
d
b
P
O
N
Rheostat
M
[Fig.] 2.
b
k
B
Fig. 13.
p
a
A
n
d

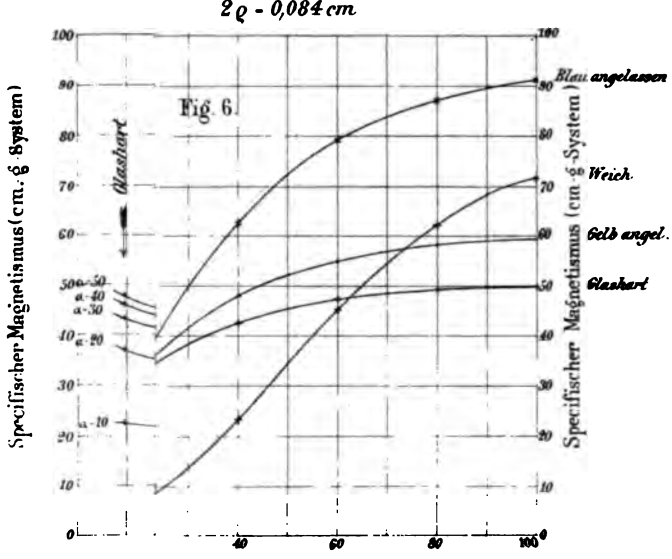



1.
0.70
8.
1.06
15.
1.60
22.
2.55
29.
4.05
36.
5.65
43.
Fig. 50.
K
R
P
R₁
m
J
H
M
Q
O
T
D
B
B₁
A
Fig. 51.
G
F
F
E

Verlauf der Abnahme des Magnetismus
Stahls mit s Härtegrades beim Anlassen.
im Ansc



Verlaus mit dem Dimensions-
enen Härtegraden.
Dünnere Drahtsorte.
$2\varrho = 0{,}084$ cm



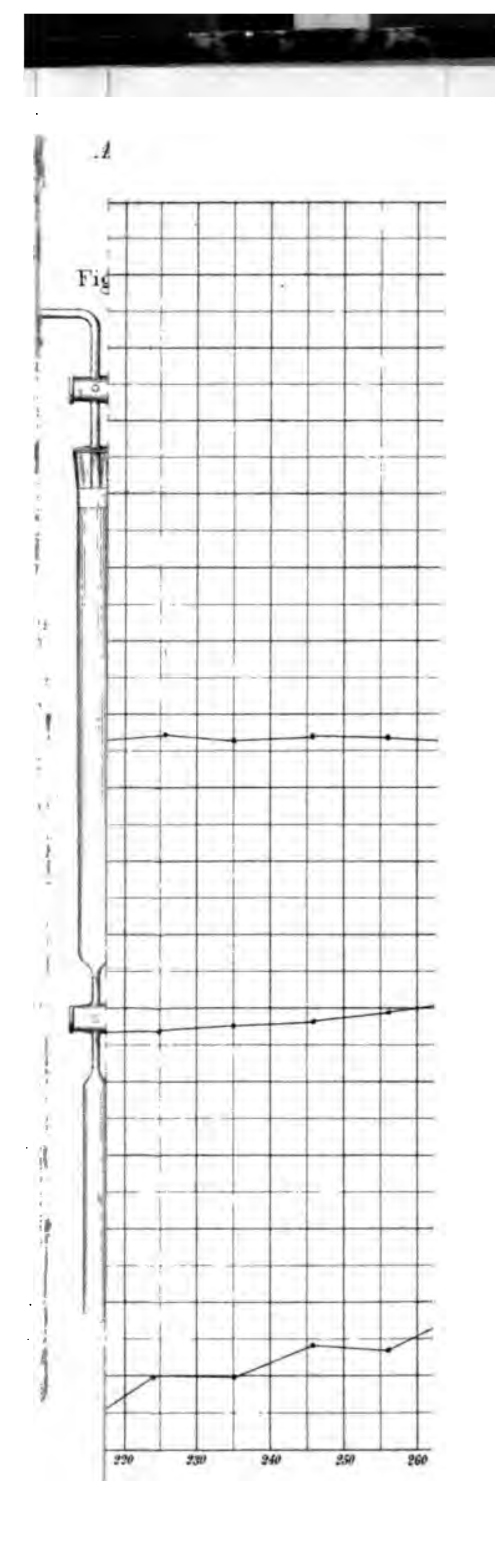

A
Fig
220
230
240
250
260

Fig. 4.

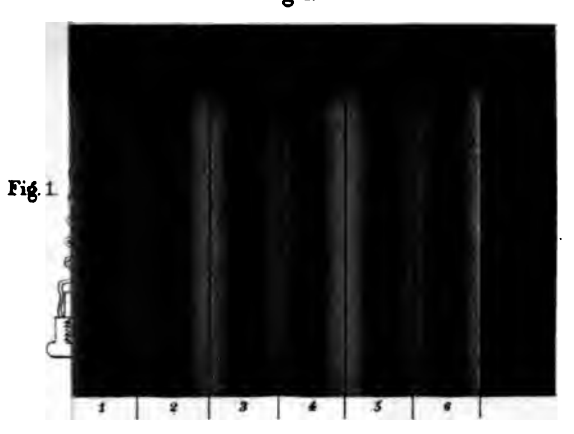


Fig. 8.



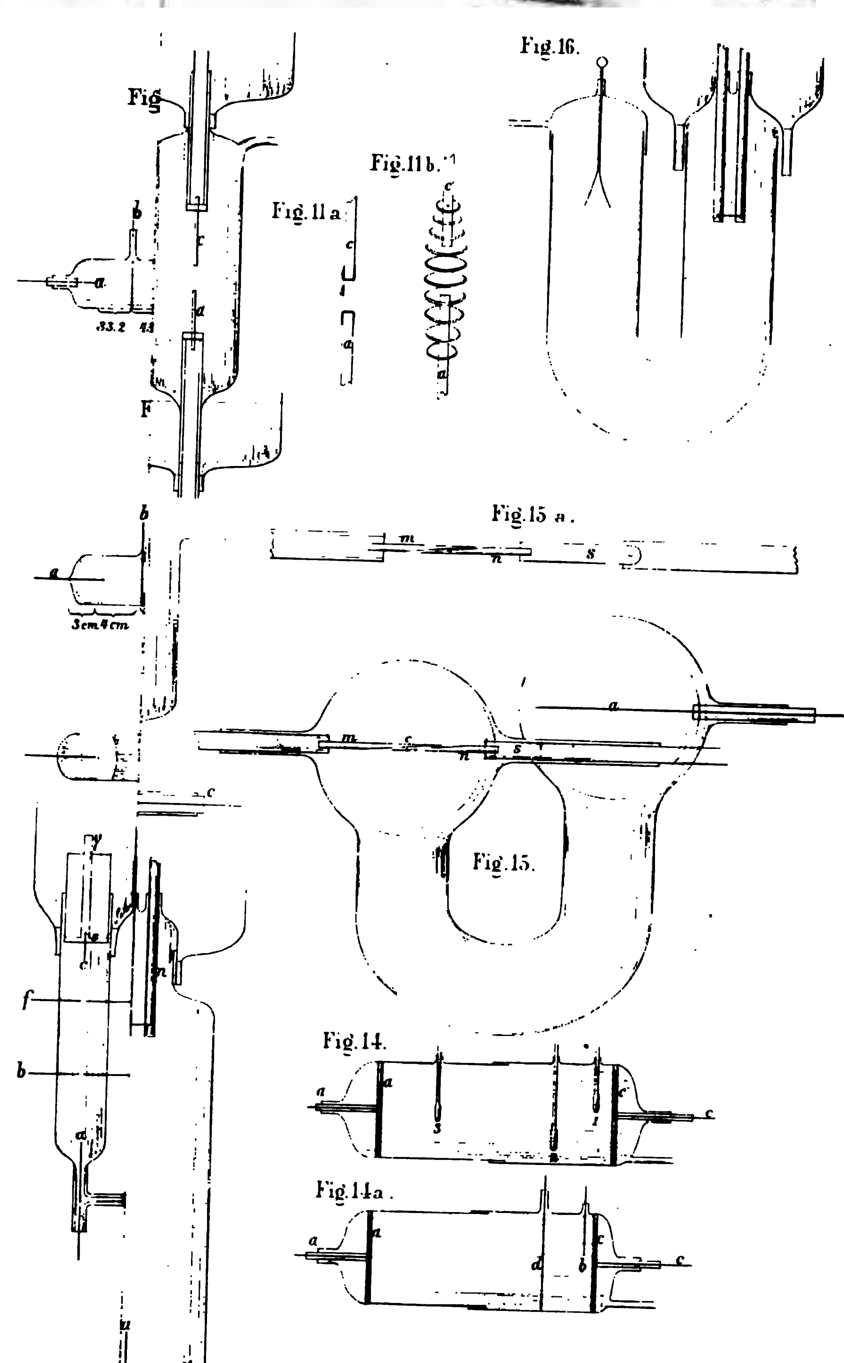


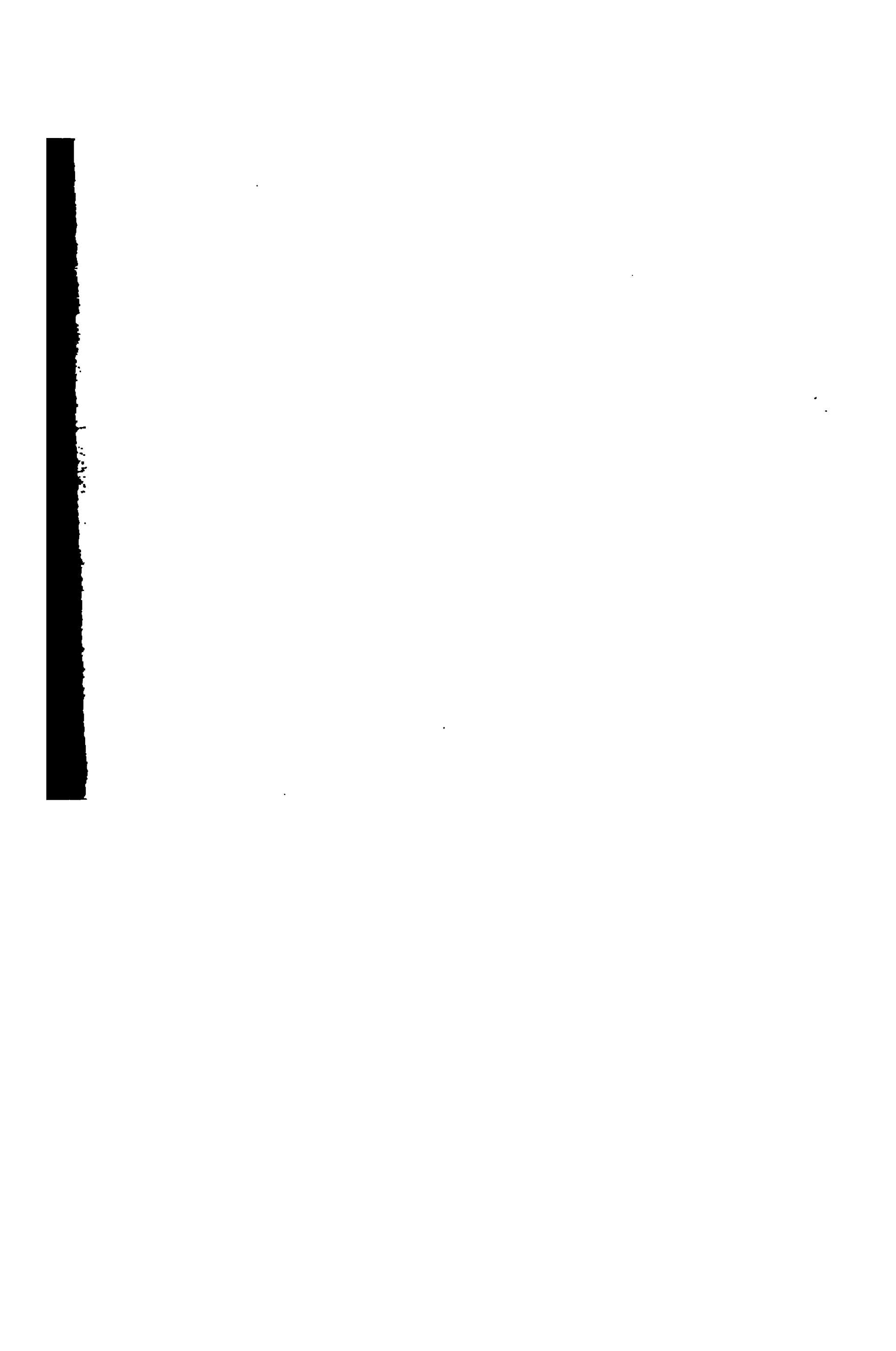
Fig. 14.








Fig
b
a
c
a
33.2
F
Fig. 11 a
c
a
Fig. 11 b.
c
a
Fig. 16.
Fig. 15 a.
m
n
s
b
a
3cm 4cm
c
a
m
c
n
s
Fig. 15.
f
b
a
Fig. 14.
a
a
s
c
c
Fig. 14a.
a
a
d
b
c
c



Taf. VII.

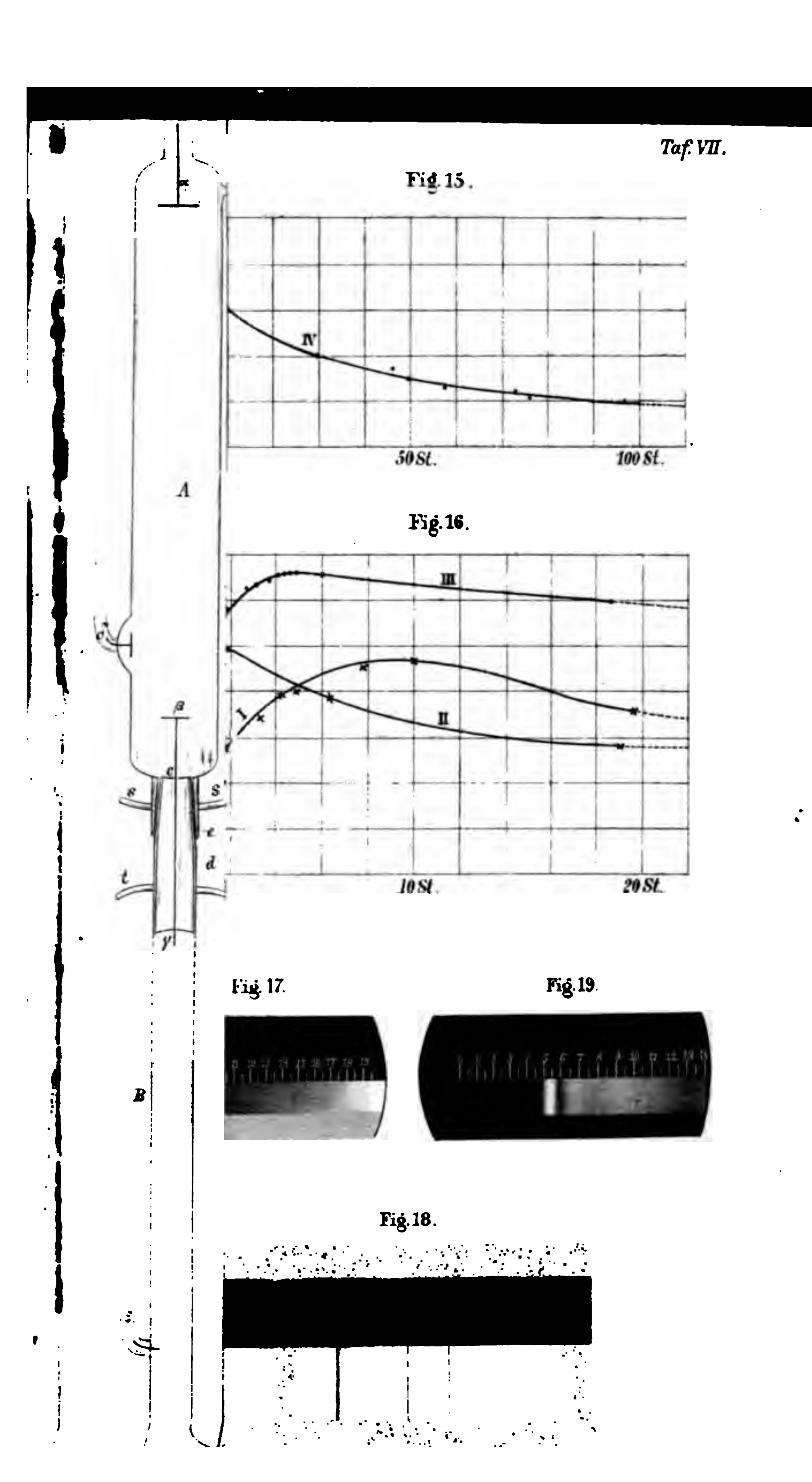


Fig. 15.
IV
50 St.
100 St.
A
Fig. 16.
III
I
II
10 St.
20 St.
B
Fig. 17.
Fig. 19.
Fig. 18.

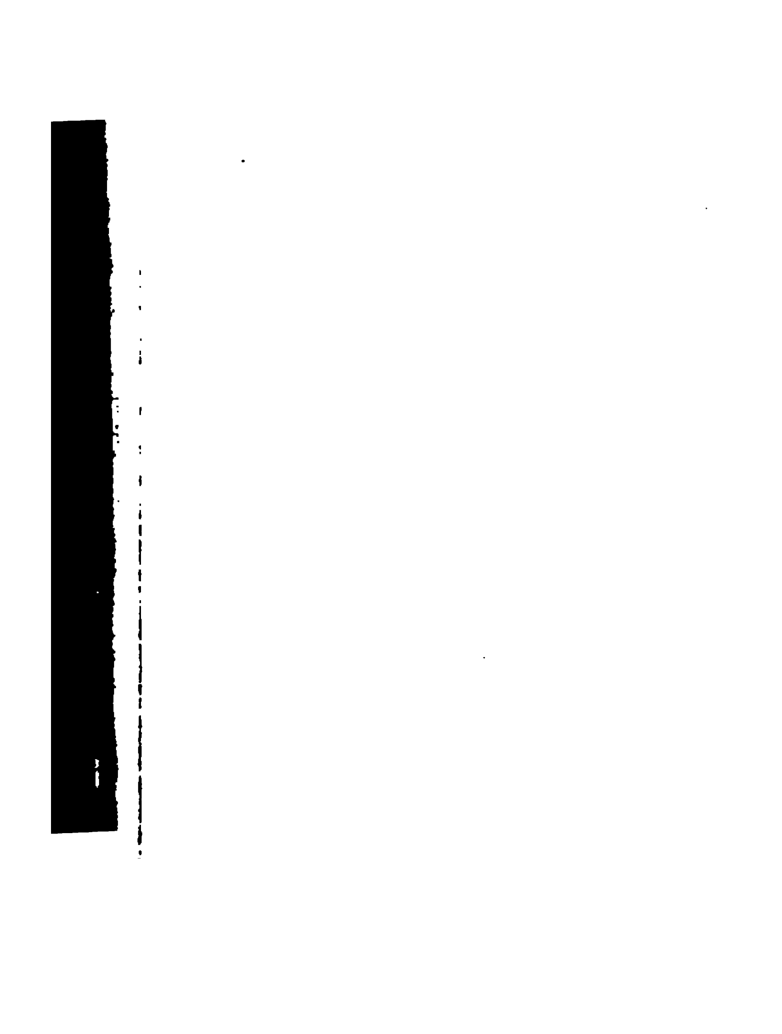


Fig. 6.

A

0,607

1,853

0,513

0,0001138

0,001111

80 90 100%

0,244

0,001222

0,160

0,774

80 90 100%

